Algoritmos e complexidade computacional de problemas de listas colorações limitadas e a propriedade da selecionabilidade em grafos

Simone Gama
Programa de Pós-Graduação em Informática
Instituto de Computação - Universidade Federal do Amazonas
simone.gama@icomp.ufam.edu.br

Rosiane de Freitas
Instituto de Computação - Universidade Federal do Amazonas
rosiane@icomp.ufam.edu.br

Mario Salvatierra
Instituto de Computação - Universidade Federal do Amazonas
mario@icomp.ufam.edu.br

RESUMO

Neste trabalho, foram investigados problemas de lista coloração e a propriedade da selecionabilidade em grafos, com ênfase no caso onde as listas de cores possuem limites inferior e superior, resultando em uma sequência limitada de cores. A lista coloração é uma variação do problema clássico de coloração em vértices, que também consiste em colorir os vértices do grafo de tal modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes, mas onde, adicionalmente, cada vértice possui uma lista de cores permitidas para uso. Foi introduzida por Erdos e outros, em 1979, juntamente com a propriedade de selecionabilidade em grafos, e possui algumas variações, dentre elas a (γ, μ)-coloração. Sendo assim, são apresentados os resultados da correlação entre a (γ, μ)-coloração e a propriedade de selecionabilidade em grafos, resultando na k-(γ, μ)-coloração, com a determinação de teoremas, algoritmos e suas complexidades computacionais, através do uso de técnicas de provas adaptadas para provar a selecionabilidade em classes específicas de grafos, e, principalmente, determinar que se um grafo é k-colorível então também é k-(γ, μ)-selecionável, sendo a complexidade computacional reduzida de Π_2^P-completa para NP-completa.

PALAVRAS-CHAVE: algoritmos, lista coloração, NP-completude, selecionabilidade em grafos.
TÓPICOS: TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos.

ABSTRACT

In this work, we investigated list coloring problems and the property of choosability in graphs, with emphasis in the case where the color lists have lower and upper limits, resulting in a limited sequence of colors. The coloring list is a variation of the classic vertex coloring problem, which also consists of coloring the vertices of the graph such that adjacent vertices have different colors, but where, additionally, each vertex has a list of colors allowed for use. It was introduced by Erdos and other. In 1979, together with the property of choosability in graphs, and has some variations, among them the (γ, μ)-coloring. Thus, the results of the correlation between the (γ, μ)-coloring and the property of choosability in graphs, resulting in the k-(γ, μ)-coloring, with the determination of theorems, algorithms and their computational complexities, Through the use of proof techniques adapted to prove the choosability in specific classes of graphs, and mainly to determine that if a graph is k-colorable then it is also k-(γ, μ)-choosable, with computational complexity being reduced from Π_2^P-complete to NP-complete.

KEYWORDS algorithms, choosability in graphs, list coloring, NP-completeness.
TOPICS: TAG - Theory and Algorithms in Graphs.

1. Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não orientado e sem loops, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas. Um subgrafo de um grafo G é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices G e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G. Um grafo bipartido é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e V tais que toda aresta conecta um vértice em U a um vértice em V. Um grafo bipartido é completo se para quaisquer dois vértices, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, v_1v_2 é uma aresta em G. O grau de um vértice v é o número de arestas incidentes a v. Uma k-coloração de G é uma atribuição de k cores ao seu conjunto de vértices tal que vértices adjacentes recebam cores diferentes. O número cromático de G, denotado por $\chi(G)$ é o menor valor de k para o qual G é k-colorível [Szwarcfiter, 1988].

A coloração em grafos possui diversas variações, dentre elas, temos a lista coloração. Seja G um grafo para o qual existe um conjunto associado $L(v)$ de lista de cores específicas para cada vértice v de G. Se é possível obter uma coloração própria dos vértices de G com essa lista de cores, então temos uma lista coloração de G. A lista coloração também possui suas variações, dentre elas, a μ-coloração e a (γ, μ)-coloração, introduzidas por Flávia Bonomo [Bonomo e Cecowski, 2005; Bonomo et al., 2009]. A Tabela 1 apresenta uma pequena comparação de resultados da literatura em complexidade computacional para coloração clássica, μ-coloração, (γ, μ)-coloração e lista coloração.

Classe de Grafo	k-coloração	μ-coloração	(γ, μ)-coloração	Lista coloração
Geral	NP-C [Garey e Johnson, 1979]	NP-C [Bonomo e Cecowski, 2005]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Kubiak et al., 1999]
Bipartido	P [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo e Cecowski, 2005]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [M., 2004]
Split	P [Golumbic, 1980]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]
Intervalo	P [Gröstschel e Lovasz, 1981]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]
Linha do K_n	P [König, 1916]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [M., 2004]
Linha do $K_{n,n}$	P [König, 1916]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]	NP-C [Bonomo et al., 2009]
Cografos	P [Gröstschel e Lovasz, 1981]	P [Bonomo e Cecowski, 2005]	?	NP-C [Jansen e Scheffler, 1997]
$K_{n,n}$	P [Bonomo e Duran, 2007]	P [Bonomo e Cecowski, 2005]	P [Bonomo e Duran, 2007]	NP-C [Bonomo e Duran, 2007]
Blocos	P [Bonomo e Duran, 2007]	P [Bonomo e Duran, 2007]	P [Bonomo e Duran, 2007]	P [Bonomo e Duran, 2007]

Tabela 1: Comparação da complexidade computacional em coloração clássica, μ-coloração, (γ, μ)-coloração e lista coloração. O sinal de **?** significa problema em aberto.

2. Selecionabilidade em Grafos e k-(γ, μ)-selecionabilidade

Esta seção apresenta as definições necessárias para o entendimento do estudo realizado. Temos as definições de selecionabilidade em grafos, a (γ, μ)-coloração, que é uma variação da lista coloração e grafos e a correlação entre os dois citados e que foi o alvo do estudo, a k-(γ, μ)-coloração.

Dada uma função f de atribuição de um inteiro positivo $f(v)$ para cada vértice v, um grafo é f-selecionável ou f-choosable se G possui uma lista coloração com as listas de cores atribuídas a cada $v \in V$ [Ërdos et al., 1979].

Definição 1 ([Ërdos et al., 1979]). *Um grafo G é k-selecionável (ou k-choosable) se existe uma lista coloração para qualquer atribuição de listas de cores de tamanho k para cada vértice de G.*

Definição 2 ([Ërdos et al., 1979]). *A lista número cromático ou choice number de G, denotado por $\chi_\ell(G)$ é o menor k para o qual G é k-selecionável.*

O problema da lista coloração e selecionabilidade em grafos foi introduzido por Paul Erdös em 1979 [Ërdos et al., 1979] e, independentemente por Vizing em 1976 [Vizing, 1976]. Erdös *et al.* caracterizaram grafos que são 2-selecionável e conjecturaram que grafos planares são 5-selecionável e que existem grafos planares que não são 4-selecionável. Esses resultados foram posteriormente provados [Thomassen, 1994; Voigt, 1993]. A lista coloração possui algumas variações, dentre elas destacamos a (γ, μ)-coloração [Bonomo et al., 2009].

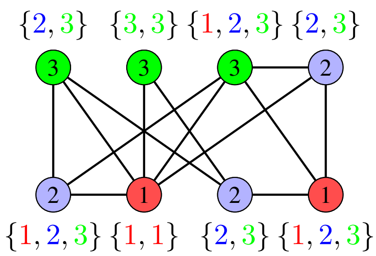

Figura 1: Exemplo de uma variação da lista coloração, a (γ, μ)-coloração.

Definição 3 ([Bonomo et al., 2009])**.** *Dado um grafo G e uma função $\gamma, \mu : V(G) \to \mathbb{N}$ tal que $\gamma(v) \leq \mu(v)$ para todo $v \in V(G)$, G é (γ, μ)-colorível se existe uma coloração $\mathcal{L}$ de G tal que $\gamma(v) \leq f(v) \leq \mu(v)$ para todo $v \in V(G)$.*

O esquema de generalizações em colorações por restrição, resumidos na Figura 2, implica que todos os problemas nessa hierarquia são polinomialmente solucionáveis em uma classe de grafos onde a lista coloração é polinomial. Por outro lado, todos os problemas são NP-Completos em uma classe de grafos onde a coloração de vértices é NP-Completo [Bonomo et al., 2009].

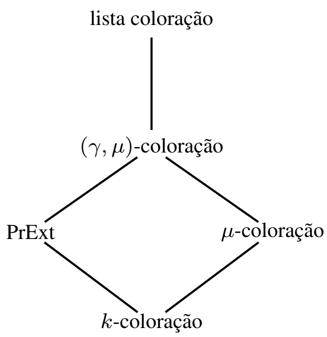

Figura 2: Esquema de generalizações entre problemas de coloração em grafos.

Neste estudo, foi correlacionado a (γ, μ)-coloração com a k-selecionabilidade, gerando assim a k-(γ, μ)-selecionabilidade ou k-(γ, μ)-*choosable*. A seguir, será apresentado a sua definição formal e nas próximas seções, serão apresentados os algoritmos e as principais provas dessa correlação [Gama, 2016].

Definição 4. *Um grafo G é k-(γ, μ)-selecionável ou k-(γ, μ)-lista-colorível se G é (γ, μ)-colorível para cada coleção $\mathcal{L}$ de listas $L(v)$ para os vértices v de G tal que $|L(v)| \geq k$ para cada vértice v, e as listas são do tipo (γ, μ).*

2.1. Algoritmos para determinar a k-(γ, μ)-selecionabilidade

Esta seção apresenta um algoritmo de enumeração explícita para verificar se um grafo possui uma lista coloração para as lista de cores associadas as seus vértices e um algoritmo de enumeração explícita para k-(γ, μ)-selecionabilidade, que enumera todas as listas de cores de tamanho k, do tipo (γ, μ), e assim verificar se o grafo é colorível para todas essas listas de cores [Gama, 2016].

2.1.1. Algoritmo para lista coloração

Vamos apresentar o método de enumeração explícita para o problema da lista coloração. O algoritmo verifica se existe uma coloração própria do grafo com as listas de cores associadas aos vértices. O pseudocódigo está descrito no Algoritmo 1.

O algoritmo recursivo inicia com a condição de parada *falso*. Esse controle é feito pela variável $existe$, na linha 1. Como no início da execução o grafo ainda não está colorido, o algoritmo segue para a linha 6 para o conjunto de listas L, e assim, na linha 8, o vértice é colorido com as cores de sua respectiva lista de cores e o algoritmo chama recursivamente a função *Existe_Lista_Coloracao* para colorir o vértice $i + 1$, até que todos os vértices estejam coloridos.

Logo, se existe uma coloração para o grafo com a lista de cores dada, o algoritmo termina sua execução (linha 11). Se todos os vértices estão coloridos, mas não existe uma coloração própria para o grafo, o algoritmo segue para a próxima cor da lista de cores do último vértice visitado. Se ainda assim não existir coloração própria e não houver mais cores disponíveis na lista de cores à serem testados, o algoritmo volta um nível na árvore de execução para testar a próxima cor disponível desse vértice, e assim por diante.

Algoritmo 1: Existe_Lista_Coloracao($G, L, existe, i$)

1 **se** *!(existe)* **então**
2   **se** $L = \varnothing$ **então**
3   **se** *ExisteColoracao(G)* **então**
4   existe $\longleftarrow$ SIM;
5   **senão**
6         $l \longleftarrow$ remove o primeiro da lista L;
7   **para cada** $cor \in l$ **faça**
8             $G.v_i.cor \longleftarrow$ cor;
9   Existe_Lista_Coloracao($G, L, existe, i + 1$);
10   **se** *(existe)* **então**
11   **break**;

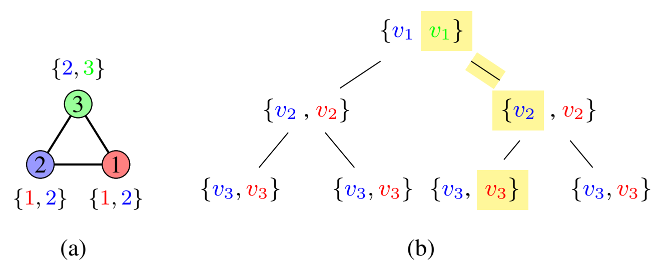

Figura 3: Execução do Algoritmo 1 para o grafo da Figura 3(a).

Como exemplo, temos um grafo K_3 com listas de cores associadas aos seus vértices e a sua respectiva árvore de execução do Algoritmo 1. Uma solução é encontrada, onde as cores escolhidas são: verde (3) para vértice v_1, azul (2) para v_2 e vermelho (1) para v_3. A solução encontrada pode ser vista destacada na árvore de execução da Figura 3(b).

2.1.2. Algoritmo para k-(γ, μ)-selecionabilidade

O próximo algoritmo é para a k-(γ, μ)-selecionabilidade e descrição sobre sua execução será apresentada nesta seção. O Algoritmo 2 efetua uma chamada a função *é_k-(γ, μ)-choosable* com o valor inicial de k igual a 2. Dentro dessa função *é_k-(γ, μ)-choosable*, na Linha 1, é gerado as listas de cores do tipo (γ, μ) de tamanho k. A quantidade de listas de cores é dada pela equação $n - k - 1$, onde n é o número de vértices e k é o tamanho das listas de cores [Gama, 2016].

Algoritmo 2: $\chi_\ell(G = (V, E))$

1 **enquanto** *!(é_k-(γ, μ)-choosable(G, k))* **faça**
2     $k \leftarrow k + 1$;
3 **Retorne** k;

Algoritmo 3: é_k-(γ, μ)-*choosable*$(G = (V, E), k)$

1 $X \leftarrow \{\{1, 2, \ldots, k\}, \{2, 3, \ldots, k + 1\}, \ldots, \{n - k + 1, n - k + 2, \ldots, n\}\}$;
2 $P_x \leftarrow$ todas as n-permutações de X com elementos repetidos;
3 **para cada** $L \in P_x$ **faça**
4   **se** *!(Existe_Lista_Coloracao$(G, L, nao, 1)$)* **então**
5   **Retorne** NAO;
6 **Retorne** SIM;

Formado os conjuntos de listas, as soluções são formadas pelas listas de cores anteriores, tomados n a n, onde é possível elementos repetidos. Pelo princípio multiplicativo, o número total de maneiras de se retirar n elementos dos p objetos, distintos ou não, é igual a Equação 1 (onde n é o número de vértices do grafo e p é a quantidade de listas geradas pela função da Linha 1), uma vez que o primeiro elemento pode ser retirado de p maneiras, o segundo também de p maneiras, e assim sucessivamente, até que o n-ésimo seja escolhido. Esse processo é feito na linha 2 do Algoritmo 3.

$$AR_p^n = p^n \tag{1}$$

Como exemplo para execução do Algoritmo 3, observe a Figura 4, onde temos um grafo C_3. A Linha 1 do algoritmo gera as listas de cores do tipo (γ, μ), através da equação $n - k - 1 = 3 - 2 - 1 = 2$, que são as listas $(1, 2)$ e $(2, 3)$. Logo após, na Linha 2, as soluções de listas são geradas, de acordo com a Equação 1, que são no total 8 soluções de listas de cores, como mostrado na Figura 4.

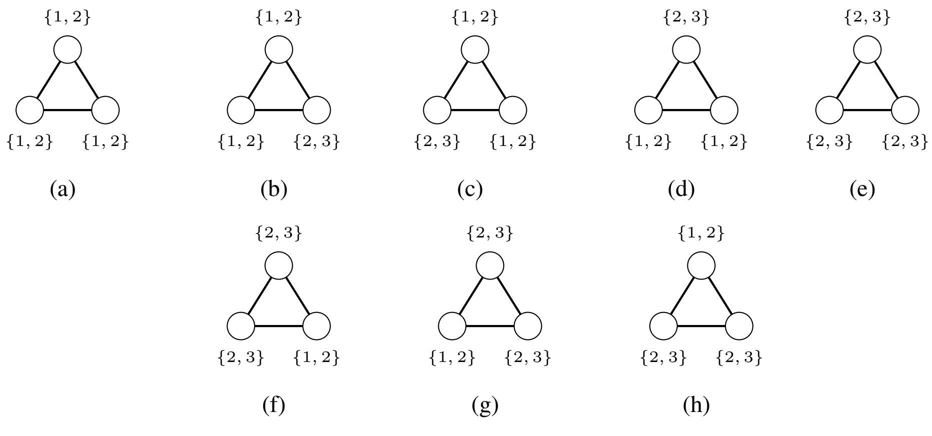

Figura 4: Exemplo de soluções de listas de cores para um C_3 para execução do Algoritmo 3.

Logo após, o Algoritmo 1 do *Existe_Lista_Coloracao* é chamado para verificar se existe coloração própria do grafo com a lista de cores. Se não for possível colorir, a função retorna *não* para a função *é_k-(γ, μ)-choosable*, onde o algoritmo incrementa k e recomeça a montagem de novas listas de cores, agora com $k + 1$ (no Algoritmo 2). Se for possível colorir, a função retorna *sim* para a função *é_k-(γ, μ)-choosable*, finalizando assim a execução do algoritmo. É importante enfatizar que o algoritmo efetua a verificação para **todos** os conjuntos de listas de cores de tamanho k. No exemplo de execução da Figura 4, o grafo C_3 não é colorível para a solução

$\{(1,2),(1,2),(1,2)\}$, portanto a função *é_k* $-$ (γ,μ)*-choosable* retorna *não* para o Algoritmo 2, onde o k agora será igual a 3. Retornando ao Algoritmo 3, a nova lista de cor é $\{(1,2,3)\}$ (é a única lista de tamanho 3 do tipo (γ,μ)). Portanto, a nova solução será $\{(1,2,3),(1,2,3),(1,2,3)\}$.

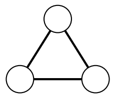

Figura 5: Exemplo de execução do algoritmo da Figura 4 para $k = 3$.

2.2. Técnicas de Provas em Selecionabilidade

Em 2001, Douglas Woodall [Woodall, 2001] apresentou algumas técnicas de provas utilizadas nos resultados existentes para selecionabilidade em grafos. Eles podem ser divididos em técnica de Alon-Tarsi [Alon e Tarsi, 1992], técnica de kernel em digrafos, técnica de degeneração em grafos, técnica do teorema de Hall, Técnica de limite [Thomassen, 1994]. Erdös *et al.* utilizaram o teorema de Hall para mostrar que o grafo completo k-partido $K_{2,2,\ldots,2}$ é k-selecionável. Existem resultados na literatura que utiliza a técnica de prova em degeneração de grafos. Um grafo é k*-degenerado* se pode ser reduzido a um K_1 por repetidas deleções de seus vértices de grau no máximo k [Bondy e R., 1982]. Um grafo que é k-degenerado é $k+1$-selecionável [Wang e Lih, 2002]. Grafos planares são 6-selecionável com base nesse argumento: grafos planares são 5-degenerados e portanto, 6-selecionável [Woodall, 2001]. Tuza mostrou que grafos livres de triângulos, que são 3-degenerados, são 4-selecionável [Tuza e Kratochvil, 1994].

2.2.1. Grafos periplanares são 3-(γ,μ)-selecionáveis

Grafos periplanares são grafos planares onde todos os vértices do grafo estão localizados na região externa. Um grafo periplanar é maximal quando a adição de uma aresta entre dois vértices não adjacentes resulta em um grafo não periplanar [Bondy e R., 1982]. Será apresentado uma prova para grafos periplanares, que são 2-degenerados e portanto são 3-(γ,μ)-selecionável [Lick e White, 1970].

Teorema 1 ([Gary Chartrand, 2008])**.** *Todo grafo periplanar não trivial contém pelo menos 2 vértices de grau 2 ou menos.*

Teorema 2 ([Gama, 2016])**.** *Todo grafo periplanar é 3-*(γ,μ)*-selecionável.*

Prova. A prova é feita por indução sobre n. Seja $G = K_1$. Este grafo não tem arestas e é trivialmente periplanar e 3-(γ,μ)-selecionável. Supondo que todo grafo periplanar com n vértices é 3-(γ,μ)-selecionável, vamos demonstrar que a lista coloração também é válido para um grafo periplanar com $n+1$ vértices e com uma distribuição de listas de cores em seus vértices do tipo (γ,μ) de tamanho 3. Pelo Teorema 1, existe um vértice v em G_{n+1} com grau até no máximo 2. Removendo este vértice, teremos um subgrafo G_n com n vértices.

Uma vez que G_{n+1} pode ser desenhado com seus vértices em forma de ciclo com cordas sem cruzamentos, o subgrafo também pode ser desenhado dessa forma. Isso implica que G_n tem uma lista coloração com listas do tipo (γ,μ) de tamanho 3. Assim, podemos colorir os vértices de G_{n+1} com 3 ou mais cores. Uma vez que os vértices adjacentes ao vértice v de grau 2 já estão coloridos, o vértice v receberá uma terceira cor de sua lista de cores que seja diferente de seus adjacentes e vemos que a hipótese de indução é válida. $\square$

2.2.2. Grafos bipartido completo são 2-(γ, μ)-selecionáveis

Será apresentado a prova para o grafo bipartido completo utilizando o Teorema de Hall. Este grafo é conhecido ser 3-selecionável [Ërdos et al., 1979], porém é 2-(γ, μ)-selecionável [Gama, 2016].

Teorema 3 ([Hall, 1948])**.** *(Teorema dos Representantes distintos de Hall) Uma família de conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_m$ tem um sistema de representantes distintos se e só se para qualquer subconjunto $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ se verifica a condição*

$$|\bigcup_{i \in I} S_i| \geq |I|$$

Lema 1. *Considere um $K_{n,n} = G[V, W]$ para $n \geq 1$ com partições $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$,$W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ e uma distribuição de listas (γ, μ) de tamanho 2, $L(v)$ para todo $v \in K_{n,n}$ tal que $L(v_i) \neq L(v_j)$ se $i \neq j$, e $L(v_i) = L(w_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Então o $K_{n,n}$ é 2-(γ, μ)-choosable.*

Prova. A prova deste lema é feita por indução sobre n. Suponha agora que o teorema é válido para $K_{n,n}$, onde $n \geq 1$ e então vale para o $K_{n+1,n+1}$. Sem perda de generalidade, supor que as listas $L(v_i) = \{\gamma_i, \gamma_i + 1\}$ estão distribuídas nos vértices tal que $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{n+1}$. Considere o subgrafo completo $K_{n,n}$ obtido pelos vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Por hipótese de indução existe uma lista coloração para este $K_{n,n}$. Falta colorir os vértices v_{n+1} e w_{n+1}. No pior dos casos $\gamma_{n+1} = \gamma_n + 1$ pois $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ e as listas são em sequência. Neste caso então, se for $\gamma_{n+1} = \gamma_n + 1$, sem perda de generalidade, supor que a cor escolhida para o vértice v_n foi γ_n e para o vértice w_n foi $\gamma_n + 1$. Então o vértice v_{n+1} será colorido com a cor $\gamma_{n+1} + 1$ e o vértice w_{n+1} com a cor γ_{n+1}. A Figura 6 mostra o grafo bipartido de exemplo para este lema.

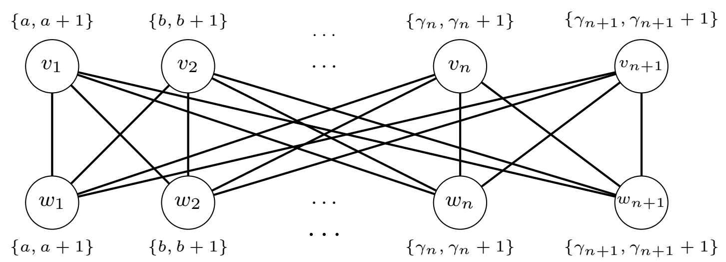

Figura 6: Exemplo de grafo bipartido completo com todas as listas de cores do tipo (γ, μ) de tamanho 2 iguais para o Lema 1.

$\square$

Lema 2. *Considere um $K_{n,n} = G[V, W]$ para $n \geq 1$ com partições $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$,$W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ e uma distribuição de listas (γ, μ) de tamanho 2, $L(v)$ para todo $v \in K_{n,n}$ tal que $L(v_i) \neq L(w_j)$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Então o $K_{n,n}$ é 2-(γ, μ)-choosable.*

Prova. Consideremos na partição V somente as listas distintas $S_1, \ldots, S_r$, e na partição W somente as listas distintas $S_{r+1}, \ldots, S_{r+t}$. Assim, temos que $S_i \neq S_j$, para $i \neq j$, e como são listas (γ, μ) de tamanho 2, a interseção de quaisquer duas destas listas tem no máximo um elemento (observe a Figura 7). Assim, estes conjuntos S_i cumprem o Teorema 3 e assim obtemos elementos distintos $c_i \in S_i$, com $c_i \neq c_j$. Então colorimos um vértice $v \in K_{n,n}$ com a cor c_i se $L(v) = S_i$, e temos assim uma lista coloração do $K_{n,n}$.

$\square$

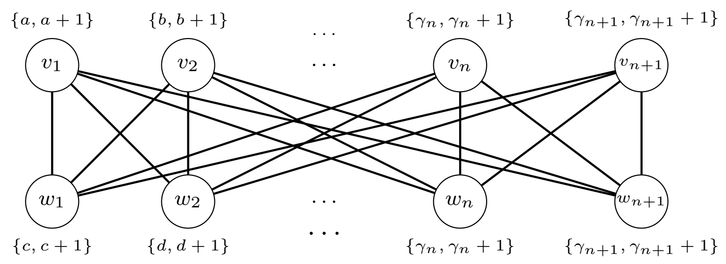

Figura 7: Exemplo de grafo bipartido completo com todas as listas de cores do tipo (γ, μ) de tamanho 2 diferentes para o Lema 2.

Teorema 4. *O grafo bipartido completo $K_{n,n}$ é 2-(γ, μ)-selecionável para $n \geq 1$.*

Prova. Escolhe-se incialmente os vértices em que as listas de cores aparecem nas duas partições V e W do $K_{n,n}$. Deste modo consideremos um subgrafo H do $K_{n,n}$ onde os conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_r$ $(r \leq n)$, (que são as listas que ocorrem ao mesmo tempo em vértices de V e W, e como escolhemos apenas um representante em caso de repetição na partição, temos que $S_i \neq S_j$, para $i \neq j$) são válidos.

Se $r = 0$, o subgrafo H cumpre as hipóteses do Lema 2 e assim temos uma lista coloração de H. Se $r \geq 1$, o subgrafo H cumpre as hipóteses do Lema 1 e assim temos uma lista coloração de H. Sejam então $x_1, x_2, \ldots, x_r$ as cores escolhidas para estes r vértices de V e $y_1, y_2, \ldots, y_r$ as cores escolhidas para estes r vértices de W. Além disso estendemos estas cores para todos os vértices restantes de G que possuem uma destas listas de cores $S_1, S_2, \ldots, S_r$, colorindo com a cor x_i para os demais vértices de V que possuem a lista S_i e com a cor y_i para os demais vértices de W que possuem a lista S_i. Agora, os vértices v de G que ainda não foram coloridos possuem listas de cores $L(v)$ que estão apenas numa partição de G. Ainda assim, em cada partição V e W podem haver listas que se repetem, ou seja, mais de um vértice podem ter a mesma lista em uma mesma partição. Deste modo, novamente considere apenas uma lista representante de cada uma dessas restantes, definindo os conjuntos: $E_1, E_2, \ldots, E_t$, que são as listas distintas distribuídas nos vértices restantes de V, e $F_1, F_2, \ldots, F_s$, as listas distintas distribuídas nos vértices restantes de W. Por construção, considere que $E_i \neq E_j$ para $i \neq j$, $F_i \neq F_j$ para $i \neq j$ e $E_i \neq F_j$, $\forall i, j$. Além disso, por serem listas de tamanho 2 do tipo (γ, μ) duas dessas listas distintas possuem no máximo um elemento em comum.

Para os restantes dos vértices que ainda não foram coloridos, temos que essas listas de cores serão distintas e como as listas são de tamanho 2 do tipo (γ, μ), terão, no máximo, 1 cor em comum. Nesse caso, o Teorema 3 é aplicado nessas listas de cores restantes, garantido a coloração e a prova é finalizada. □

2.2.3. Grafos k-coloríveis são k-(γ, μ)-selecionáveis

Nesta seção será apresentado uma prova mais geral da correlação da k-(γ, μ)-selecionável, onde um grafo que é k-colorível é k-(γ, μ)-selecionável [Gama, 2016].

Teorema 5. *Seja G um grafo k-colorível. Então G é k-(γ, μ)-selecionável.*

Prova. Como G é k-colorível, existe uma coloração $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(v) \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, e se os vértices v_i e v_j são adjacentes $c(v_i) \neq c(v_j)$. Quando fazemos a divisão de um inteiro qualquer m por k, obtemos o resto da divisão r, tal que $r \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Além do mais esta divisão particiona os inteiros em k conjuntos distintos. Consideremos $A_0 = \{n \in \mathbb{Z}|$ o resto da divisão de n por k é 0 $\}$, $A_1 = \{n \in \mathbb{Z}|$ o resto da divisão de n por k é 1 $\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{Z}|$ o resto da divisão de n por k é 2 $\}, \ldots$, $A_{k-1} = \{n \in \mathbb{Z}|$ o resto da divisão de n por k é $k-1$ $\}$. Estes conjuntos são dois a dois disjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Outro fato importante é que dada qualquer sequência de k inteiros consecutivos $x, x+1, x+2, \ldots, x+k-1$, existe exatamente um destes elementos contido em cada um dos conjuntos A_i. Ou seja, um desses elementos deixa resto i na divisão por k, para $i = 0, 1, 2, \ldots k-1$.

Consideremos agora uma distribuição qualquer de listas de tamanho k to tipo (γ, μ) para os vértices de V. Assim, para cada $v_i \in V$, temos $L(v_i) = \{\gamma_i, \gamma_i + 1, \ldots, \gamma_i + k - 1\}$. Sejam v_i e v_j vértices adjacentes em G, assim $c_i = c(v_i) \neq c(v_j) = c_j$, e portanto os conjuntos A_{c_i} e A_{c_j} são disjuntos. Para fazermos uma (γ, μ)-lista coloração de G nestes vértices adjacentes v_i e v_j escolhemos como cor para o vértice v_i o elemento de $L(v_i)$ que pertence ao conjunto A_{c_i} e para o vértice v_j escolhemos o elemento de $L(v_j)$ que pertence ao conjunto A_{c_j} e isto garante que vértices adjacentes serão coloridos com cores distintas. Observe essa coloração em um grafo na Figura 8. Portanto G é k-(γ, μ)-selecionável.

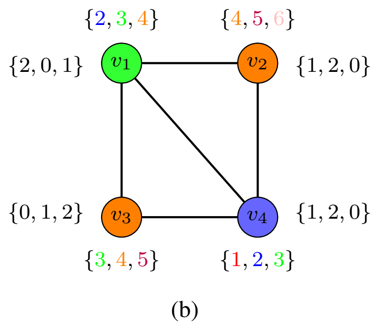

Figura 8: Uma k-(γ, μ)-coloração de um grafo, que é 3-colorível, portanto é 3-(γ, μ)-selecionável.

□

3. Conclusão

Apresentamos neste trabalho uma correlação entre (γ, μ)-coloração e k-selecionabilidade, gerando assim a k-(γ, μ)-selecionabilidade. Foram apresentados algoritmos para k-(γ, μ)-selecionabilidade, além duas provas envolvendo k-(γ, μ)-selecionável para grafos bipartidos completos e periplanares, utilizando algumas das técnicas de provas em selecionabilidade apresentadas da literatura [Woodall, 2001] e uma prova forte sobre a mesma coloração. O Teorema 5 mostra que se G é k-colorível então G é k-(γ, μ)-selecionável, o que torna a k-(γ, μ)-selecionabilidade um problema NP-Completo devido o fato do problema da k-coloração também ser NP-Completo. A Tabela 2 apresenta um resumo dos resultados obtidos.

Como trabalhos futuros, pretende-se continuar trabalhando com a lista coloração e a sua variação, a (γ, μ)-coloração, juntamente com a complexidade parametrizada, que foca em classificar os problemas computacionais de acordo com sua dificuldade inerente aos parâmetros da entrada [Downey e Fellows, 1992].

Classes de Grafos	**k-coloração $\chi(G)$**	**k-selecionabilidade**	**k-(γ, μ)-selecionável**
Ciclos Pares	2-colorível	2-selecionável	2-(γ, μ)-selecionável
Bipartido Completo	**2-colorível**	**3-selecionável**	**2-(γ, μ)-selecionável**
Ciclos Ímpares	3-colorível	3-selecionável	3-(γ, μ)-selecionável
Planares	**4-colorível**	**5-selecionável**	**4-(γ, μ)-selecionável**

Tabela 2: Resultados para k-selecionabilidade *versus* k-(γ, μ)-selecionabilidade.

Referências

Alon, N. e Tarsi, M. (1992). Colorings and orientations of graphs. *Combinatoria*.

Bondy, J. A. e R., M. U. (1982). *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishers.

Bonomo, F. e Cecowski, M. (2005). Between coloring and list-coloring: μ-coloring. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*.

Bonomo, F. e Duran, G. (2007). Graph coloring problems. *XII ELAVIO, February 2007, Itaipava, Brasil*.

Bonomo, F., Duran, G., e Marenco, J. (2009). Exploring the complexity boundary between coloring and list-coloring. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*.

Downey, R. e Fellows, M. (1992). Fixed-parameter tractability and completeness. *Proceedings of the 21st Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing.*

Ërdos, P., Rubin, L., e Taylor, H. (1979). Chosability in graphs. *Proceedings West Coast Conference on Combinatorics*, p. 125–157.

Gama, S. (2016). *Sobre problemas de lista coloração e a propriedade de selecionabilidade em grafos*. Dissertação (Mestrado em Informática) - Instituto de Computação, Universidade Federal do Amazonas, Manaus-AM.

Garey, M. e Johnson, D. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H.Freeman and Company.

Gary Chartrand, P. Z. (2008). *Chromatic Graph Theory*. CRC Press.

Golumbic, M. (1980). Algorithmic graph theory and perfect graphs. *Academic Press*.

Gröstschel, M. e Lovasz, L. (1981). The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatoria*.

Hall, M. (1948). Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:922–926.

Jansen, K. e Scheffler, P. (1997). Generalized colorings for tree-like graphs. *Discrete Applied Mathematics*.

König, D. (1916). Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*.

Kubiak, W., Dror, M., Finke, G., e Gravier, S. (1999). On the complexity of a restricted list-coloring problem. *Discrete Mathematics*.

Lick, D. e White, A. (1970). k-degenerate graphs. *Can. J. Math, Vol.XXII*.

M., K. (2004). *Graph Colorings.* Contemporary Mathematics.

Szwarcfiter, J. L. (1988). *Grafos e algoritmos computacionais*.

Thomassen, C. (1994). Every planar graph is 5-choosable. *Journal of Combinatorial Theory*.

Tuza, Z. e Kratochvil, J. (1994). Algorithmic complexity of list colorings. *Discrete Applied Mathematics*.

Vizing, V. (1976). Vertex coloring of a graph with assigned colors. *Metody Diskret. Analiz. (Novosibirsk)*.

Voigt, M. (1993). List colourings of planar graphs. *Elsevier Science Publishers*.

Wang, W. e Lih, K. (2002). Choosability, edge choosability of planar graphs without five cycles. *Applied Mathematics*.

Woodall, D. (2001). List colourings of graphs. *Surveys in Combinatorics*.