Metodologias de soluções para o problema de redes multimodais aplicadas ao tráfego urbano

Juliana Verga Shirabayashi
Universidade Federal do Paraná - Campus Avançado em Jandaia do Sul
Rua Dr. João Maximiano, 426, Jandaia do Sul - PR
juliana.verga@ufpr.br

Akebo Yamakami
Departamento de Sistemas e Energia - FEEC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas - SP
akebo@dt.fee.unicamp.br

Ricardo Coelho Silva
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - UFC
Campus do Pici, Bloco 910, 60440-554, Fortaleza - CE
rcoelhos@dema.ufc.br

Wesley Vagner I. Shirabayashi
Departamento de Matemática - UEM
Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá - PR
wvishirabayashi@uem.br

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de redes de transporte multimodal. Este problema tem sido muito estudado por diversos pesquisadores, que buscam soluções para os crescentes problemas relacionados aos sistemas de transporte, como: engarrafamentos, poluição, atrasos, dentre outros. Uma breve revisão bibliográfica do problema é apresentada, a qual mostra as diferentes metodologias utilizadas para resolve-lo. Duas novas abordagens para o problema de redes de transporte multimodal são apresentadas: na primeira utilizamos a teoria dos conjuntos *fuzzy* para modelar os custos e as capacidades nos arcos e propomos um algoritmo de carregamento incremental de fluxo para resolver o problema de fluxo em redes multimodais; na segunda, utilizamos grafos coloridos para modelar os diferentes modos de transporte considerados e resolvemos o problema de caminho mínimo em redes multimodais.

PALAVRAS CHAVE. Redes de Transporte Multimodal, Conjuntos *Fuzzy*, Grafos Coloridos.

Tópicos: L&T - Logística e Transportes , TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos.

ABSTRACT

In this work, we study the multimodal transport network problem. This problem has been studied by several researchers, who are looking for solutions to the growing problems related to transport systems, such as: traffic jams, pollution, delays, among others. A brief bibliographic review of the problem is presented, which shows the different methodologies used to solve it. Two new approaches to the multimodal transport network problem are presented: in the first we use the fuzzy sets theory to model costs and capacities in the arcs and propose an incremental flow loading algorithm to solve the problem of flow in multimodal networks; in the second, we used colored graphs to model the different transport modes considered and solved the minimum path problem in multimodal networks.

KEYWORDS. Multimodal Transport Network. Fuzzy Sets. Colored Graphs.

Paper topics: Logistics and transportation. Theory and algorithms in graphs.

1. Introdução

Um dos fatores que afetam a qualidade de vida em uma área metropolitana é o sistema de transporte local. Redes de transporte urbanas são cada vez mais caracterizadas por congestionamentos e seus impactos correspondentes na acessibilidade individual, na poluição do ar e no desenvolvimento de atividades econômicas urbanas [Lozano, 2001]. Um fato que ocorre na maioria das cidades é que o local de trabalho das pessoas, muitas vezes, é longe da casa, o que faz com que utilizem mais de um meio de transporte para se deslocar de sua residência até o local de trabalho.

Redes de transporte são consideradas multimodais quando contêm vários modos de transporte, tais como: ônibus, metrô, trem, dentre outros. Dessa forma, os usuários podem utilizar vários modos de transporte em uma viagem e geralmente não estão dispostos a trocar muitas vezes de meio de transporte.

Na literatura, encontramos vários trabalhos que lidam com o problema de redes de transporte multimodal e com problemas correlatos, na tentativa de encontrar soluções para os usuários e para os administradores das redes de transporte, visto que atualmente, a crescente frota de veículos particulares e passageiros, aliada às condições não muito boas dos transportes públicos de um modo geral, tornam o fluxo de passageiros e veículos cada vez mais caótico. Com isso, tratar do problema de redes de transporte multimodal, monomodal e problemas correlatos é cada vez mais importante e necessário para buscar soluções, melhorar o planejamento e permitir uma viagem mais tranquila tanto para os usuários de transportes públicos bem como de veículos particulares.

Os métodos utilizados na busca de soluções do problema de redes de transporte multimodal são variados e vão desde os métodos clássicos de caminhos mínimos, otimização até os métodos mais recentes como os algoritmos genéticos, redes neurais artificiais, metaheurísticas e métodos *fuzzy*.

Diante disso, o principal objetivo deste trabalho é apresentar as abordagens usadas para resolver o problema de transporte multimodal encontradas em vários trabalhos existentes na literatura bem como duas novas abordagens para tal problema. Claramente, é impossível cobrir todos os trabalhos que lidam com este problema, portanto selecionamos alguns trabalhos que usam diferentes metodologias, como: métodos clássicos, métodos heurísticos e métodos *fuzzy*.

Após analisar as diferentes abordagens para o problema de redes de transporte multimodal encontradas na literatura, suas vantagens e desvantagens, propomos duas abordagens para tal problema: na primeira lidamos com o problema de redes de transporte multimodal considerando incertezas nos custos e nas capacidades dos arcos, isto é, os custos e as capacidades dos arcos são números *fuzzy*, e resolvemos o problema de fluxo em redes multimodais. Já na segunda abordagem, utilizamos grafos coloridos, onde cada modo de transporte é representado por uma cor e resolvemos o problema de caminho mínimo em redes multimodais.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos uma breve revisão bibliográfica; na Seção 3 apresentamos a formulação matemática do problema para as duas abordagens propostas; na Seção 4 apresentamos os algoritmos propostos; na Seção 5 apresentamos testes computacionais para ambos os algoritmos, e por fim, na Seção 6 apresentamos as considerações finais.

2. Revisão bibliográfica

O problema de redes de transporte multimodal tem sido estudado por vários autores que propõem diferentes abordagens, geralmente baseadas no conceito de teoria de grafos: grafos hierárquicos [Bieli, 2006], [Xin-Bo, 2009], hipergrafos [Lozano, 2002], dentre outros.

Abordagens utilizando métodos clássicos são muito utilizadas na solução de problemas de redes de transporte, como por exemplo, variantes de algoritmos clássicos, como o algoritmo de Dijkstra [Dijkstra, 1959], algoritmo de Floyd [Ahuja & Magnanti, 1993], algoritmos de k-caminhos mínimos [Ahuja & Magnanti, 1993], dentre outros.

[Modesti & Sciomachen, 1998] apresentam uma abordagem baseada no problema de caminho mínimo clássico para encontrar caminhos mínimos multiobjetivo em redes de transporte multimodal com objetivo de minimizar o custo total de viagem e o desconforto dos usuários associados com os caminhos utilizados.

Alguns autores [Bieli, 2006], [Lozano, 2001] focam na minimização do custo total de viagem levando em conta a sequência dos modos de transporte usados, de forma que o conjunto solução apresenta os chamados caminhos viáveis. Um caminho é viável se sua sequência de modos é factível com respeito a um conjunto de restrições. [Lozano & Storchi, 2002] extendem seu algoritmo para obter hipercaminhos viáveis.

No trabalho de [Lillo & Schmidt, 2010] sistemas de transporte multimodais reais são analisados experimentalmente. Redes rodo-ferroviárias reais da Dinamarca, Hungria, Espanha, Noruega e Nova Zelândia são construídas baseadas em um conjunto de mapas digitalizados obtidos a partir de várias bibliotecas do GIS (sistema de informações geográficas). Essas redes são modeladas através de grafos coloridos para serem usadas como entrada principal por um algoritmo para redes multimodais que calcula um conjunto de caminhos ótimos baseado no algoritmo de Dijkstra. A cardinalidade do conjunto resultante é analisada e conclui-se que a conectividade dos vértices e a forma da rede afetam consideravelmente o número total de caminhos ótimos.

A utilização do sistema de informações geográficas (GIS) é frequentemente encontrada em trabalhos que buscam soluções para o problema de caminho mínimo em redes de transporte [Bieli, 2006], [Miller, 1995], [Mouncif, 2006].

O trabalho de [Lam & Srikanthan, 2002] descreve uma técnica de clusterização que melhora o desempenho da computação convencional de k-caminhos mínimos em redes de transporte multimodal, através da transformação da rede em uma representação acíclica, onde os ciclos são identificados e clusterizados.

O trabalho de [Loureiro, 1997] apresenta um algoritmo para o problema de modelo de rede multimodal multiproduto. O algoritmo proposto consiste de um procedimento heurístico de decomposição baseado em técnicas de geração de colunas, o qual permite a solução de problemas de grande escala em tempo razoável.

[Ziliaskopoulos & Wardell, 2000] apresentam um algoritmo para o problema de caminho ótimo intermodal dependente de tempo para redes de transporte multimodal levando em conta atrasos nos modos e nos pontos de comutação. A convergência e a complexidade computacional do algoritmo são demonstradas.

Outras abordagens usam heurísticas, algoritmos evolutivos e redes neurais artificiais (RNAs) para tratar o problema de redes de transporte multimodal. [Abbaspour & Samadzadegan, 2010] propõem um algoritmo evolutivo onde os cromossomos tem tamanhos variáveis para resolver o problema de caminho mínimo multimodal dependente de tempo. [Qu & Chen, 2008] usam um método híbrido de tomada de decisão multicritério combinando processo hierárquico analítico *fuzzy* (AHP) e redes neurais artificiais. Esta abordagem é usada para encontrar o melhor caminho de determinada origem a determinado destino.

[Heid et al, 2010] apresentam uma abordagem híbrida para resolver o problema de transporte multimodal dependente de tempo. A abordagem proposta é baseado no algoritmo de Dijkstra e Otimização por colônia de formigas.

[Yu & Lu, 2011] propõem um algoritmo genético para resolver o problema de planejamento de rotas multimodais. Um método de avaliação multicritério usando um vetor p-dimensional para representar múltiplos critérios é adotado na função *fitness* para seleção de soluções ótimas.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* também tem sido utilizada na modelagem e solução de problemas de redes de transporte multimodal. [Golnarkar et al, 2010] propõem uma solução para o problema de caminho ótimo em redes de transporte multimodal no qual os custos dos arcos são números discretos *fuzzy*. O algoritmo proposto é baseado no algoritmo clássico de k-caminhos mínimos *fuzzy*.

[Ramazani et al, 2011] apresentam um algoritmo para o problema de atribuição de tráfego o qual assumem que a percepção do motorista em relação ao tempo de viagem afeta a escolha de rotas. A teoria dos conjuntos *fuzzy* é usada para definir o tempo de viagem "percebido" pelos usuários. Um equilíbrio *fuzzy* é sugerido para predição de fluxo em redes. Também, um algoritmo de atribuição de tráfego incremental *fuzzy* (FITA) é desenvolvido. Em um outro trabalho de [Ramazani et al, 2010], é proposto um método para resolver o problema de caminho mínimo em processos de escolha de rotas quando cada tempo de viagem nos arcos é um número *fuzzy*, chamado tempo de viagem percebido (PTT). O algoritmo resolve o problema de caminho mínimo *fuzzy* (FSPA) para motoristas na presença de incerteza sobre o tempo de viagem durante a rota. Para redes congestionadas, o método é capaz de encontrar os caminhos mínimos em termos do tempo de viagem percebido e grau de saturação (congestionamento) ao longo das rotas.

No trabalho de [Ghatee & Hashemi, 2008], o problema de fluxo de custo mínimo *fuzzy* (PFCM) é estudado. As incertezas podem estar na oferta ou demanda dos nós e também no custo ou na capacidade dos arcos da rede. No caso da oferta/demanda essas incertezas podem surgir devido a dados estatísticos incompletos ou simulações. Os autores apresentam três modelos: PFCM com custos *fuzzy*, PFCM com oferta/demanda *fuzzy* e uma combinação dos dois casos. Para o último modelo, os autores apresentam um método exato e métodos heurísticos. Por fim, é feita uma aplicação dos modelos desenvolvidos no problema de planejamento de redes de ônibus.

O trabalho de [Brito et al, 2010] lida com o problema de roteamento de veículos onde o tempo de viagem é *fuzzy*. O problema de roteamento de veículos com custos *fuzzy* na função objetivo e o problema de roteamento de veículos com janela de tempo e restrições *fuzzy* são formulados. Algoritmos híbridos heurísticos para resolver estes problemas são apresentados e analisados.

No trabalho de [Pandian & Natarajan, 2010] um novo método chamado método da separação é proposto para encontrar uma solução ótima para o problema de transporte inteiro onde o custo de transporte, oferta e demanda são intervalos. Este método pode ser uma ferramenta importante para os tomadores de decisão quando estiverem lidando com vários tipos de problemas logísticos com parâmetros intervalares. Os autores extendem o método proposto para o caso em que o problema de transporte é *fuzzy*.

[Ammar & Youness, 2005] investigam soluções eficientes e estabilidade do problema de transporte multiobjetivo com coeficientes *fuzzy* $\tilde{c}_{ij}^r \in \tilde{c}^r$ e/ou oferta *fuzzy* $\tilde{a}_i$ e/ou demanda *fuzzy* $\tilde{b}_j$. O conceito de α-*fuzzy* eficiente foi introduzido nos quais a solução eficiente ordinária é extendida baseada no α-corte de números *fuzzy*. Uma condição necessária e suficiente para tal solução é estabelecida.

O trabalho de [Khanbaghi & Malhamé, 1994] utiliza controladores baseados em lógica *fuzzy* para reduzir os custos de energia do metrô de Montreal, Canadá. Dois controladores *fuzzy* são propostos.

[Tuzkaya & Önüt, 2008] apresentam um estudo de caso para examinar os diferentes modos de transporte de mercadorias por uma empresa prestadora de serviços da Turquia. Critérios qualitativos são frequentemente acompanhados de ambiguidade e imprecisão, que neste trabalho, são tratados usando redes de processo analítico *fuzzy* (ANP).

O trabalho de [Verga et al, 2013] apresenta uma proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal considerando os custos dos arcos *fuzzy*. Vale ressaltar, que o trabalho atual considera dois parâmetros incertos (custos e capacidade), além de apresentar também um algoritmo para o problema de caminho mínimo em redes multimodais.

Os trabalhos citados acima, em sua grande maioria, lidam com o problema de caminho mínimo clássico em redes de transporte usando diferentes abordagens para encontrá-lo. Alguns trabalhos, lidam com o problema de caminhos mínimos *fuzzy* e com a distribuição de fluxo na rede.

3. Formulação do Problema

Nesta seção apresentamos as duas formulações propostas para o problema de redes de transporte multimodal.

3.1. Formulação do problema considerando incertezas nos arcos e nas capacidades

Seja $G = (N, A)$ um grafo onde N é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos e seja M o conjunto dos modos de transporte considerados, isto é, $M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k\}$. Cada arco é representado por (i, j) onde $i,\ j \in N$. Aqui G é representado por:

$$G = G_{M_1} \cup G_{M_2} \cup \ldots \cup G_{M_k},$$

onde: $G_{M_1} = (N_{M_1}, A_{M_1})$, $G_{M_2} = (N_{M_2}, A_{M_2})$, $\ldots$, $G_{M_k} = (N_k, A_k)$.

A mudança entre um modo e outro é representada por arcos de transferência, que chamaremos de T. Dai temos que:

$$A = A_{M_1} \cup A_{M_2} \cup \ldots \cup A_{M_k} \cup T.$$

Vamos considerar que quando o usuário começa a viagem no modo M_1 ou M_2 ele não muda de modo (é o que acontece, em geral, aqui no Brasil). Sendo $M_1 =$ carro e $M_2 =$ moto.

Existem diferentes formas de descrever um problema de redes de transporte multimodal e nesse trabalho foi escolhido o modelo em que o custo nos arcos depende do fluxo nos mesmos. Assim, a formulação desse tipo de problema tem uma função objetivo não-linear. Visto que o tempo de viagem é incerto, podemos formular o problema de redes de transporte multimodal com custos *fuzzy* na função objetivo da seguinte forma:

$$\min \ \tilde{z} = \sum_{w \in W} \sum_{(i,j) \in A} \tilde{t}_{ij}(x_{ij}) x_{ij}^w$$

$$\text{s.a} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^w - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}^w = b_i^w, \forall i \in N, \ \ \forall w \in W \\ \displaystyle\sum_{w \in W} x_{ij}^w \tilde{\leq} \tilde{u}_{ij}, \ \ \forall (i,j) \in A, \\ \displaystyle x_{ij} = \sum_{w \in W} x_{ij}^w \\ x_{ij}^w \geq 0, \ \ \forall (i,j) \in A, \ \ w \in W, \end{cases} \tag{1}$$

onde: W é o conjunto de todos os pares origem-destino; w é um par origem-destino (O-D); x_{ij}^w é o fluxo de passageiros no arco (i, j) para o par w; b_i^w é a oferta ou demanda do par w; $\tilde{t}_{ij}(x_{ij})$ é o tempo de viagem *fuzzy* para percorrer o arco (i, j) dependente do fluxo (x_{ij}) no arco; o símbolo $\tilde{\leq}$ representa a relação de ordem *fuzzy*; $\tilde{u}_{ij}$ é a capacidade *fuzzy* do arco (i, j).

Sem perda de generalidade, os custos (tempos de viagem) são números triangulares *fuzzy*, escritos na forma: (m, α, β) onde m é o valor modal, α é o espalhamento à esquerda e β é o espalhamento à direita. Os valores $(m - \alpha)$ e $(m + \beta)$ são chamados de limitante inferior e superior, respectivamente. As capacidades são números trapezoidais *fuzzy* escritos na forma $(m_1 - \alpha, m_1, m_2, m_2 + \beta)$ onde $\alpha = m_1 = 0$. Logo a capacidade é escrita da seguinte forma: $(0, m_1, m_2, \overline{\alpha})$, onde $\overline{\alpha} = m_2 + \beta$.

Para modelar o tempo de viagem em cada modo, utilizamos a forma *fuzzy* da função custo de viagem B.P.R. (*Bureau of Public Roads*) que foi proposta em 1964 pelo *Bureau of Public Roads*. A forma geral dessa função, considerando o parâmetro t_0 como sendo *fuzzy* é:

$$\tilde{t}_{ij}(x_{ij}) = \tilde{t}_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x_{ij}}{m_{ij}} \right)^{\lambda} \right] . \tag{2}$$

onde: $\tilde{t}_{ij}$ é o tempo de viagem *fuzzy* no arco (i, j); $\tilde{t}_0$ é o tempo de viagem *fuzzy* com fluxo livre; m_{ij} é o valor modal da capacidade do arco (i, j); x_{ij} é o fluxo no arco (i, j); ρ e λ são os parâmetros do modelo, que usualmente são $\rho = 0, 15$ e $\lambda = 4$.

3.2. Formulação do problema de caminho mínimo em redes multimodais

Um problema bem conhecido em teoria de grafos envolvendo cores é o problema de coloração em grafos. Este problema lida com a atribuição de cores nos elementos de um grafo de acordo com determinadas restrições. Coloração em nós é uma variante deste problema, neste caso o objetivo é colorir os nós de um grafo usando o menor número de cores tal que dois nós adjacentes tenham cores diferentes. Analogamente, o problema de coloração em arcos trata da atribuição de cores nos arcos de um grafo usando o menor número de cores tal que dois arcos consecutivos tenham cores diferentes.

A coloração em grafos utilizada neste trabalho é significantemente diferente dos tipos de coloração citados acima. A coloração nos arcos não está relacionada com a atribuição de cores aos elementos do grafo de acordo com determinadas restrições, mas neste caso as cores representam os diferentes modos de transporte em uma rede e o objetivo é encontrar uma estrutura ótima da rede através de caminhos mínimos.

Na literatura, encontramos um trabalho [Viedma, 2011] que trata o problema de redes de transporte multimodal usando coloração em grafos e baseia-se no algoritmo clássico de [Dijkstra, 1959].

Seja $G = (N, A, L)$ um multigrafo direcionado e colorido, consistindo de um conjunto de nós (N), um conjunto de cores (ou rótulos) L e um conjunto de arcos rotulados (i, j, l) os quais são triplas em $N \times N \times L$, com $i,\ j \in N$, $l \in L$. Cada cor (rótulo), $l \in L$, representa um modo de transporte, dessa forma (i, j, l) representa o arco ligando o nó i ao nó j com modo de transporte l. Além das cores (rótulos), cada arco tem um custo, c_{ijl} representa o custo do arco (i, j) usando o modo l.

O problema de caminho mínimo em redes de transporte multimodal pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{(i,j,l)\in A} c_{ijl}x_{ijl} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j:(i,j,l)\in A} x_{ijl} - \sum_{j:(j,i,l)\in A} x_{jil} = \begin{cases} 1, & i = o \\ 0, & i \neq o,\, d \\ -1, & i = d \end{cases} \\ & x_{ijl} = \{0, 1\}, \ \ \forall\, (i, j, l) \in A, \ \ \forall\, l \in L, \end{aligned} \tag{3}$$

onde: o: nó origem; d: nó destino e x_{ijl}: variável de decisão.

4. Algoritmos propostos

Nesta seção, apresentamos os algoritmos propostos. Na Subseção 4.1, apresentamos um algoritmo para o problema de fluxo em redes multimodais, referente à formulação apresentada na Subseção 3.1. Na Subseção 4.2, apresentamos um algoritmo para encontrar caminhos mínimos em redes multimodais, referente à formulação apresentada na Subseção 3.2.

4.1. Algoritmo para o problema de fluxo em redes multimodais

O algoritmo proposto é um algoritmo de carregamento incremental de fluxo. Tal algoritmo foi escolhido por sua simplicidade e eficiência e é uma proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal com incertezas nos custos e na capacidade dos arcos. A seguir, temos os passos do algoritmo, bem como uma explicação detalhada do mesmo.

- Passo 1 (Inicialização): Determine Ni (número de incrementos). Seja n o número de iterações, então $n = 1$.
- Passo 2: Encontrar os caminhos mínimos não-dominados para cada par de nós origem-destino de todos os modos de transporte considerados;

- Passo 3: Ordenar todos os caminhos p_k:

  μ_{cam} = *Poss*$\{p_k$ ser o melhor caminho$\}$ = $\min\{\mu_{custo}, \mu_{capac}\}$,
  onde μ_{custo} =*Poss*$\{p_k$ ser mínimo$\}$
  e $\mu_{capac} = \min_{(i,j)\in p_k}\{\mu_{capac}(i,j)\}$ = *Poss*$\{$fluxo passar no arco (i,j) através de $p_k\}$.

- Passo 4: Envio de fluxo incrementalmente:

  1. Seja Ni o número de incrementos e b o fluxo a transitar pela rede. Enviar fluxo para o primeiro caminho ordenado incrementalmente $\left(\frac{b}{Ni}\right)$, respeitando a capacidade de cada arco do caminho;
  2. Atualizar os custos nos arcos através da função $\tilde{t}_{ij}(x_{ij}) = \tilde{t}_0\left[1 + \rho\left(\frac{x_{ij}}{m_{ij}}\right)^{\lambda}\right]$.

- Passo 5: Critério de parada.

  1. Se $n \leq Ni$ e existir fluxo a transitar ir para o Passo 2 e $n = n + 1$.
  2. Senão $\Rightarrow$ fim.

No Passo 3, utilizamos a relação de [Okada & Soper, 2000] para descartar os caminhos dominados e a medida de possibilidade de [Dubois & Prade, 1980], para calcular a possibilidade de cada caminho ter o custo menor que os demais.

4.2. Algoritmo para o problema de caminho mínimo em redes multimodais

O algoritmo proposto é uma generalização do algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman [Bellman, 1958] para grafos coloridos cuja aplicação será feita em redes de transporte multimodal. Tal algoritmo é iterativo, possuindo como critério de parada o número de iterações ou a não alteração dos custos encontrados na iteração anterior com relação à iteração atual.

Na generalização feita, cada nó terá um conjunto de etiquetas $etq(j, l_j, ant, rot, cust)$, onde: j: nó em análise; l_j: número da etiqueta do nó j; ant: guarda o nó i antecedente do nó j pelo caminho considerado; rot: guarda o modo (ou cor) utilizado para chegar de i até j; $cust$: guarda o custo acumulado da origem até o nó (incluindo o custo de mudança de modo, quando houver).

As notações utilizadas no algoritmo são: N: número de nós do grafo; Γ_j^{-1}: conjunto dos nós predecessores do nó j; it: contador de iterações; d_{ijl}: custo do arco (i,j) pelo modo l; $Nmodos$: número de modos de transporte considerados; ϵ: custo de mudança de modo, que, neste caso é um número fixo.

A seguir temos os passos do algoritmo.

- Passo 1: Inicialização:

  $ant = [\ ]$; $rot = [\ ]$; $cust^0(origem) = 0$; $cust^0(j) = \infty$ se $j \neq$ origem; $it \leftarrow 1$.

- Passo 2:

  Para todo $j \in N$, $i \in \Gamma^{-1}(j)$, $l_j, l \in Nmodos$ faça:
  Se $rot(j) \neq rot(i)$
  $cust^{it}(j) = cust^{it-1}(j) + d_{ijl} + \epsilon$
  Senão
  $cust^{it}(j) = cust^{it-1}(j) + d_{ijl}$
  $ant(j) = i$
  $rot(j) = l$

- Passo 3: Critério de Parada:

1. Se $it = it + 1 \geq$ número de arcos, ou se $cust^{it} = cust^{it-1}, \quad \forall j \in N$, vá para o Passo 4;
2. Senão, vá para o Passo 2.

- Passo 4: Recompor os caminhos a partir das etiquetas construídas no Passo 2.

Neste algoritmo é necessário que o número de etiquetas por nó seja limitado, pois o mesmo tende a aumentar rapidamente conforme aumenta-se o número de nós, o número de arcos e o número de modos de transporte, tornando caro o cálculo de cada informação. Uma solução para este problema é limitar o número de etiquetas por nó através do número de modos.

5. Testes computacionais

Nesta seção, apresentamos um exemplo para cada um dos algoritmos apresentados na seção anterior. Ambos os algoritmos foram implementado em MATLAB® 7.0.1 e executados em uma plataforma Intel® Core i3 e 6 Gb de RAM.

5.1. Exemplo 1

Este exemplo ilustra a modelagem proposta na Subseção 3.1 e o algoritmo apresentado na Subseção 4.1. Neste caso, consideramos dois modos de transporte: ônibus e metrô. Os dados da rede Sioux Falls foram obtidos do site http://www.bgu.ac.il/ bargera/tntp/, que é um site que contêm instâncias de problemas de redes de transportes.

A demanda para origem O e destino D é 5500.

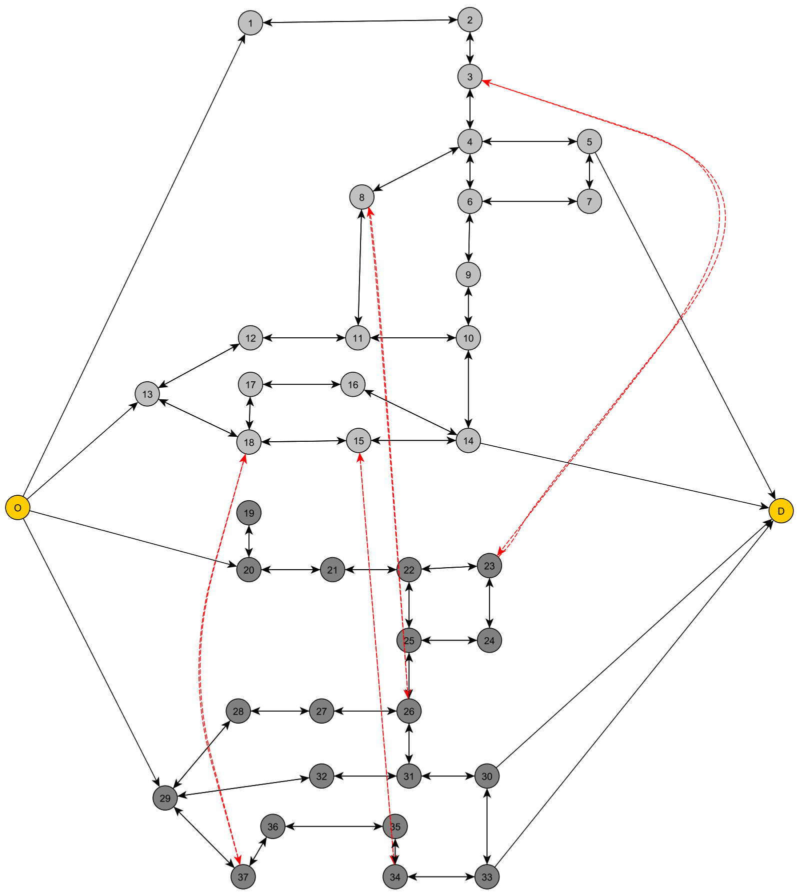

Figura 1: Rede Sioux Falls

O envio de fluxo para $N_i = 2$ ocorreu segundo a Tabela 1. O tempo de processamento foi de $0,24$ segundos. O custo final total obtido foi de $10^4 \cdot (8,9088; 1,6696; 1,6696)$.

Tabela 1: Envio de fluxo para $Ni = 2$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O→ 13 → 18→ 15 → 14 → D	1	2750	$(16; 3; 3)$	$(16,2410; 3,0454; 3,0454)$
O→ 29 → 32 → 31→ 30 → D	1	2750	$(16; 3; 3)$	$(16,1546; 3,0260; 3,0260)$

Quanto à μ_{cam}, em ambos os caminhos que compõem a solução final, são referentes à μ_{custo} e μ_{capac}, pois $\mu_{cam} = 1$.

O envio de fluxo para $Ni = 1000$ ocorreu segundo a Tabela 2. O tempo de processamento foi de $3,4980$ segundos. O custo final total obtido foi de $10^4 \cdot (8,8103; 2,1533; 2,1533)$.

Tabela 2: Envio de fluxo para $Ni = 1000$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O→ 13 → 18→ 15 → 34 → 33 →D	1	132	$(16; 4; 4)$	$(16,0179; 4,0045; 4,0045)$
O→ 29 → 37 → 36→ 35 → 34 → 33 →D	1	1870	$(16; 5; 5)$	$(16,0189; 5,0063; 5,0063)$
O→ 13 → 18→ 17 → 16 → 14 →D	0,9999	1155	$(16; 4; 4)$	$(16,0187; 4,0048; 4,0048)$
O→ 29 → 32 → 31→ 30 → D	0,9969	1623	$(16; 3; 3)$	$(16,0187; 3,0032; 3,0032)$
O→ 13 → 18→ 15 → 14 → D	0,4281	720	$(16; 3; 3)$	$(16,0187; 3,0046; 3,0046)$

Neste caso, μ_{cam} de cada caminho que compõe a solução final são referentes à μ_{custo} e μ_{capac} nos dois primeiros caminhos e à μ_{custo} nos demais caminhos.

O envio de fluxo para $Ni = 2750$ ocorreu segundo a Tabela 3. O tempo de processamento foi de 5 segundos. O custo final total obtido foi de $10^4 \cdot (8,8103; 2,1552; 2,1552)$.

Tabela 3: Envio de fluxo para $Ni = 2750$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O→ 13 → 18→ 15 → 14 → D	1	718	$(16; 3; 3)$	$(16,0187; 3,0046; 3,0046)$
O→ 13 → 18→ 17 → 16 → 14 →D	1	1156	$(16; 4; 4)$	$(16,0187; 4,0048; 4,0048)$
O→ 29 → 37 → 36→ 35 → 34 → 33 →D	1	1868	$(16; 5; 5)$	$(16,0188; 5,0063; 5,0063)$
O→ 29 → 32 → 31→ 30 → D	0,9566	1624	$(16; 3; 3)$	$(16,0188; 3,0032; 3,0032)$
O→ 13 → 18→ 15 → 34 → 33 →D	0,4803	134	$(16; 4; 4)$	$(16,0187; 4,0048; 4,0048)$

Assim como para $Ni = 1000$, neste caso, μ_{cam} de cada caminho que compõe a solução final são referentes a μ_{custo} e μ_{capac} nos três primeiros caminhos e μ_{custo} nos demais caminhos.

5.2. Exemplo 2

Este exemplo ilustra a modelagem proposta na Subseção 3.2 e o algoritmo apresentado na Subseção 4.2.

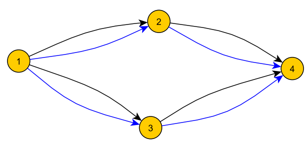

Figura 2: Rede Ilustrativa

Aqui consideramos dois modos de transporte entre cada arco. Esta é uma rede pequena, apenas para fins ilustrativos, contendo 4 nós e 8 arcos.

Os arcos, os custos e os modos de transporte estão definidos na Tabela 4. Os arcos de cor preta são referentes ao modo 1 e os arcos de cor azul são referentes ao modo 2.

Tabela 4: Dados da Rede Multimodal da Figura 2

Arco	Origem $\rightarrow$ Destino	Custos	Modos
1	$1 \rightarrow 2$	4	1
2	$1 \rightarrow 2$	5	2
3	$1 \rightarrow 3$	3	1
4	$1 \rightarrow 3$	5	2
5	$2 \rightarrow 4$	3	1
6	$2 \rightarrow 4$	2	2
7	$3 \rightarrow 4$	4	1
8	$3 \rightarrow 4$	4	2

Fizemos testes para diferentes valores do custo de mudança de modo, conforme descrito abaixo. [1]

- Considerando o custo de mudança de modo igual a 0, o algoritmo 2 encontrou o caminho mínimo $1 \longrightarrow^1 2 \longrightarrow^2 4$ com custo 6.
- Considerando o custo de mudança de modo igual a $0,5$, o caminho mínimo encontrado é $1 \longrightarrow^1 2 \longrightarrow^2 4$ com custo $6,5$.
- Considerando o custo de mudança de modo igual a 1, o caminho mínimo encontrado é $1 \longrightarrow^1 2 \longrightarrow^1 4$ com custo 7. Neste caso, há outros caminhos com o mesmo custo: $1 \longrightarrow^1 3 \longrightarrow^1 4$ e $1 \longrightarrow^2 2 \longrightarrow^2 4$. A escolha do caminho, neste caso, é feita através da ordem que os mesmos aparecem na execução do algoritmo, ressaltando que neste exemplo, consideramos duas etiquetas por nó (número de modos considerados na rede).

À medida que mudamos o valor do custo de mudança de modo, os caminhos mínimos podem mudar, mas a partir de um determinado valor para o custo de mudança de modo, o caminho mínimo encontrado será sempre o mesmo, neste caso, para valores maiores ou iguais a 1. Observamos ainda que, neste caso, ao examinar o nó 4, temos oito caminhos chegando em tal nó, o que torna necessário limitar o número de etiquetas por nó, como já foi dito anteriormente.

6. Considerações finais

Problemas de redes de transporte têm sido extensamente estudados e aplicados nas soluções de problemas reais. Uma vez que a complexidade de tais problemas consome uma grande quantidade de recursos computacionais e, na maioria dos casos, os mesmos não podem ser resolvidos usando ferramentas determinísticas que forneçam resultados exatos, a busca por outras formas de resolução é de suma importância.

Neste trabalho, apresentamos duas novas abordagens para o problema de redes de transporte multimodal. A primeira, considera incertezas nos custos e nas capacidades dos arcos e trata do problema de fluxo em redes de transporte multimodal, onde primeiramente encontramos os caminhos mínimos não-dominados e posteriormente distribuímos o fluxo pela rede de forma incremental, através dos caminhos encontrados. Através do carregamento incremental de fluxo, conseguimos distribuir o fluxo pela rede de forma equilibrada, sem congestionar os caminhos mínimos utilizados.

[1] O número em cima da seta em cada arco indica o modo de transporte utilizado para percorrê-lo.

Outro aspecto importante deste algoritmo é o fato do custo nos arcos depender do fluxo nos mesmos, o que torna o algoritmo mais aderente à realidade, da mesma forma em que aumenta a complexidade do mesmo, pois os caminhos mínimos não-dominados são calculados em cada iteração do algoritmo. Por fim, vale lembrar, que este algoritmo de carregamento incremental de fluxo não se restringe à problemas de redes de transporte multimodal, podendo ser aplicado em outros tipos de problemas que podem ser modelados na forma de rede.

Na segunda abordagem, lidamos com o problema de caminho mínimo em redes multimodais utilizando grafos coloridos. Ao considerar diferentes valores para o custo de mudança de modo, diferentes soluções foram encontradas, fato que ocorre em problemas reais, já que os usuários, em geral, não estão dispostos a realizar mudança de modo, mas fazem tal mudança quando não tem outra opção. O algoritmo detecta as mudanças de modo através da coloração dos arcos e um custo referente a esta mudança é acrescentado no caminho. O uso da coloração em grafos, neste caso, torna o algoritmo mais inteligente e aderente à realidade, já que diferentes modos de transporte, como por exemplo, veículos particulares, ônibus e vans, compartilham a mesma rede e a coloração permite diferenciá-los. Vale lembrar que este método é inovador, pois na literatura encontramos um trabalho que propõe um algoritmo semelhante, porém baseado no algoritmo clássico de Dijkstra.

Referências

Abbaspour, R. A., Samadzadegan, F. (2010), An evolutionary solution for multimodal shortest path problem in metropolises. Computer Science and Information Systems, 7(4), 1-24.

Ahuja, T. L., Magnanti, R. K. (1993), Network Flows. Prentice Hall, Philadelphia, PA, USA.

Ammar, E. E., Youness, E. A. (2005), Study on multiobjective transportation problem with fuzzy numbers. Applied Mathematics and Computation, 166, 241-253.

Bellman, R. E. (1958), On a routing problem. Quarterly Applied Mathematics, 16, 87-90.

Brito, J., Martínez, F. J., Moreno, J. A., Verdegay, J. L. (2010), Fuzzy approach for vehicle routing problems with fuzzy travel time. International Conference Fuzzy Systems, Barcelona, Espanha.

Bieli, M., Boumakoul, A., Mouncif, H. (2006), Object modeling and path computation for multimodal travel systems, European Journal Operational Research, 175, 1705-1730.

Bureau of Public Roads, Traffic assignment manual, Technical Report, U.S. Department of Commerce, 1964.

Dijkstra, E. W. (1959), A note on two problems in conexion with graphs. Numerische Mathematik, 1, 269-271.

Dubois, D., Prade, H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, INC, New York, 1980.

Ghatee, M., Hashemi, S. M. (2008), Generalized minimal cost flow problem in fuzzy nature: An application in bus network planning problem. Applied Mathematical Modelling, 32, 2490-2508.

Heid, A., Galvez-Fernandez, C., Habbas, Z., Khadraoui, D. (2010), Solving time-dependent multimodal transport problems using a transfer graph model. Computer & Industrial Engineering, In Press.

Golnarkar, A., Alesheikh, A. A., Malek, M. R. (2010), Solving best path on multimodal transportation networks with fuzzy costs. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 7(3), 1-13.

Khanbaghi, M., Malhamé. R. P. (1994), Reducing Travel Energy Costs for a Subway Train via Fuzzy Logic Controls. *International Symposium on Intelligent Control*, Ohio, USA.

Lam, S. K., Srikanthan, T. (2002), Accelerating the K-shortest paths computation in multimodal transportation networks. *5th International Conference on Intelligent Transportation Systems*,Singapura.

Lillo, F., Schmidt. F. (2010). Optimal paths in real multimodal transportation Networks: An appraisal using GIS data from New Zealand and Europe. *Proceedings of the 45th Annual Conference of the Operations Research Society of New Zealand*, Nova Zelândia.

Loureiro, C. F. G. (1997). Geração de colunas na solução de problemas de desenhos de redes multimodais de transportes. *XVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, Porto Alegre-RS.

Lozano, A., Storchi, G. (2001), Shortest viable path algorithm in multimodal networks, Transportation Research, 35, 225-241.

Lozano, A., Storchi, G. (2002), Shortest viable hyperpath in multimodal networks, Transportation Research - Part B, 36, 853-874.

Miller, H. J., Storm, J. D., Bowen, M. (1995), GIS design for multimodal networks analysis em "GIS/LIS 95 Annual Conference and Exposition Proceedings of GIS/LIS", Nashville, EUA, 750–759.

Modesti, P., Sciomachen, A. (1998), A utility measure for finding multiobjective shortest paths in urban multimodal transportations networks, European Journal of Operational Research, 111, 495-508.

Mouncif, H., Boulmakoul, A., Chala, M. (2006), Integrating GIS-technology for modelling origin-destination trip in multimodal transportation networks, The International Arab Journal of Information Technology, 3, 256-263.

Mouncif, H., Rida, M., Boulmakoul, A. (2011), An eficient multimodal path computation integrated within location based service for transportation networks system (Multimodal path computation within LBS). Journal of Applied Sciences, 11(1), 1-15.

Okada, S., Soper, T. (2000), A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths. Fuzzy Sets and Systems, 109, 129-140.

Pandian, P., Natarajan. G. (2010), A New Method for Finding an Optimal Solution of Fully Interval Integer Transportation Problems. *Applied Mathematical Sciences*, 4(37), 1819-1830.

Qu, L., Chen, Y. (2008), A hybrid MCDM method for route selection of multimodal transportation network. Lecture Notes in Computer Science, 5263, 374-383.

Ramazani, H., Shafahi, Y., Seyedabrishami, S. E. (2010), A shortest path problem in an urban transportation network based on driver perceived travel time. Scientia Iranica A, 17(4), 285-296.

Ramazani, H., Shafahi, Y., Seyedabrishami, S. E. (2011), A fuzzy traffic assignment algorithm based on driver perceived travel time of network links. Scientia Iranica A, 18(2), 190-197.

Tuzkaya, U. R., Önüt, S. (2008), A fuzzy analytic network process based approach to transportation-mode selection between Turkey and Germany: A case study. *Information Sciences*, 178, 3133 - 3146.

Verga, J., Yamakami, A., Silva, R.C., Shirabayashi, W.V.I. (2013), Problema de redes de transporte multimodal: uma abordagem utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy. *Anais do XLV SBPO*, p. 3064-3075, Natal, SOBRAPO.

Viedma, F. E. L. (2011), Coloured-edge graph approach for the modelling of multimodal networks. Tese de Doutorado, Auckland University of Technology, 2011.

Xin-Bo, W., Gui-Jun, Z., Zhen, H., Hai-Feng, G., Li, Y. (2009), Modeling and implementing research of multimodal transportation network. The 1st International Conference on Information Science and Engineering, Nanjing, China, 2100-2103.

Yu, H., Lu, F. (2011), A Multimodal route planning approach with an improved genetic algorithm. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 38(2), 343-348.

Ziliaskopoulos, A., W. Wardell, W. (2000), An intermodal optimum path algorithm for multimodal networks with dynamic arc travel times and switching delays. *European Journal of Operational Research*, 125, 486-502.