



MC3 – Introdução a Otimização Estocástica

Prof. Silvio Hamacher, D.Sc. (hamacher@puc-rio.br)

Prof. Fabricio Oliveira, D.Sc. (fabricio.oliveira@puc-rio.br)

Departamento de Engenharia Industrial

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Conteúdo programado

1. Representação da incerteza
2. Gestão de risco
3. Aplicações e exemplos

Otimização estocástica

Modelo estocástico 2 estágios:

- Consiste da versão mais “**bem comportada**” de modelos estocásticos;
- Se adequa a uma **vasta gama** de problemas;
- Amplamente estudado e possuidor de diversas **propriedades desejáveis**.

Sejam:

- x – decisões de primeiro estágio → decisões tomadas antes da realização da incerteza, **de caráter definitivo**
- y – decisões de segundo estágio → decisões tomadas após realização da incerteza, **de caráter corretivo**
- ω – representa possibilidades distintas de “futuro”

Otimização estocástica

Assim, a formulação geral de problemas estocásticos de 2 estágios com recurso é dada por:

$$\min c^T x + \mathbb{E}_{\Omega} [Q(x, \omega)]$$

$$\text{s.a: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Onde:

$$Q(x, \omega) = \min \{ q(\omega)^T y \mid W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0 \}$$

Neste caso, ω representa **um possível desenrolar dos fatos**, o qual culminaria nos componentes q , W , h e T particulares daquela realização.

Otimização estocástica

Se pensarmos que estamos considerando **todo o espaço de incerteza simultaneamente**, podemos “plugar” os dois problemas em um único:

$$\min c^T x + \mathbb{E}_\Omega [q(\omega)^T y(\omega)]$$

$$\text{s.a } Ax \leq b$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$x, y(\omega) \geq 0$$

No caso do nosso exemplo:

- As possíveis ω realizações seriam, por exemplo, diferentes conjunturas possíveis (clima, economia, safra...) que implicariam em preços distintos;
- x seriam as decisões tomadas **antes de saber o preço**, enquanto $y(\omega)$ aquelas **depois de conhecido o preço decorrente de ω** .

Otimização estocástica

Se pensarmos que estamos considerando **todo o espaço de incerteza simultaneamente**, podemos “plugar” os dois problemas em um único:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \mathbb{E}_\Omega [q(\omega)^T y(\omega)] \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \\ & x, y(\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

Porque eu gosto mais dessa formulação:

- Deixa claro quem é decido **antes** (independente de ω) e quem é decido **depois** (dependente de ω);
- Evidencia que quanto mais acontecimentos possíveis, maior o problema (mais sobre isso adiante)
- Possui um nome: **Equivalente Determinístico**

Otimização estocástica

Uma consideração sobre o valor esperado da função de recurso:

$$\min c^T x + \mathbb{E}_\Omega [q(\omega)^T y(\omega)]$$

$$\text{s.a } Ax \leq b$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$x, y(\omega) \geq 0$$

Note que: $\mathbb{E}_\Omega [q(\omega)^T y(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} q(\omega)^T y(\omega) f_\Omega(\omega) d\omega$

Só é possível calcular caso haja “formulas fechadas” e para distribuições “amigáveis”;

- Vide Birge & Louveaux (1998), exemplos no Capítulo 1

Pode ser não-linear e sofrer de problemas de convexidade.

Otimização estocástica

Por essa razão, consideraremos **aproximações discretas**

$$\min c^T x + \mathbb{E}_\Omega [q(\omega)^T y(\omega)]$$

$$\text{s.a } Ax \leq b$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$x, y(\omega) \geq 0$$

$$\text{Onde: } \mathbb{E}_\Omega [q(\omega)^T y(\omega)] = \sum_{s=1}^S P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s)$$

Soma **finita**, **linear** e **convexa**;

Representa uma **aproximação** do fenômeno real, tão refinada quanto se queira, desde que esteja disposto a “pagar” por isso;

- Cada elemento da representação recebe o nome de **cenário**

Otimização estocástica

Nossa formulação final para o Equivalente Determinístico de um problema de dois estágios é dada por :

$$\min c^T x + \sum_{s=1}^S P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s)$$

$$\text{s.a } Ax \leq b$$

$$T(\xi^s)x + W(\xi^s)y = h(\xi^s), \quad \forall s = 1, \dots, S$$

$$x, y(\xi^s) \geq 0$$

Otimização estocástica

Nossa formulação final para o Equivalente Determinístico de um problema de dois estágios é dada por :

Primeiro estágio

$$\min c^T x + \sum_{s=1}^S P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s)$$

s.a. $Ax \leq b$

$$T(\xi^s)x + W(\xi^s)y = h(\xi^s) \quad \forall s = 1, \dots, S$$

$x \quad y(\xi^s) \geq 0$

Segundo estágio

Indicadores de qualidade

Tradicionalmente, modelos estocásticos possuem a reputação de serem **muito complicados de resolver computacionalmente**

Alternativas naturais:

- Resolver problemas determinísticos considerando a **média** dos parâmetros incertos;
- Resolver problemas determinísticos para cada cenário e depois **combinar** as soluções heurísticamente.

Felizmente, é possível (na maioria dos casos) medir de forma **precisa** o quanto de otimalidade está sendo perdida ao se desprezar a incerteza (**VSS**) e o quão longe estamos do “perfeito” (**EVPI**)

Indicadores de qualidade

Expected Value of Perfect Information (EVPI)

- Mede o valor máximo que o tomador de decisões **estaria disposto a pagar pela informação completa** (e precisa) sobre o que acontecerá no futuro.

Algumas definições que precisaremos:

- ξ representando os cenários possíveis para o parâmetro incerto;
- Para toda realização da incerteza, conseguimos uma solução x viável e, portanto, possível de ser avaliada

Sejam então:

- Solução **espere-e-veja** (wait-and-see): imagine que você pudesse esperar pela realização da incerteza antes de tomar uma decisão ótima x e obter o respectivo valor z . Assim, definimos WS como sendo:

$$WS = \mathbb{E}_{\xi} \left[\min_x z(x, \xi) \right] = \mathbb{E}_{\xi} [z(\bar{x}(\xi), \xi)]$$

Indicadores de qualidade

Expected Value of Perfect Information (EVPI)

- Mede o valor máximo que o tomador de decisões **estaria disposto a pagar pela informação completa** (e precisa) sobre o que acontecerá no futuro.

Algumas definições que precisaremos:

- ξ representando os cenários possíveis para o parâmetro incerto;
- Para toda realização da incerteza, conseguimos uma solução x viável e, portanto, possível de ser avaliada

Sejam então:

- Solução **aqui-e-agora** (here-and-now): consiste da solução do modelo estocástico, considerando todos os cenários simultaneamente. Chamando de RP tal valor, temos:

$$RP = \min_x \mathbb{E}_\xi [z(x, \xi)]$$

Indicadores de qualidade

Expected Value of Perfect Information (EVPI)

- Finalmente, temos que:

$$EVPI = |RP - WS|$$

Ex.: Problema do agroempresário

Valor Esperado da Solução Estocástica (Recourse Problem - RP): \$ 93,33

- Considera incerteza e flexibilidade

Valor solução espere-e-veja (WS): \$ 300,00

- Bola de Cristal!

$$EVPI = \$300 - \$93,33 = \$206,66$$

Indicadores de qualidade

Value of Stochastic Solution (VSS)

- Mede o **benefício obtido em se considerar a incerteza** para obtenção da solução, quando comparada ao que você teria feito sem levar em conta a incerteza;
- Compara o desempenho da decisão tomada considerando valores médios e aquela tomada levando em conta a incerteza;

Seja então:

- **Valor esperado da solução obtida usando o valor esperado (EEV):** para obter este valor, primeiro resolvemos o problema considerando o valor médio de ξ .

$$EV = \min_x z(x, \bar{\xi})$$

onde: $\bar{\xi} = \mathbb{E}_\xi [\xi]$

$\bar{x}(\bar{\xi})$ - solução ótima de EV

Indicadores de qualidade

Value of Stochastic Solution (VSS)

- Mede o **benefício obtido em se considerar a incerteza** para obtenção da solução, quando comparada ao que você teria feito sem levar em conta a incerteza;
- Compara o desempenho da decisão tomada considerando valores médios e aquela tomada levando em conta a incerteza;

Seja então:

- **Valor esperado da solução obtida usando o valor esperado (EEV):** e finalmente, fixamos essa solução para ser avaliada considerando a incerteza.

$$EEV = \mathbb{E}_{\xi} [z(\bar{x}(\bar{\xi}), \xi)]$$

Pense no EEV como uma medida de como $\bar{x}(\bar{\xi})$ se sai ao permitirmos que as decisões de segundo estágio sejam tomadas como função de $\bar{x}(\bar{\xi})$ e ξ

Indicadores de qualidade

Value of Stochastic Solution (VSS)

- Finalmente, temos que:

$$VSS = |EEV - RP|$$

Ex.: Problema do agroempresário

Valor Esperado Solução Determinística (EEV): \$ 33,33

- Otimização com valores médios

Valor Esperado da Solução Estocástica (Recourse Problem - RP): \$ 93,33

- Considera incerteza e flexibilidade

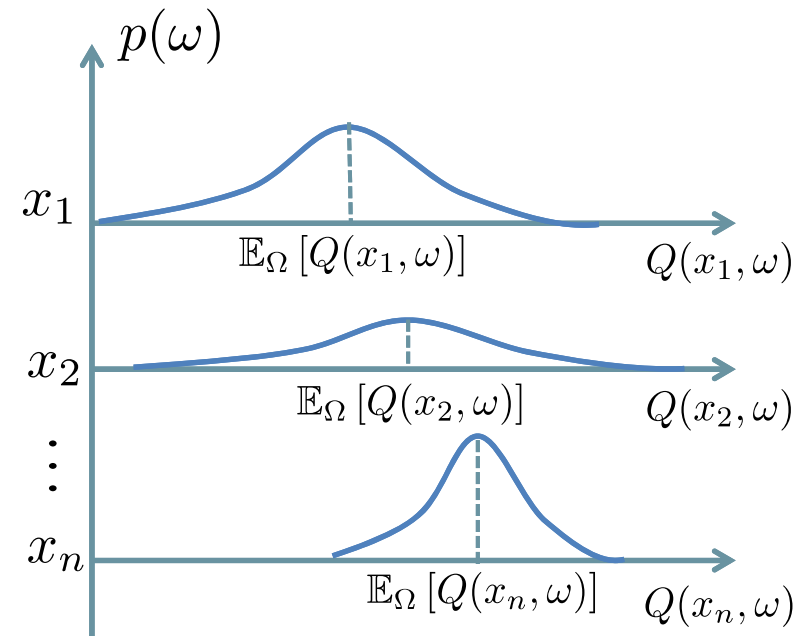
$$VSS = \$ 93,33 - \$ 33,33 = \$ 60$$

Rest. Probabilísticas

Otimização sob incerteza

Modelos de programação estocástica:

- Dados de entrada modelados como **processos estocásticos**;
- Valor da função objetivo é uma **variável aleatória**
 - Pode ser caracterizada por uma **distribuição de probabilidade**;



A função objetivo como variável aleatória:

- Precisamos de uma função que, de alguma forma, *caracterize a distribuição de dessa variável aleatória*:
 - Critério mais comum: **média**;

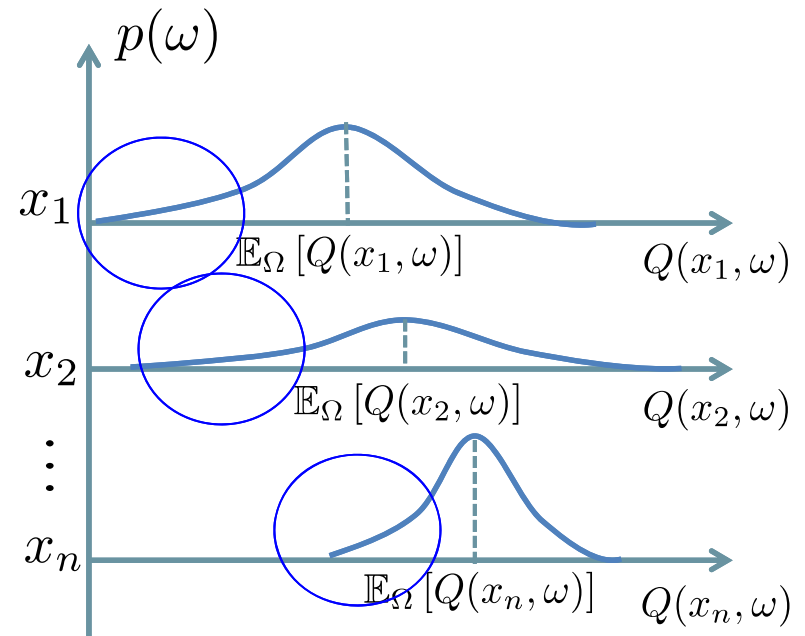
Otimização sob incerteza

Assim, um problema onde maximizamos o lucro resulta na maximização do **lucro esperado** deste problema;

Problema: demais parâmetros caracterizando a distribuição são **negligenciados**.

- Uma variável aleatória representando o lucro com um valor esperado aceitável para o tomador de decisão pode possuir embutida uma **probabilidade não-desprezível de lucros negativos (perdas)**

Como contornar tal dificuldade: **gestão de risco**



O valor esperado não é capaz de representar a exposição a resultados negativos (ou seja, ao risco)

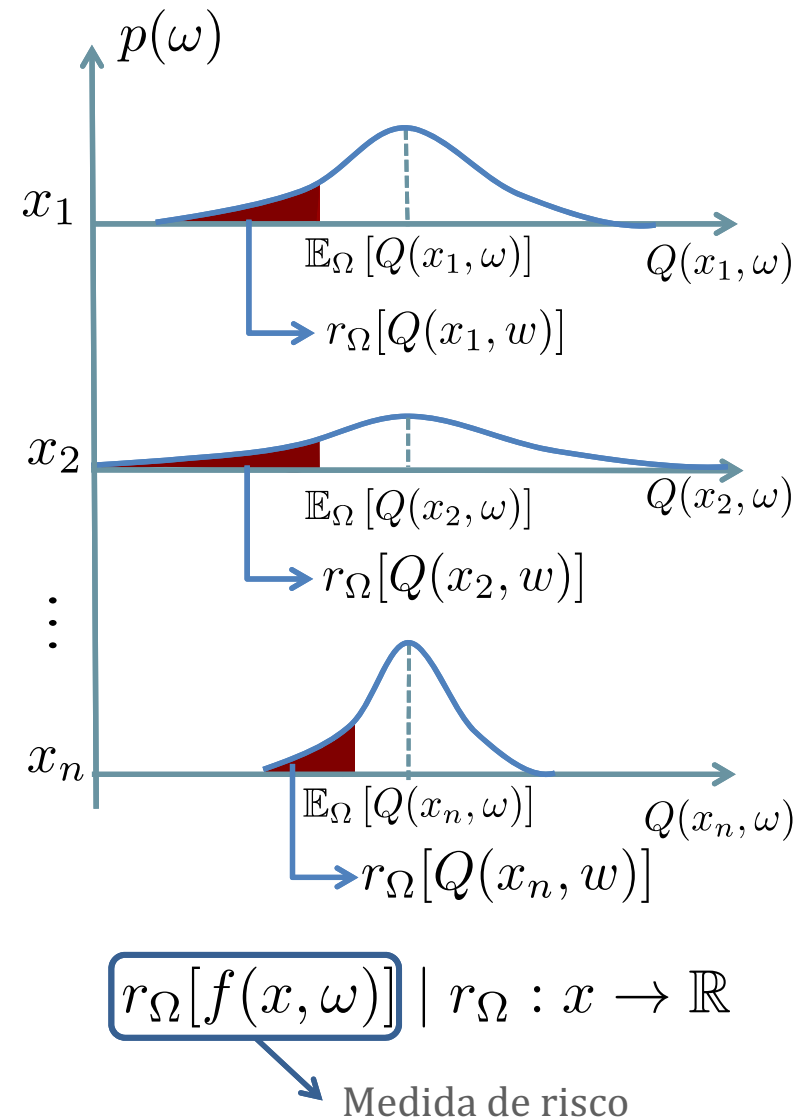
Gestão de risco

Primeiramente, precisamos definir a que **risco** estamos nos referindo:

- Queremos nos proteger do *risco de a distribuição dos lucros (maximização) possuir características não desejáveis*, como por exemplo, altas probabilidades de incorrer em custos negativos (perdas).

Como controla-lo em modelos de otimização:

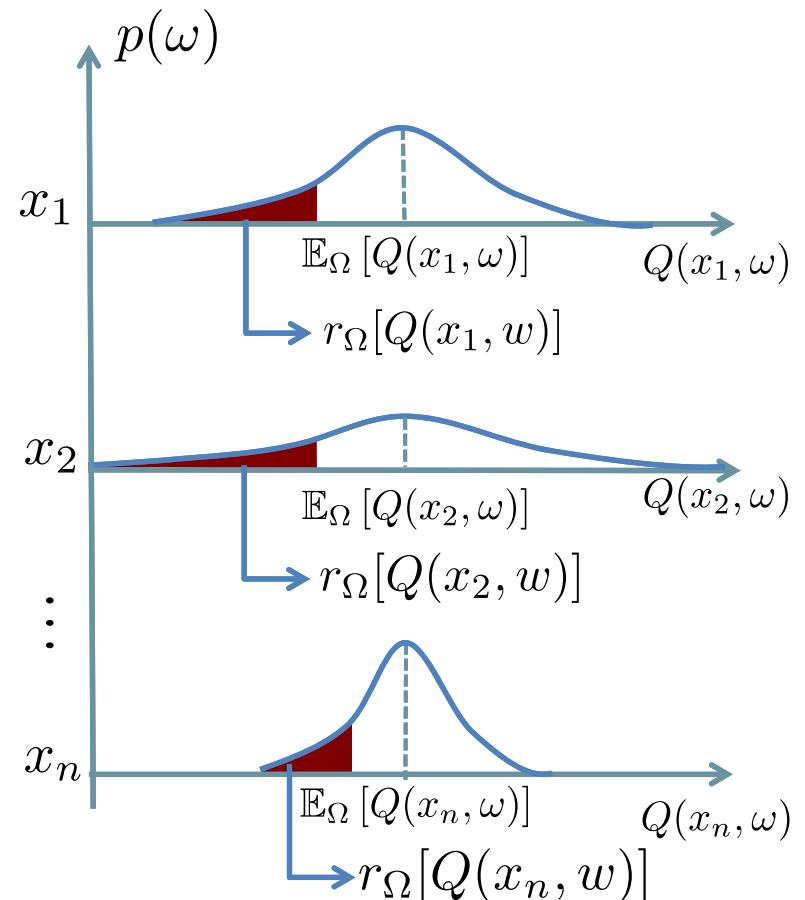
- **inserir** na formulação termos que são capazes de **medir** o risco associado a uma distribuição de probabilidade;
 - Toda solução gera um **perfil de risco**, ao qual é possível se associar uma **medida**
- Tal termo é comumente referido como **função de risco** ou **medida de risco**;



Gestão de risco

Vamos considerar todas as medidas de risco considerando problemas de **2 estágios** (por ser mais simples) onde a função objetivo consiste da **maximização** de um lucro esperado.

- Medidas de risco mais difundidas:
 1. Variância;
 2. Probabilidade de déficit (*shortfall probability*)
 3. Escassez esperada (*expected shortage*)
 4. Value-at-Risk (VaR)
 5. Conditional Value-at-Risk (CVaR)



$$r_\Omega [f(x, \omega)] \mid r_\Omega : x \rightarrow \mathbb{R}$$

Medida de risco

Gestão de risco

Definindo:

$$f(x, \omega) = c^T x + \max_{y(\omega)} \{q(\omega)^T y(\omega) \mid T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), y(\omega) \in Y\}$$

Podemos reescrever nosso problema de otimização de dois estágios como sendo:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mathbb{E}_\Omega[f(x, \omega)] \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Temos basicamente dois paradigmas para a consideração do risco na formulação do problema de otimização:

1. Considerar o risco na **função objetivo**, minimizando-o

$$\begin{aligned} \max_x \quad & (1 - \beta)\mathbb{E}_\Omega[f(x, \omega)] - \beta r_\Omega[f(x, \omega)] \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Gestão de risco

Definindo:

$$f(x, \omega) = c^T x + \max_{y(\omega)} \{q(\omega)^T y(\omega) \mid T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), y(\omega) \in Y\}$$

Podemos reescrever nosso problema de otimização de dois estágios como sendo:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mathbb{E}_\Omega[f(x, \omega)] \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Temos basicamente dois paradigmas para a consideração do risco na formulação do problema de otimização:

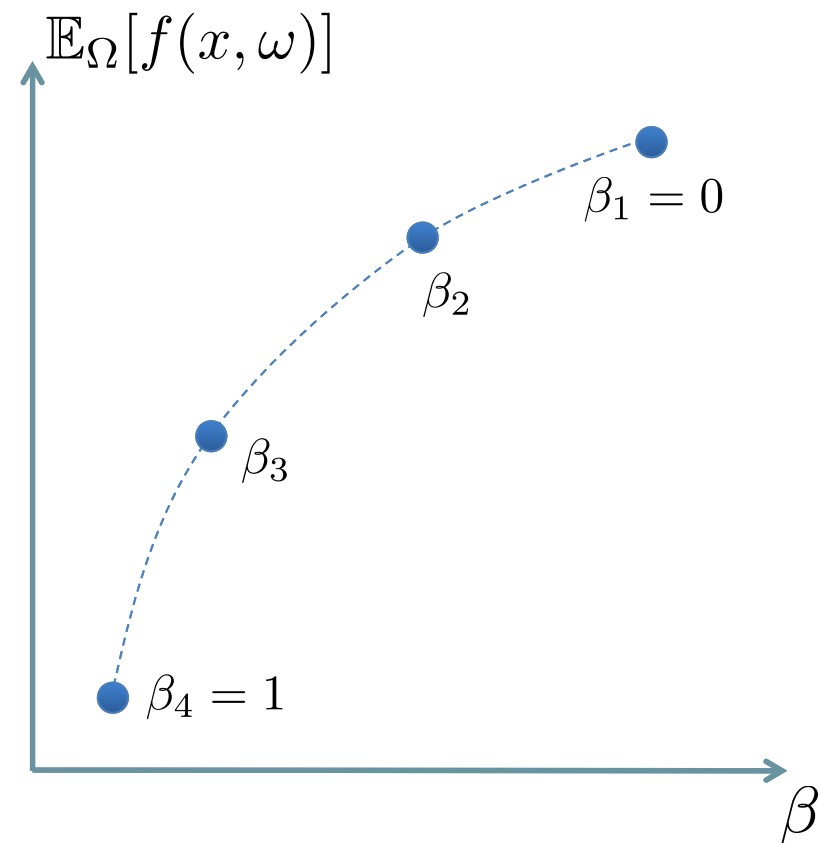
2. Considerar o risco segundo um “orçamento”, como **restrição**

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mathbb{E}_\Omega[f(x, \omega)] \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \\ & r_\Omega[f(x, \omega)] \leq \delta \end{aligned}$$

Gestão de risco

Em ambos os casos, a solução ótima está condicionada aos parâmetros que definem a **tolerância à exposição ao risco**;

- Soluções indicam **pontos eficientes**, cuja coleção define uma **fronteira eficiente**;
- Em termos gerais, um ponto eficiente é um **par retorno esperado/risco** de forma que é **impossível** encontrar um conjunto de variáveis de decisões que provenham **simultaneamente maior retorno e menor risco**

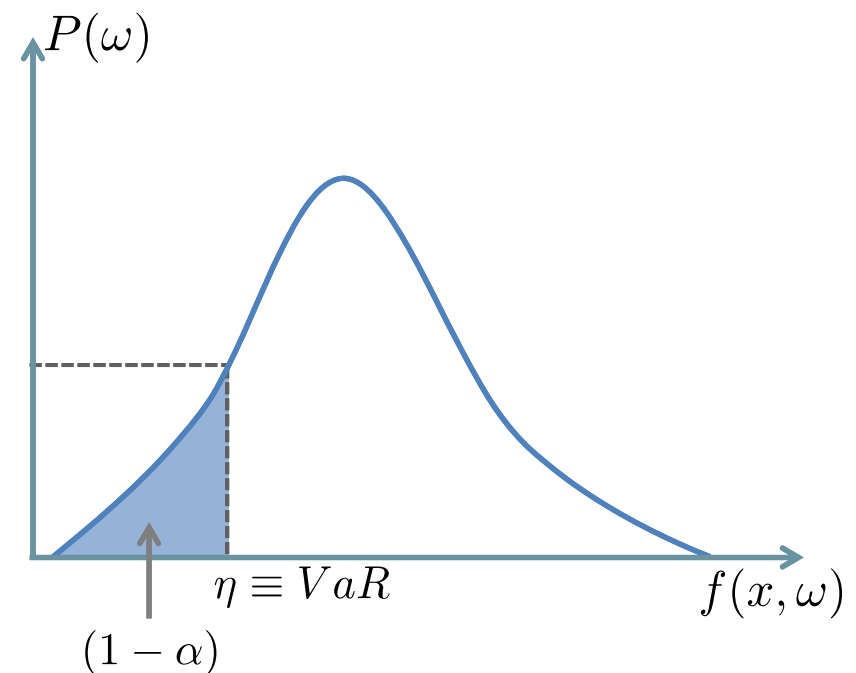


Exemplo Medidas de Risco

Medidas de risco

Value-at-Risk (Jorion, 2000)

- *Definição:* Dado uma probabilidade α , O VaR é dado pelo **maior** valor η que garante que a probabilidade de se obter um lucro menor que η é menor que $1-\alpha$.
- Pode-se pensar o VaR como sendo o **quantil** $(1-\alpha)$ da distribuição do lucro



$$VaR(\alpha, x) = \max\{\eta : P(\omega | f(x, \omega) < \eta) \leq 1 - \alpha\}$$

Medidas de risco

Incorporando o *VaR* ao modelo neutro à risco:

$$\max_{x, y(\xi^s), \theta(\xi^s), \eta} (1 - \beta) \left(c^T x + \sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s) \right) + \beta \eta$$

s.a:

$$Ax \leq b$$

$$T(\xi^s) + W(\xi^s)y(\xi^s) = h(\xi^s), \forall \xi^s \in S$$

$$\sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s)\theta(\xi^s) \leq 1 - \alpha$$

$$\eta - (c^T x + q(\xi^s)^T y(\xi^s)) \leq M\theta(\xi^s), \forall \xi^s \in S$$

$$\theta(\xi^s) \in \{0, 1\}, \forall \xi^s \in S$$

$$x \in X, y(\xi^s) \in Y, \forall \xi^s \in S$$

Medidas de risco

Incorporando o *VaR* ao modelo neutro à risco:

$$\max_{x, y(\xi^s), \theta(\xi^s), \eta} (1 - \beta) \left(c^T x + \sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s) \right) + \boxed{\beta \eta}$$

s.a:

$$Ax \leq b$$

$$T(\xi^s) + W(\xi^s)y(\xi^s) = h(\xi^s), \forall \xi^s \in S$$

$$\boxed{\sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) \theta(\xi^s) \leq 1 - \alpha}$$

$$\boxed{\eta} - (c^T x + q(\xi^s)^T y(\xi^s)) \leq M \theta(\xi^s), \forall \xi^s \in S$$

$$\theta(\xi^s) \in \{0, 1\}, \forall \xi^s \in S$$

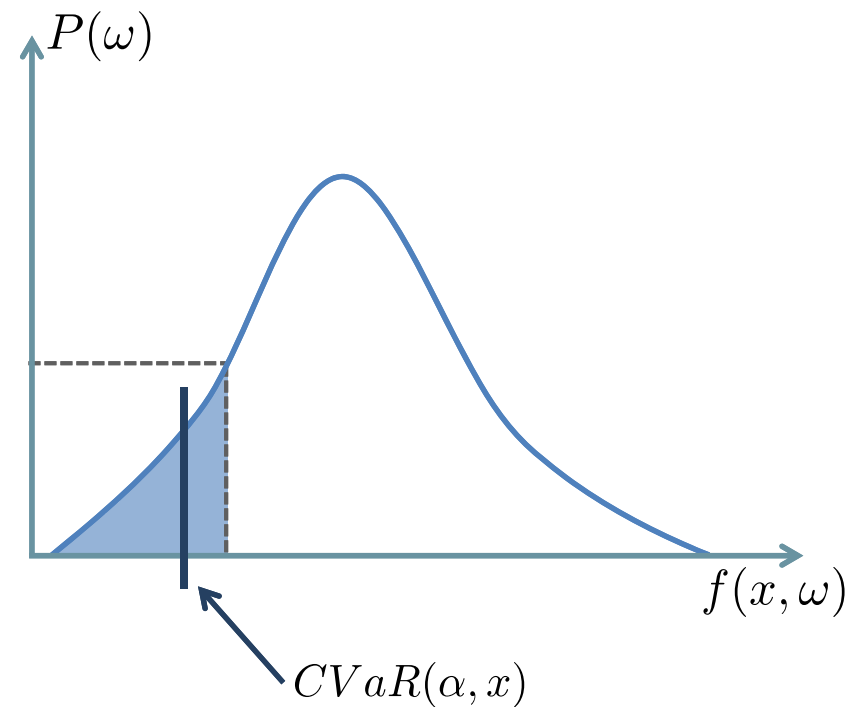
$$x \in X, y(\xi^s) \in Y, \forall \xi^s \in S$$

Estrutura matemática que
“conta” quais cenários
excederam η ao passo que
maximiza η dinamicamente

Medidas de risco

Conditional Value-at-Risk (CVaR) (Rockafellar e Uryasev, 2000)

- *Definição:* Dado uma probabilidade α , O CVaR é definido como a média dos lucros menores que o quantil $1-\alpha$ da distribuição de lucro.
- No caso de todos os cenários serem equiprováveis, o CVaR é computado como o lucro esperado dos $(1-\alpha)\%$ piores cenários.



$$CVaR(\alpha, x) = \max\left\{\eta - \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[\max\{\eta - f(x, \omega), 0\}]\right\}, \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

Medidas de risco

Incorporando o CVaR ao modelo neutro à risco:

$$\max_{x, y(\xi^s), v(\xi^s), \eta} (1 - \beta) \left(c^T x + \sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s) \right) + \beta \left(\eta - \frac{\sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) v(\xi^s)}{1 - \alpha} \right)$$

s.a:

$$Ax \leq b$$

$$T(\xi^s) + W(\xi^s) y(\xi^s) = h(\xi^s), \forall \xi^s \in S$$

$$\eta - (c^T x + q(\xi^s)^T y(\xi^s)) \leq v(\xi^s)$$

$$x \geq 0$$

$$y(\xi^s), v(\xi^s) \geq 0, \forall \xi^s \in S$$

Estrutura matemática que acumula o que excede de η ao passo que maximiza η

Medidas de risco

Incorporando o CVaR ao modelo neutro à risco:

$$\max_{x, y(\xi^s), v(\xi^s), \eta} (1 - \beta) \left(c^T x + \sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) q(\xi^s)^T y(\xi^s) \right) +$$

$$\beta \left(\eta - \frac{\sum_{\xi^s \in S} P(\xi^s) v(\xi^s)}{1 - \alpha} \right)$$

s.a:

$$Ax \leq b$$

$$T(\xi^s) + W(\xi^s) y(\xi^s) = h(\xi^s), \forall \xi^s \in S$$

$$\eta - (c^T x + q(\xi^s)^T y(\xi^s)) \leq v(\xi^s)$$

$$x \geq 0$$

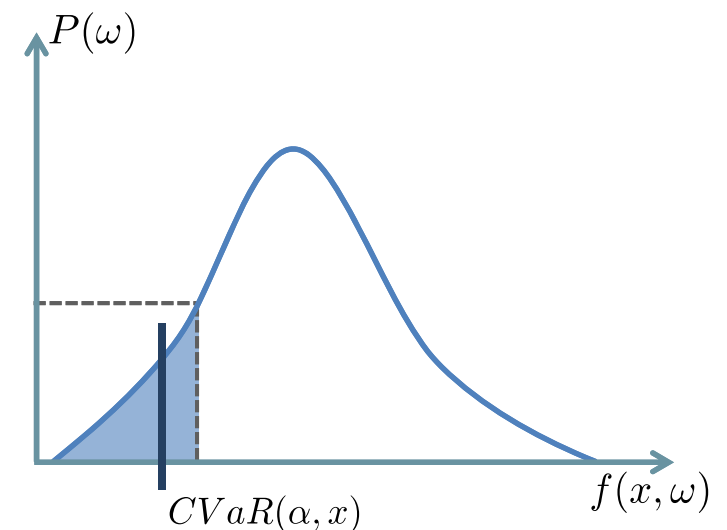
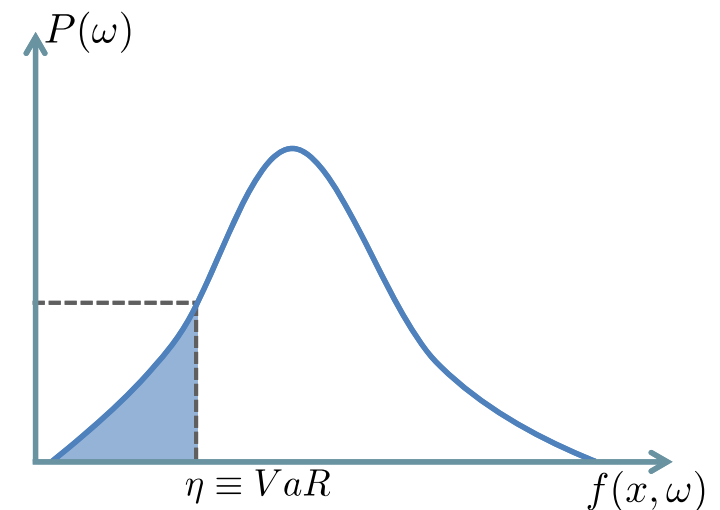
$$y(\xi^s), v(\xi^s) \geq 0, \forall \xi^s \in S$$

Estrutura matemática que acumula o que excede de η ao passo que maximiza η

Medidas de risco

Observações finais:

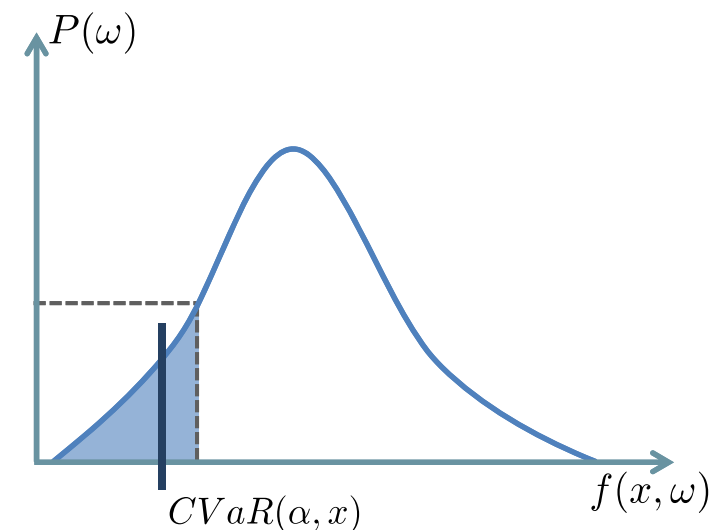
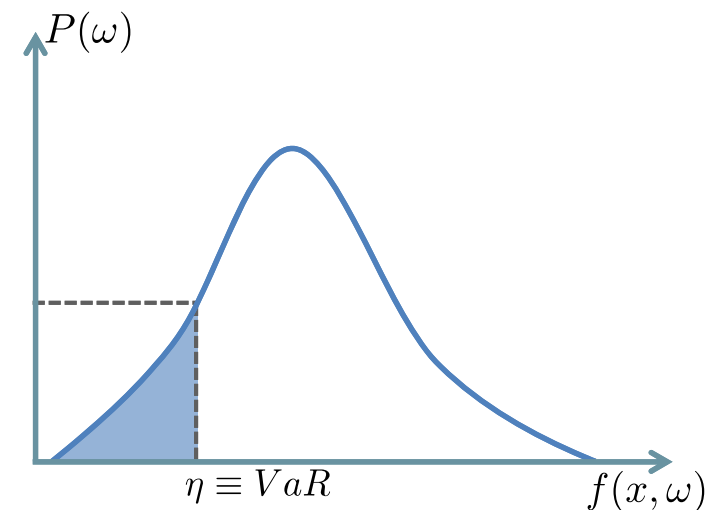
- Levar em conta riscos permite tomar decisões que **evitam** resultados indesejados;
- Usualmente, a gestão de risco é feito por intermédio de **medidas de risco**;
- Algumas medidas tradicionais:
 - Variância – não-linear e penaliza ambos os lados da distribuição de lucro;
 - Shortfall probability e expected shortfall – requerem targets e aumentam complexidade, mas são amigáveis no que se refere a algoritmos de decomposição;
 - VaR e CVaR não usam tais targets. Mais ainda, CVaR é **coerente**.



Medidas de risco

Observações finais:

- Atualmente CVaR é amplamente utilizado pois, além de ser uma medida coerente, pode ser expresso através de **variáveis contínuas**
 - VaR requer variáveis inteiras, o que destrói a convexidade do problema!
- Tanto VaR quanto CVaR arruinam estrutura do problema de 2 estágios, antes favorável a problemas de decomposição (“pergunte-me como”)





MC3 – Introdução a Otimização Estocástica

Prof. Silvio Hamacher, D.Sc. (hamacher@puc-rio.br)

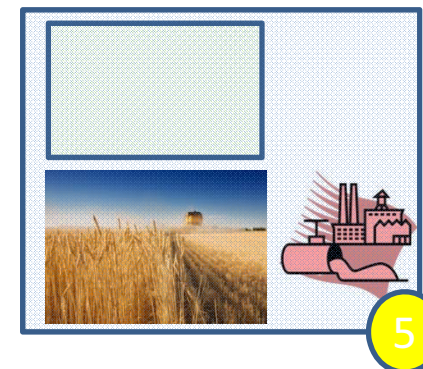
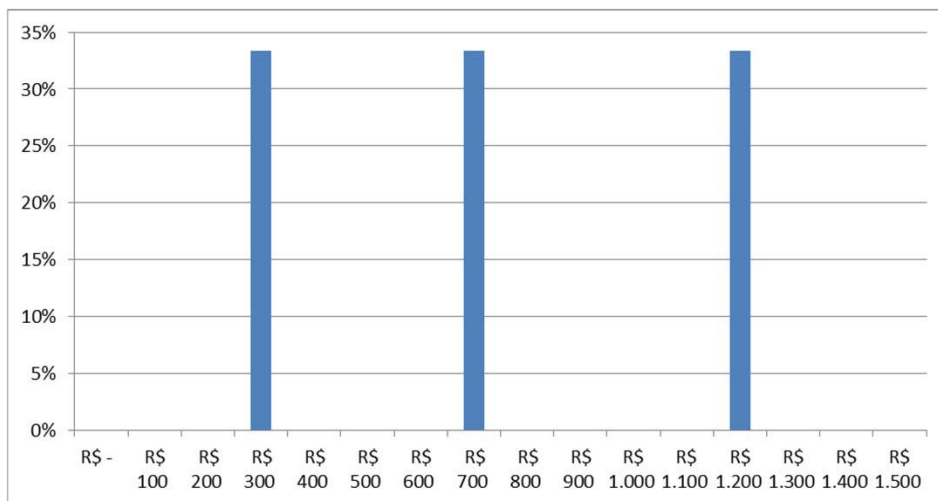
Prof. Fabricio Oliveira, D.Sc. (fabricio.oliveira@puc-rio.br)

Departamento de Engenharia Industrial

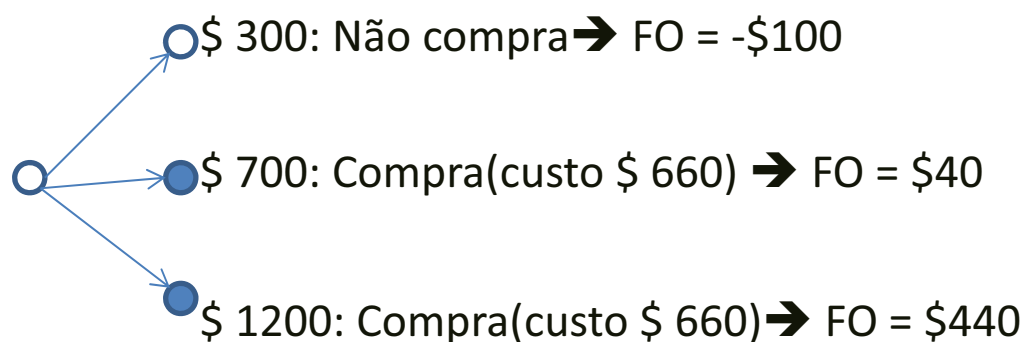
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Conteúdo programado

1. Aula I – 18/9
 1. Representação da Incerteza
 2. Modelo Estocástico 2 Estágios
 3. Medidas de Qualidade da Solução
 4. Gestão de Risco
2. Aula II – 19/9
 1. Modelo Estocástico Multi-Estágios
 2. Geração de Cenários
 3. Avaliação de Árvores de Cenários
 4. Pesquisa e Tendências



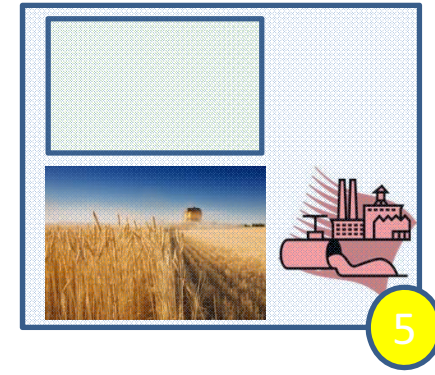
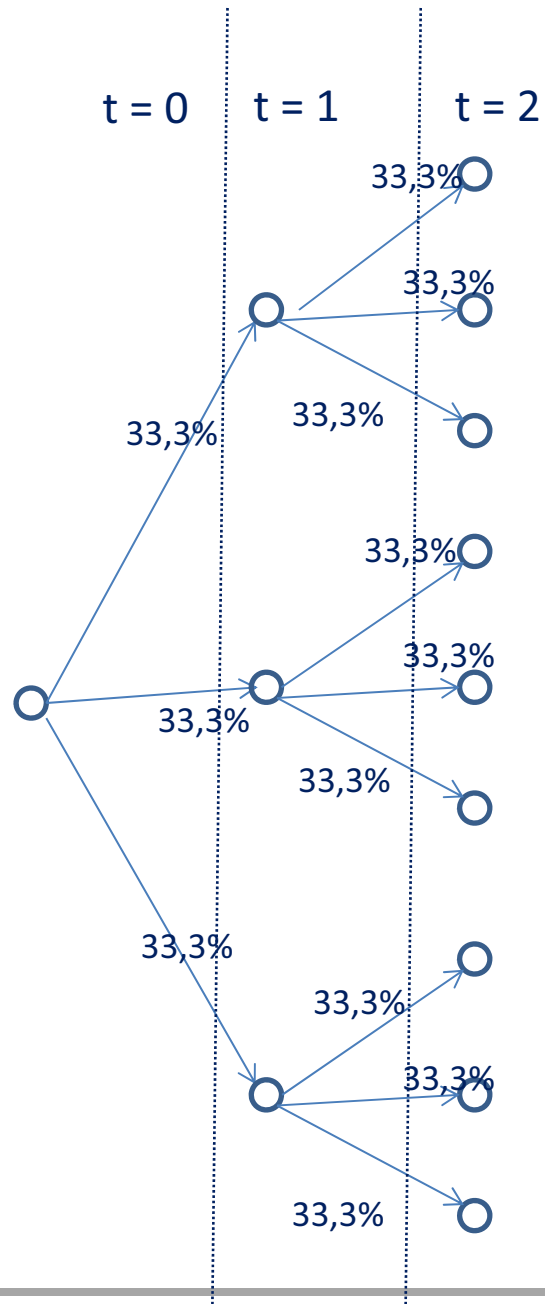
3 cenários de preços equiprováveis (33,33% cada)



Valor Esperado da Solução 5:

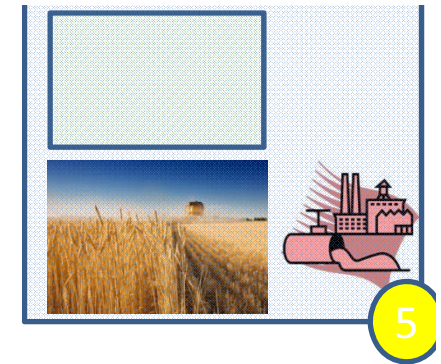
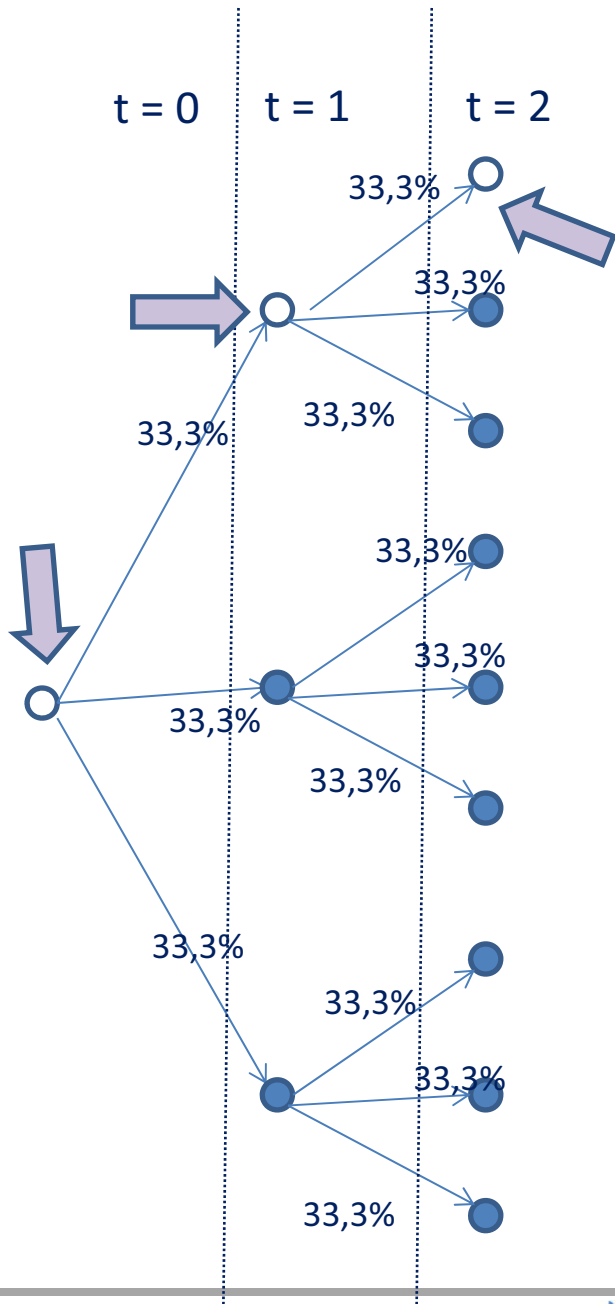
$$\begin{aligned}
 & -\$100 * 33,3\% \\
 & \$40 * 33,3\% \\
 & \$440 * 33,3\%
 \end{aligned}$$

\$ 93,33



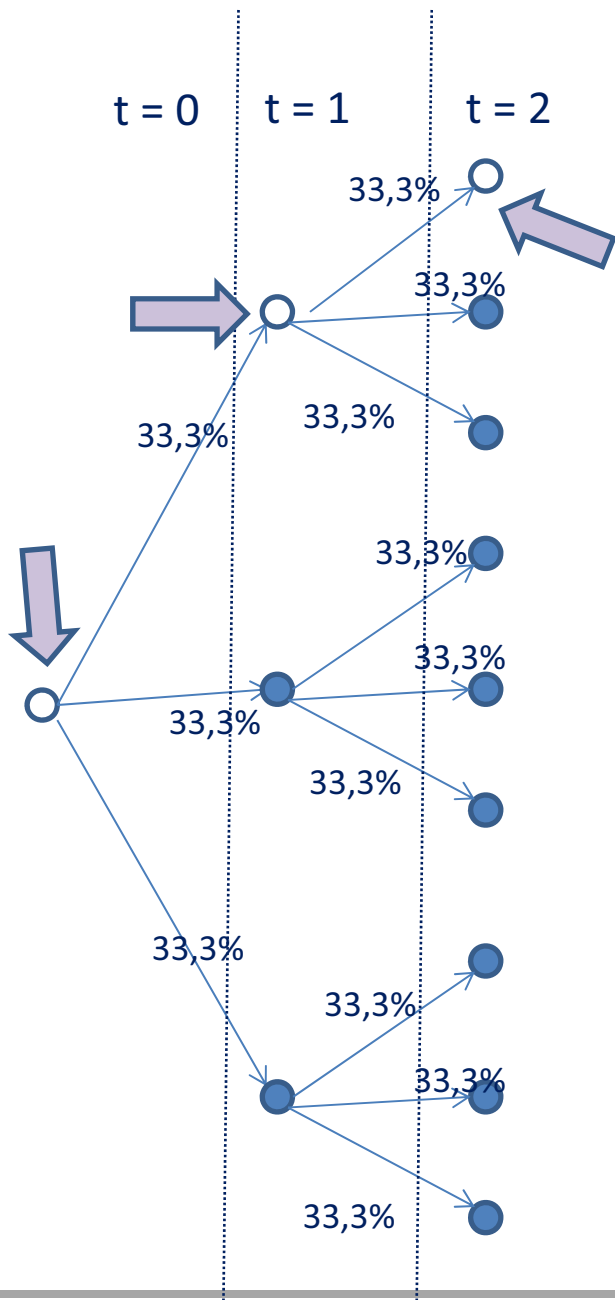
Problema multi-estágio:

- No 2º. Estágio posso decidir pelo aluguel (a um custo mais baixo)
- Ou postergar a decisão de alugar para quando a incerteza for revelada...



Uma solução “naif”: tomada de decisão em cada estágio, de forma independente, ou seja, sem considerar a árvore completa de cenários

Não compra os equipamentos no cenário de preços \$300



Valores no nós: FO da decisão em cada nó

1º Estágio = **-\$100** (plantação)
2º Estágio

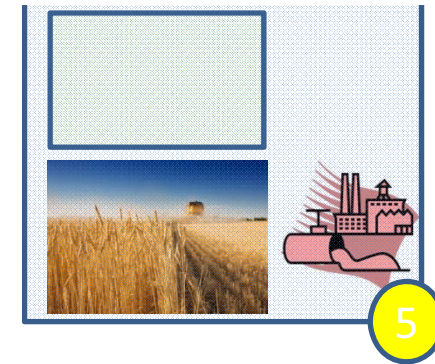
Valor Solução	Probab.	Valor Esperado
-R\$ 100,00	33%	-R\$ 33,33
-R\$ 60,00	33%	-R\$ 20,00
R\$ 440,00	33%	R\$ 146,67
		R\$ 93,33

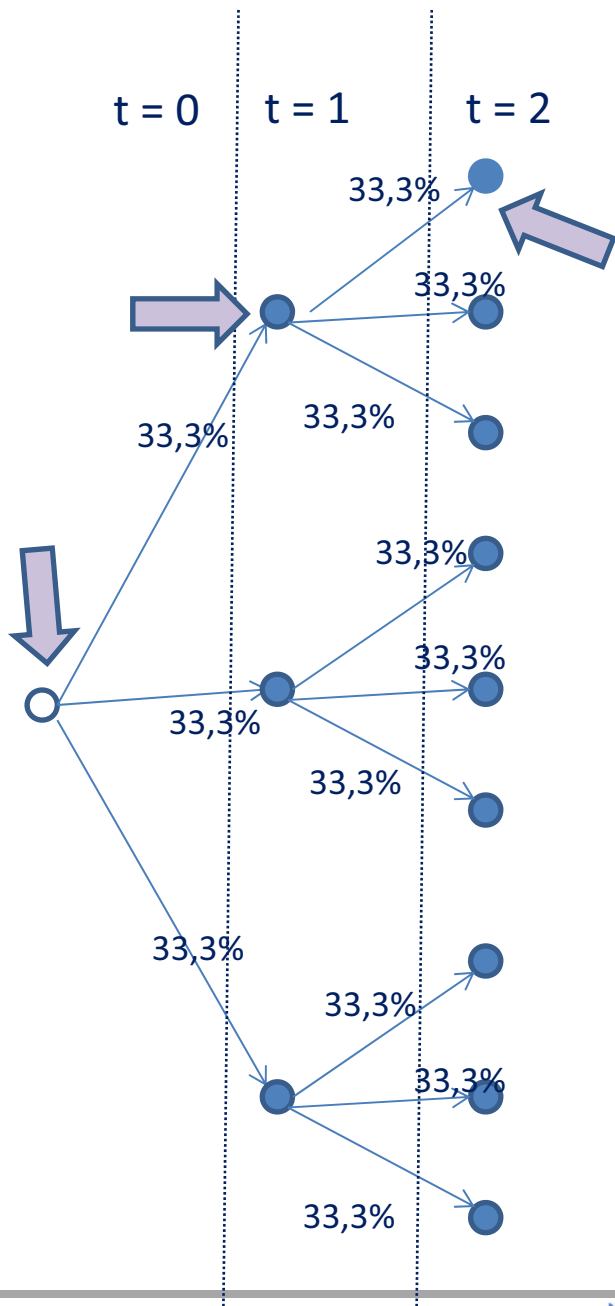
3º Estágio

Valor Solução	Probab.	Valor Esperado
R\$ -	11%	R\$ -
R\$ 40	11%	R\$ 4
R\$ 440	11%	R\$ 49
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
		R\$ 542

Valor esperado da solução:

$$-\$100 + \$93,33 + \$542 = \mathbf{\$535,6}$$





Valores no nós: FO da decisão em cada nó

1º Estágio = **-\$100** (plantação)

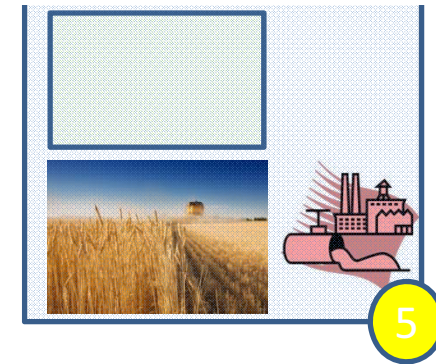
2º Estágio

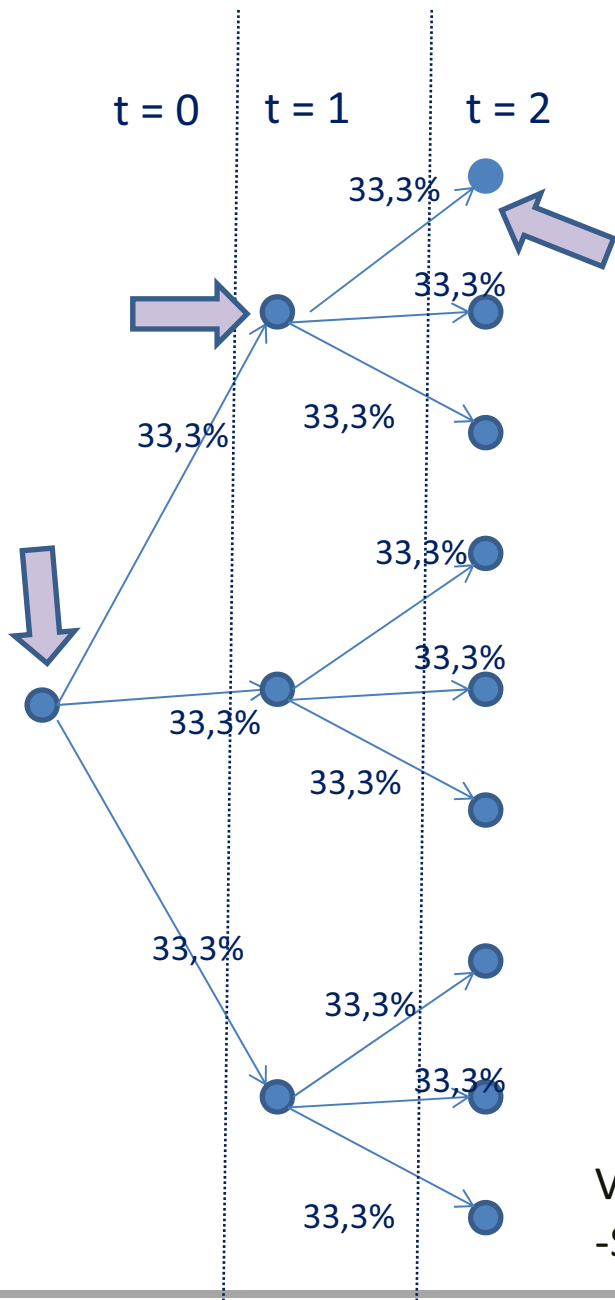
Valor Solução	Probab.	Valor Esperado
-R\$ 360,00	33%	-R\$ 120,00
-R\$ 60,00	33%	-R\$ 20,00
R\$ 440,00	33%	R\$ 146,67
		R\$ 6,67

3º Estágio

Valor Solução	Probab.	Valor Esperado
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
		R\$ 733

Valor esperado da solução:
-\$100 + 6,67 + \$733 = \$640,00





Valores no nós: FO da decisão em cada nó

1º Estágio = **-\$700** (plantação e compra)

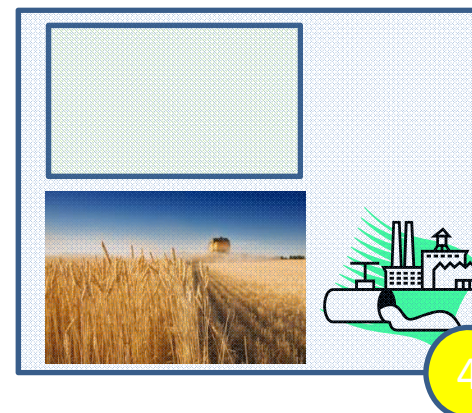
2º Estágio

Valor Solução	Probab.	Valor Esperado
R\$ 300,00	33%	R\$ 100,00
R\$ 700,00	33%	R\$ 233,33
R\$ 1.200,00	33%	R\$ 400,00
		R\$ 733,33

3º Estágio

Valor Solução	Probab.	Valor Esperado
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
R\$ 300	11%	R\$ 33
R\$ 700	11%	R\$ 78
R\$ 1.200	11%	R\$ 133
		R\$ 733,33

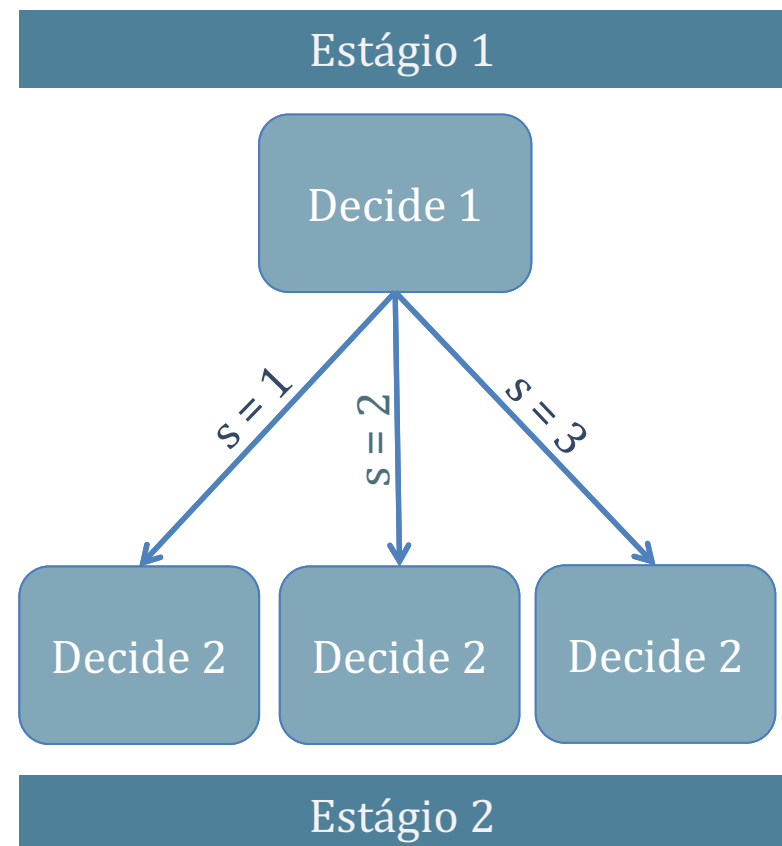
Valor esperado da solução:
 $-\$700 + \$733,3 + \$733,3 = \mathbf{\$766,67}$



Modelando a incerteza

Estágio e recurso

- Em muitos casos, somente **parte** das decisões precisam ser tomadas **antes** da realização da incerteza
 - Ordem temporal normalmente inerente ao problema;
 - A cada realização da incerteza temos mais informação disponível, o que é conhecido como **estágio**;
- A possibilidade de **postergar** decisões é a essência por trás do ganho em se considerar a incerteza do problema, pois dá ao decisor **flexibilidade**;



Tais decisões são ditas de

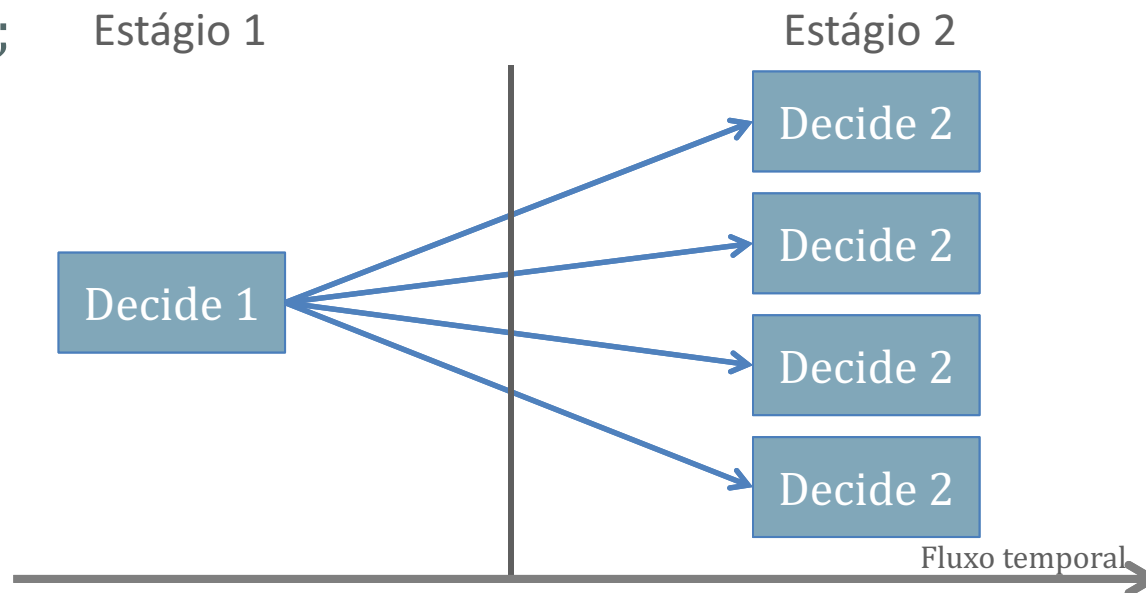
recurso.

Problemas multi-estágio

Em alguns casos, a tomada de decisão segue um fluxo **sequencial** dinâmico.

- Especialmente em problemas que levam em conta **horizontes de tempo**;
- Pode ser importante **revisar** ou **postergar** decisões para momentos posteriores, quando mais da incerteza estiver disponível.

Pode não fazer sentido **tomar toda a decisão em um único ponto do tempo**, enquanto espera-se que todas as ações de recurso dêem conta de toda incerteza;

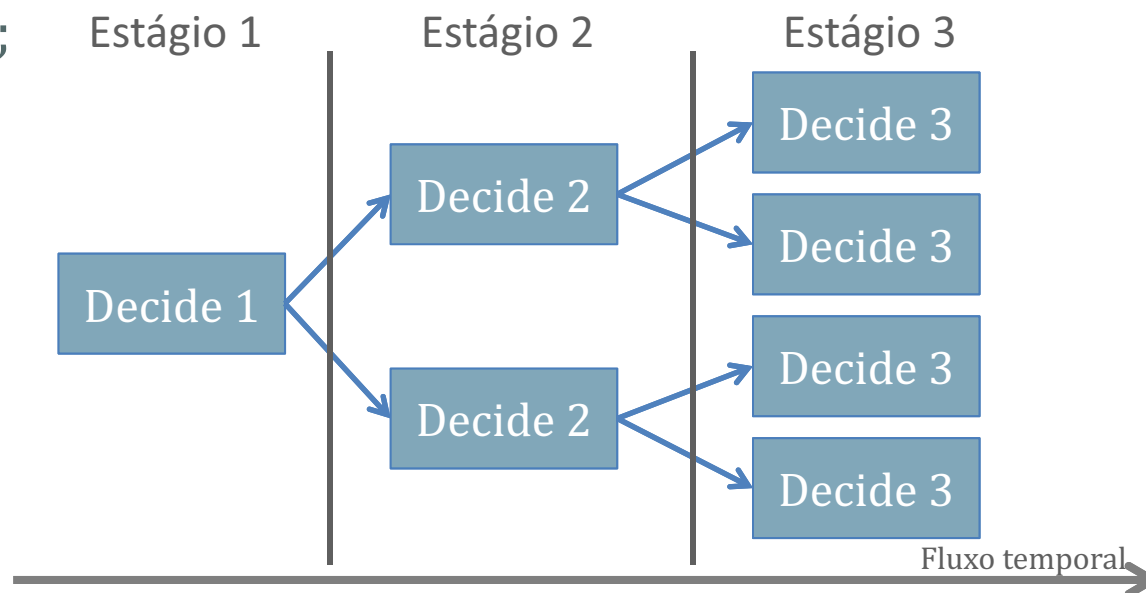


Problemas multi-estágio

Em alguns casos, a tomada de decisão segue um fluxo **sequencial** dinâmico.

- Especialmente em problemas que levam em conta **horizontes de tempo**;
- Pode ser importante **revisar** ou **postergar** decisões para momentos posteriores, quando mais da incerteza estiver disponível.

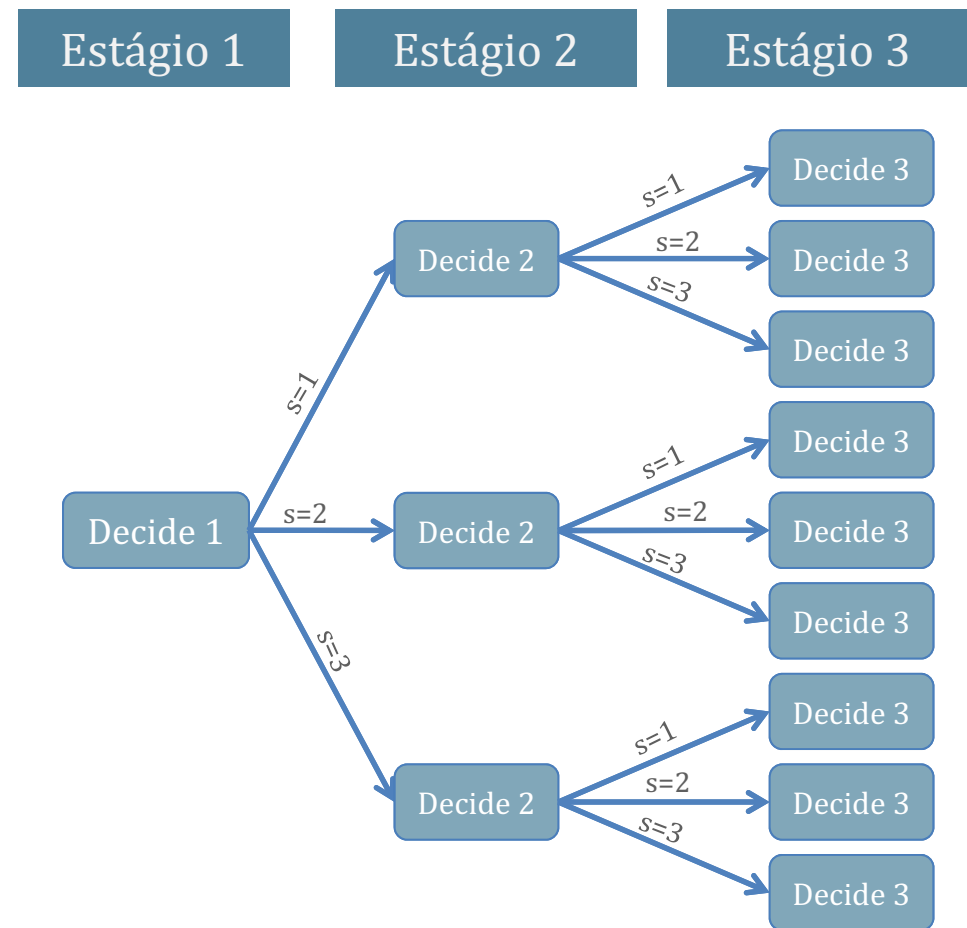
Pode não fazer sentido **tomar toda a decisão em um único ponto do tempo**, enquanto espera-se que todas as ações de recurso dêem conta de toda incerteza;



Problemas multi-estágio

Estágio e recurso

- Dependendo da natureza do problema, o problema pode possuir somente **2-estágios** ou ser **multi-estágio**
 - Tipicamente problemas multi-estágio são mais **difíceis** em termos computacionais;
 - Em muitos casos opta-se por **aproximar** tais problemas por problemas 2-estágios;
 - Em alguns **casos isso não é possível**, dada a “**preciosidade**” da informação adicional obtida em estágios posteriores.



Problemas multi-estágio

A formulação genérica para um problema multi-estágio é dada por:

$$\min c_1^T x_1 + \mathbb{E}_{\Omega^2} [c_2(\omega)x_2(\omega_2) + \cdots + \mathbb{E}_{\Omega^H} [c_H(\omega)x_H(\omega_H)]]$$

$$\text{s.a: } W_1 x_1 = h_1$$

$$T_1(\omega)x_1 + W_2 x_2(\omega_2) = h_2(\omega)$$

⋮

$$T_{H-1}(\omega)x_{H-1}(\omega_{H-1}) + W_H x_H(\omega_H) = h_H(\omega)$$

$$x_1 \geq 0, x_t(\omega_t) \geq 0, t = 2, \dots, H$$

Problemas multi-estágio

A formulação genérica para um problema multi-estágio é dada por:

$$\min c_1^T x_1 + \mathbb{E}_{\Omega^2} [c_2(\omega)x_2(\omega_2) + \dots + \mathbb{E}_{\Omega^H} [c_H(\omega)x_H(\omega_H)]]$$

$$\text{s.a: } W_1 x_1 = h_1$$

$$T_1(\omega)x_1 + W_2 x_2(\omega_2) = h_2(\omega)$$

⋮

$$T_{H-1}(\omega)x_{H-1}(\omega_{H-1}) + W_H x_H(\omega_H) = h_H(\omega)$$

$$x_1 \geq 0, x_t(\omega_t) \geq 0, t = 2, \dots, H$$

Note o efeito
aninhado dos
valores
esperados...

Problemas multi-estágio

A formulação genérica para um problema multi-estágio é dada por:

$$\min c_1^T x_1 + \mathbb{E}_{\Omega^2} [c_2(\omega) x_2(\omega_2)] + \cdots + \mathbb{E}_{\Omega^H} [c_H(\omega) x_H(\omega_H)]$$

$$\text{s.a: } W_1 x_1 = h_1$$

$$T_1(\omega) x_1 + W_2 x_2(\omega_2) = h_2(\omega)$$

⋮

$$T_{H-1}(\omega) x_{H-1}(\omega_{H-1}) + W_H x_H(\omega_H) = h_H(\omega)$$

$$x_1 \geq 0, x_t(\omega_t) \geq 0, t = 2, \dots, H$$

A dependência em ω_H serve para destacar o condicionamento da decisão a que aconteceu

A dependência em ω serve para destacar a incerteza no parâmetro

Problemas multi-estágio

No exemplo de 3 estágios apresentado, teríamos:

$$\min c_1 x_1 + \sum_{\xi_2^s \in S} P(\xi_2^s) \left[c_2(\xi_2^s) x_2(\xi_2^s) + \left(\sum_{\xi_3^s \in S} P(\xi_3^s) c_3(\xi_3^s) x_3(\xi_3^s | \xi_2^s) \right) \right]$$

s.a: $Ax \leq b$

$$T(\xi_2^s) x_1 + W(\xi_2^s) x_2(\xi_2^s) = h(\xi_2^s), \forall \xi_2^s$$

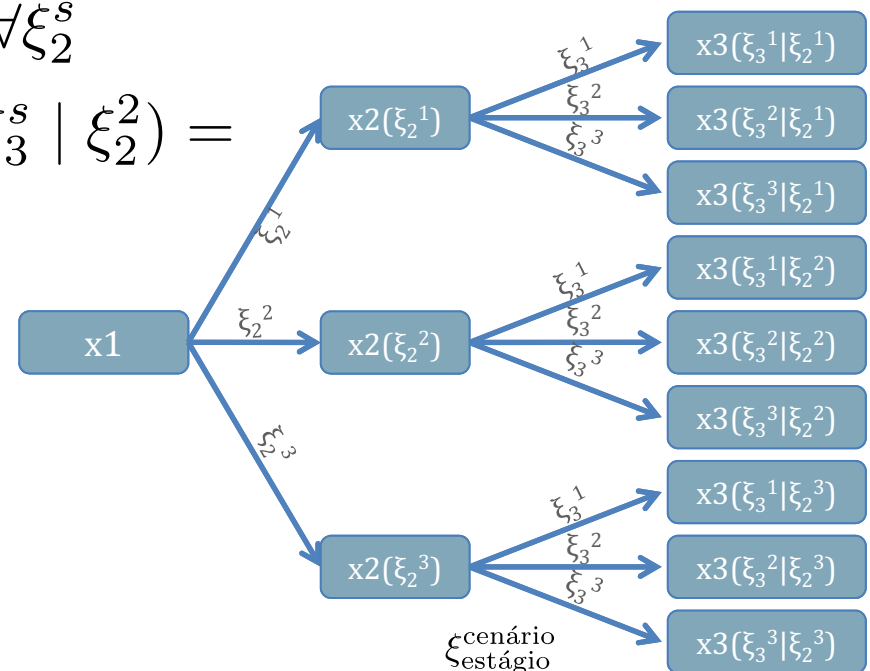
$$T(\xi_3^s | \xi_2^s) x_2(\xi_2^s) + W(\xi_3^s | \xi_2^s) x_3(\xi_3^s | \xi_2^s) =$$

$$h(\xi_3^s | \xi_2^s), \forall \xi_2^s, \forall \xi_3^s$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x(\xi_2^s) \geq 0, \forall \xi_2^s$$

$$x(\xi_3^s | \xi_2^s), \forall \xi_2^s, \forall \xi_3^s$$



Problemas multi-estágio

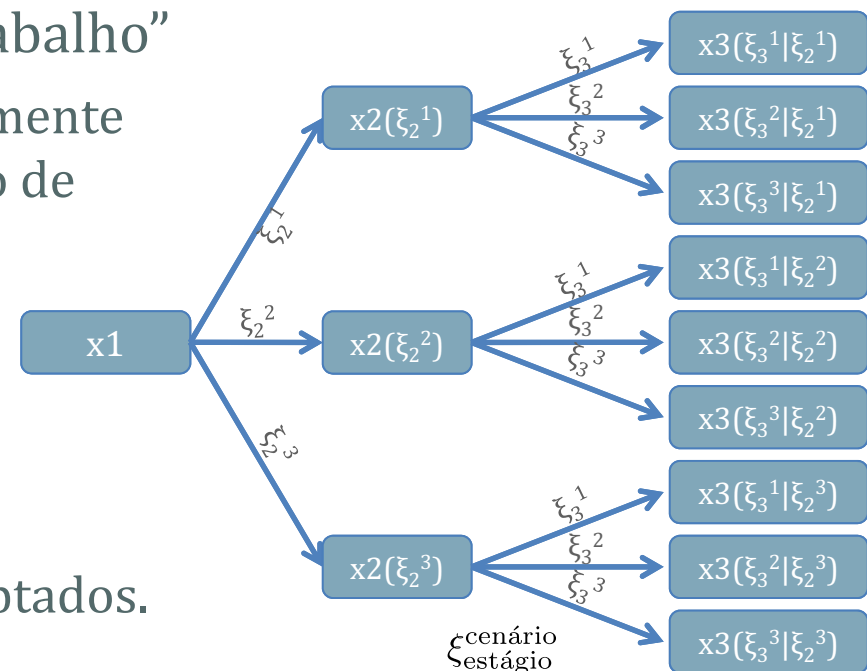
Take aways

Mais estágios implicam em uma aderência maior ao processo decisório...

- Representa a tomada de decisão levando em conta que parte das decisões podem ser tomadas baseadas em **mais informação**

... porém também implicam em mais “trabalho”

- Modelos de **maior porte**, que rapidamente se tornam **intratáveis** dado o número de cenários;
- A geração de cenários requer mais **sofisticação** para representar adequadamente o problema
- Métodos de **decomposição** se fazem necessários, porém precisam ser adaptados.



Ex. Geração de cenários

Otimização sob incerteza

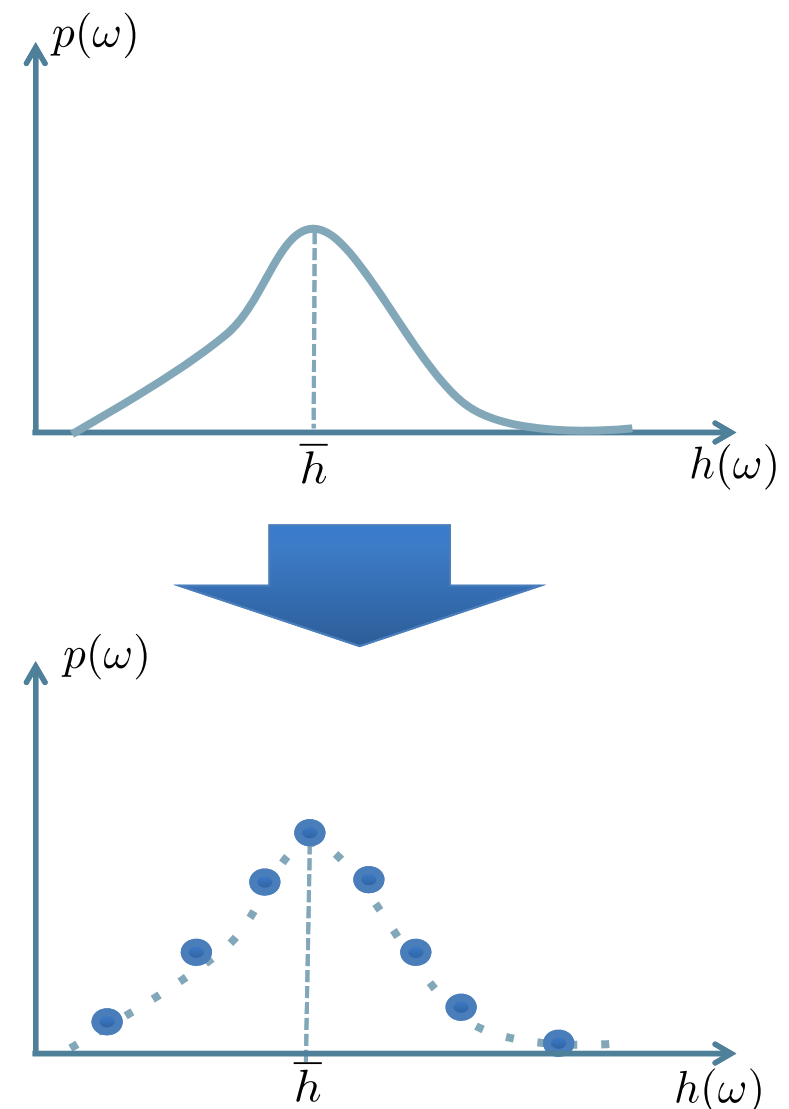
Problemas de programação estocástica:

- São modelos de programação matemática onde alguns parâmetros são substituídos por **variáveis aleatórias**
- Para resolver tais problemas precisamos de:
 1. Um **modelo** descrevendo o problema;
 2. Valores dos **parâmetros determinísticos** (conhecidos)
 3. Uma **descrição do fenômeno estocástico**
 - Uma **distribuição conhecida**, descrita por densidades e/ou acumuladas
 - **Dados históricos**, i.e., uma amostra discreta.
 - Algumas propriedades da distribuição, por exemplo alguns primeiros momentos.

Representação da incerteza

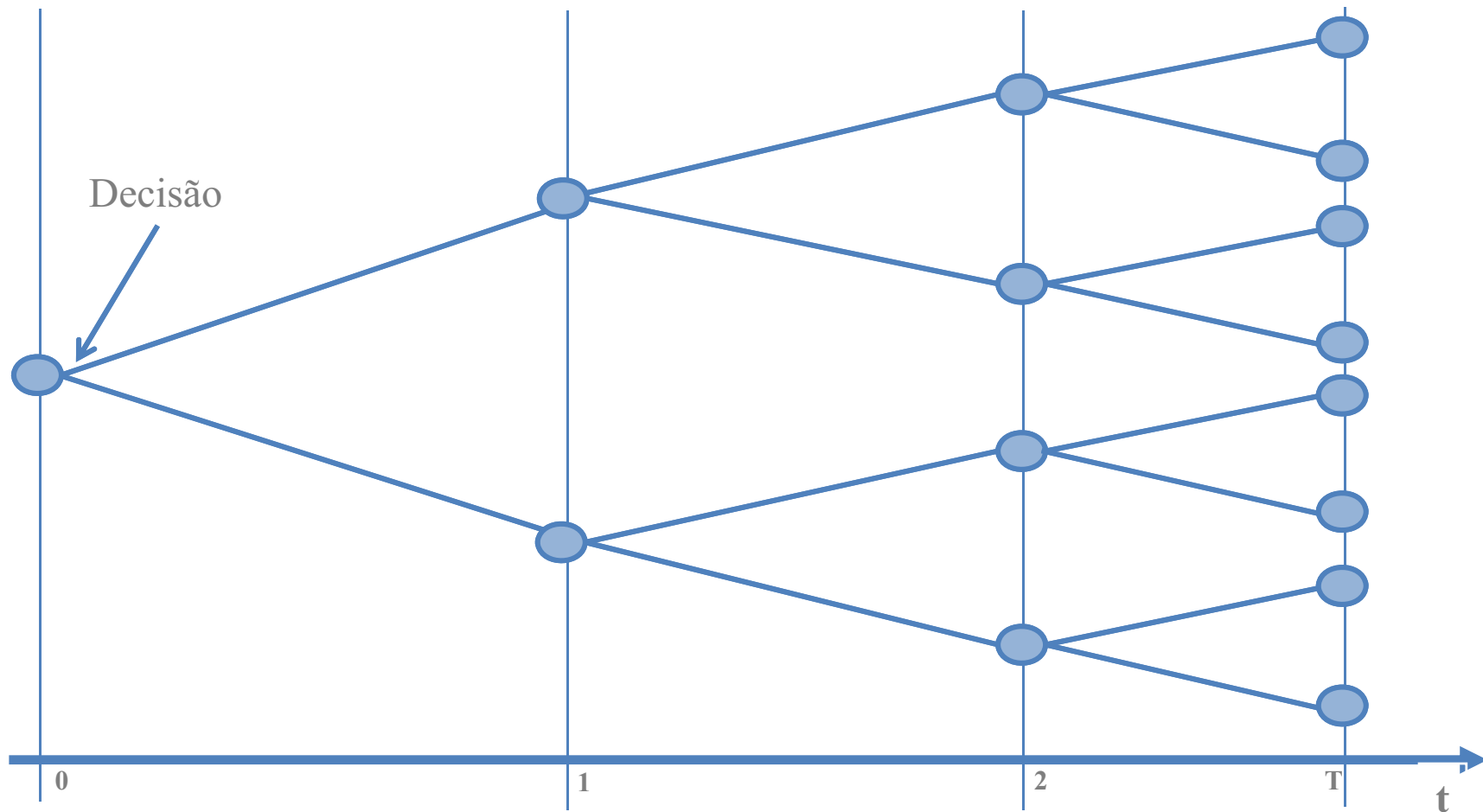
Geração de cenários

- **Drama:** problemas de programação estocástica **só podem ser eficientemente resolvidos** se a incerteza for representada como **amostras discretas de tamanho limitado**.
- Para lidar com isso, temos que **aproximar** a distribuição através de tais discretizações.
- Tais aproximação são o que se conhece como **árvores de cenários**.



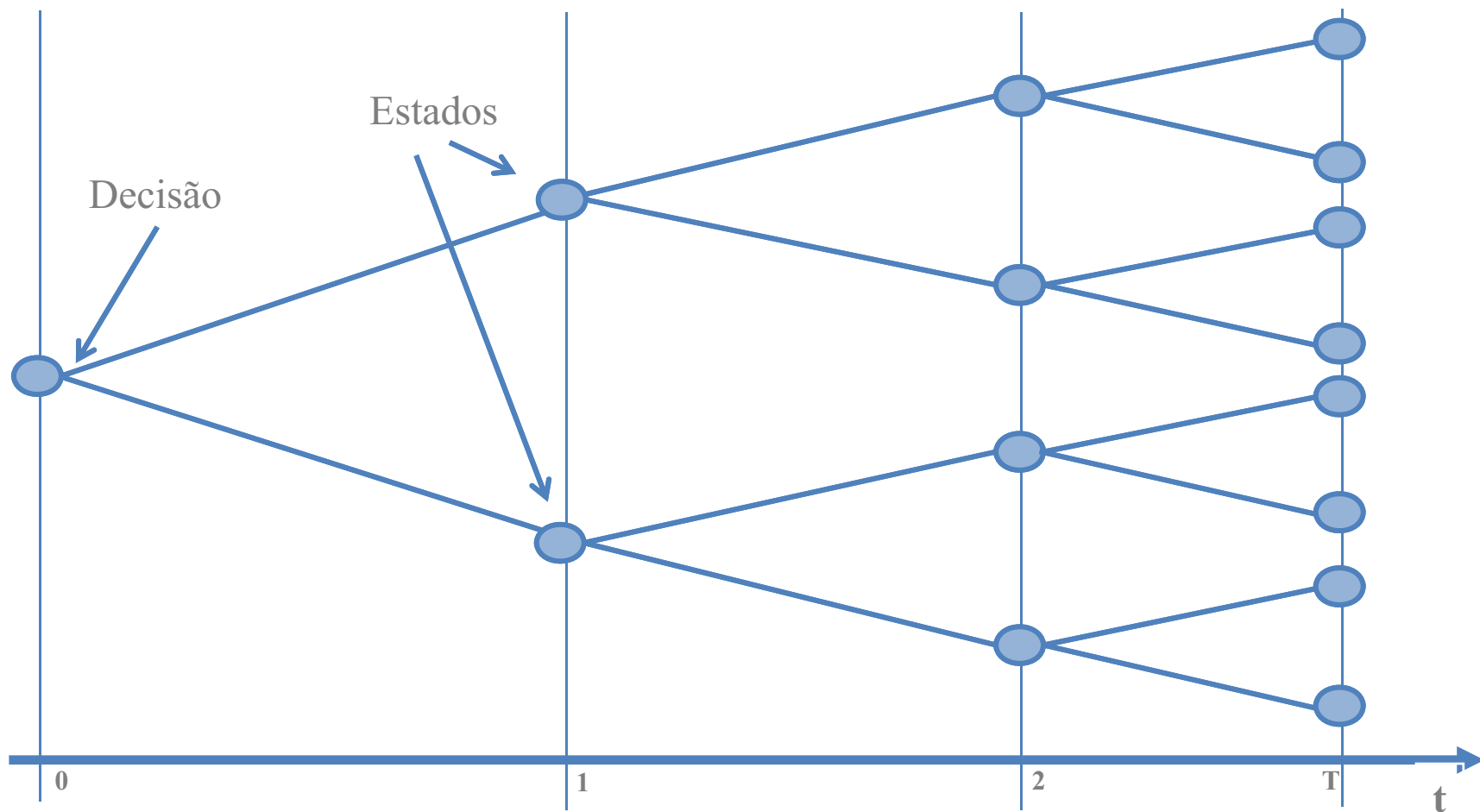
Geração de cenários

Árvores de cenários: terminologia básica



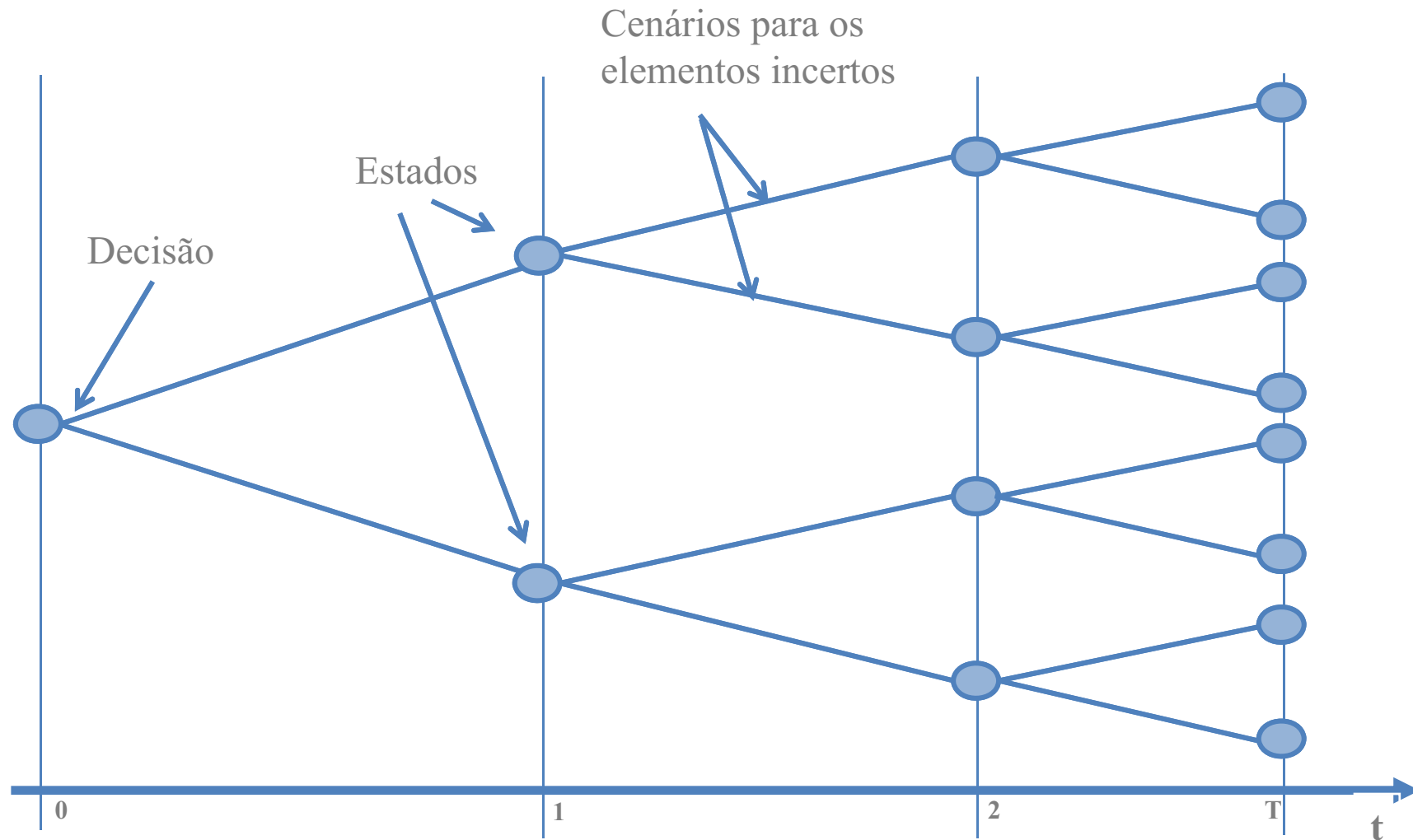
Geração de cenários

Árvores de cenários: terminologia básica



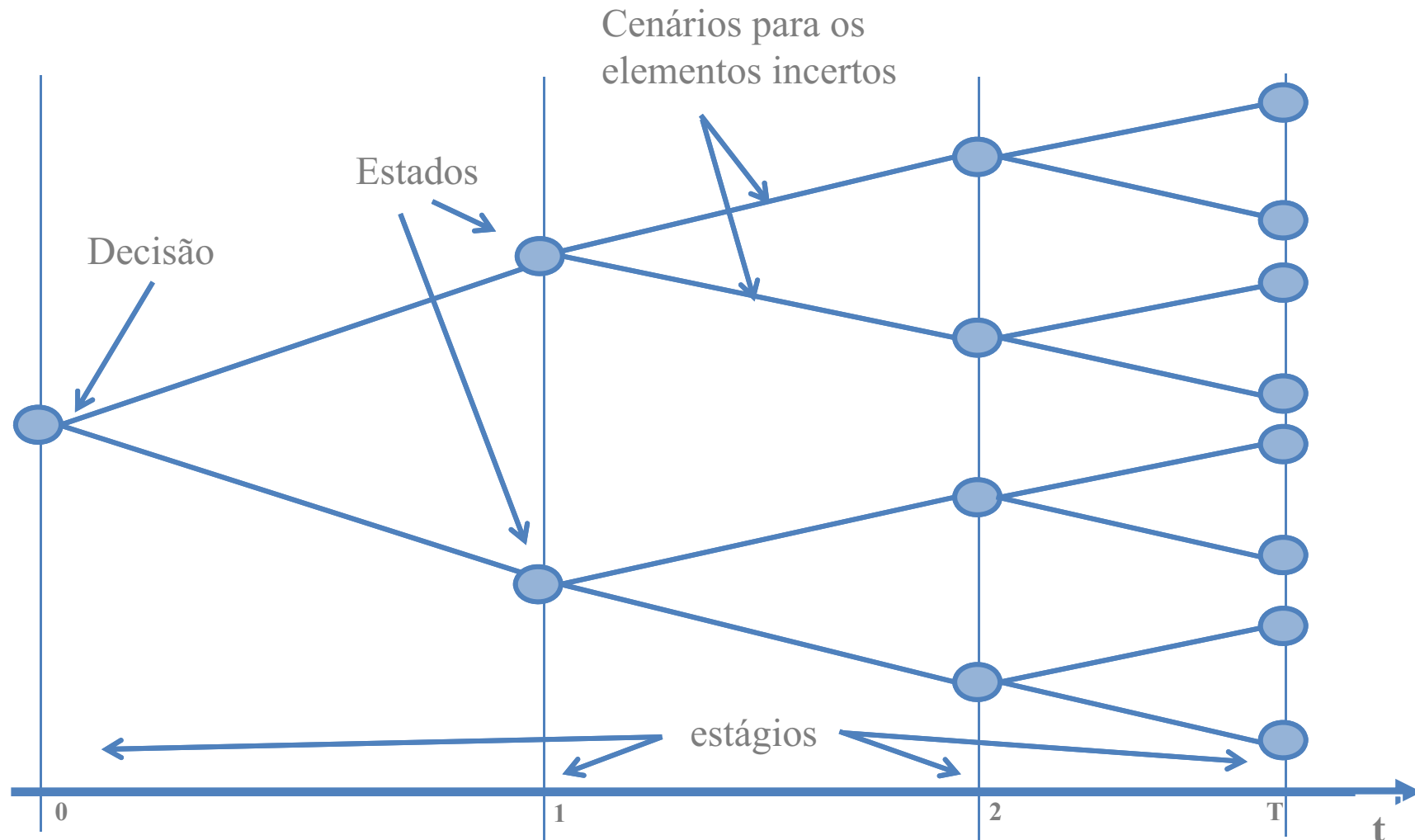
Geração de cenários

Árvores de cenários: terminologia básica



Geração de cenários

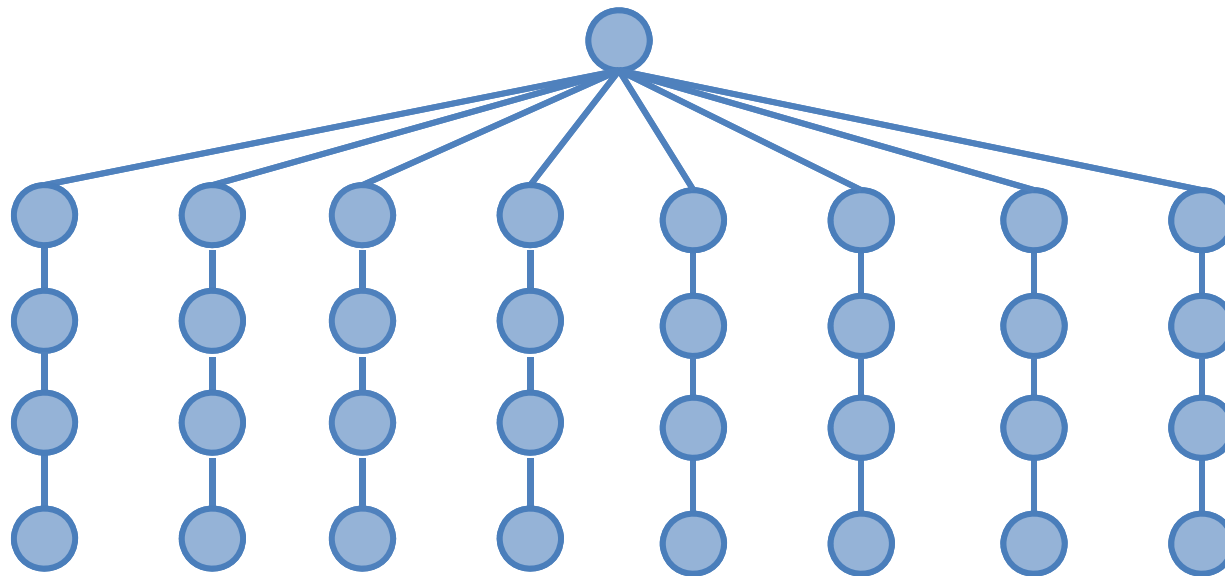
Árvores de cenários: terminologia básica



Representação da incerteza

Árvores de cenários

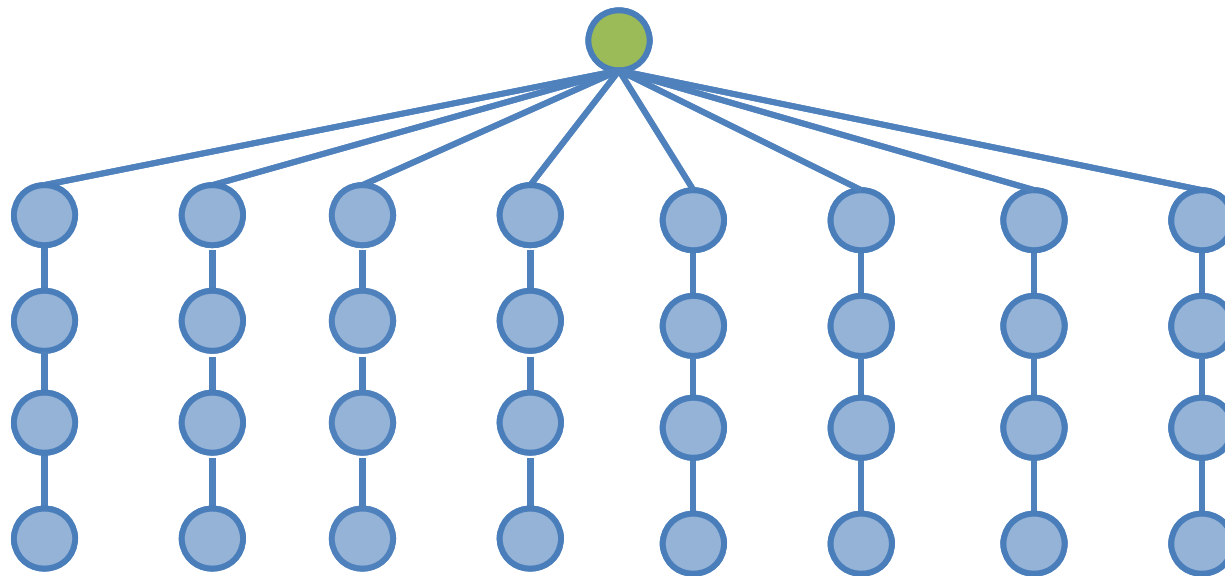
O que significa possuir ramificações na árvore?



Representação da incerteza

Árvores de cenários

O que significa possuir ramificações na árvore?



Ramificação (branching) = chegada de **nova informação** = estágio

Árvore acima = “ventilador” (fan) → **nenhuma informação** nova após o primeiro estágio

- Ou seja: fan = problemas de 2 estágios.

Geração de cenários

Antes de criar cenários, nós precisamos:

Decidir quantas **discretizações** são necessárias

- Decidir o **número de estágios**
- **Tamanho dos períodos de tempo entre estágios**

Saber exatamente quando a informação se torna disponível e a relação de “**timing**” entre as decisões;

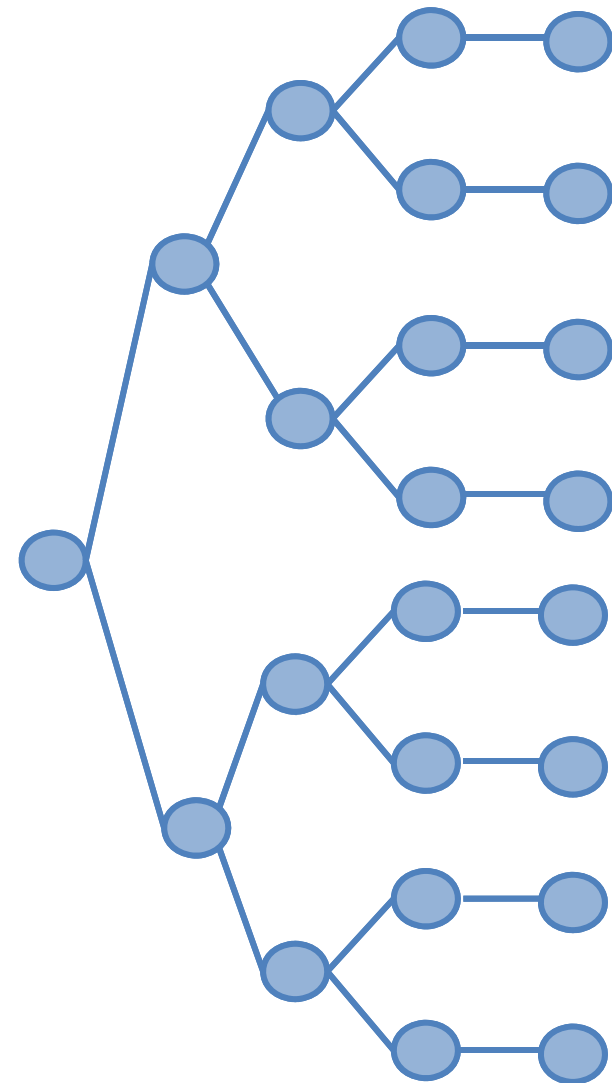
- Esse problema não existe no caso determinístico

Decidir o número de **ramos** (branches) por estágio;

- Alguns métodos fazem isso automaticamente

É melhor termos árvores longas ou árvores largas?

- **Ainda é uma questão em aberto...**



Geração de cenários

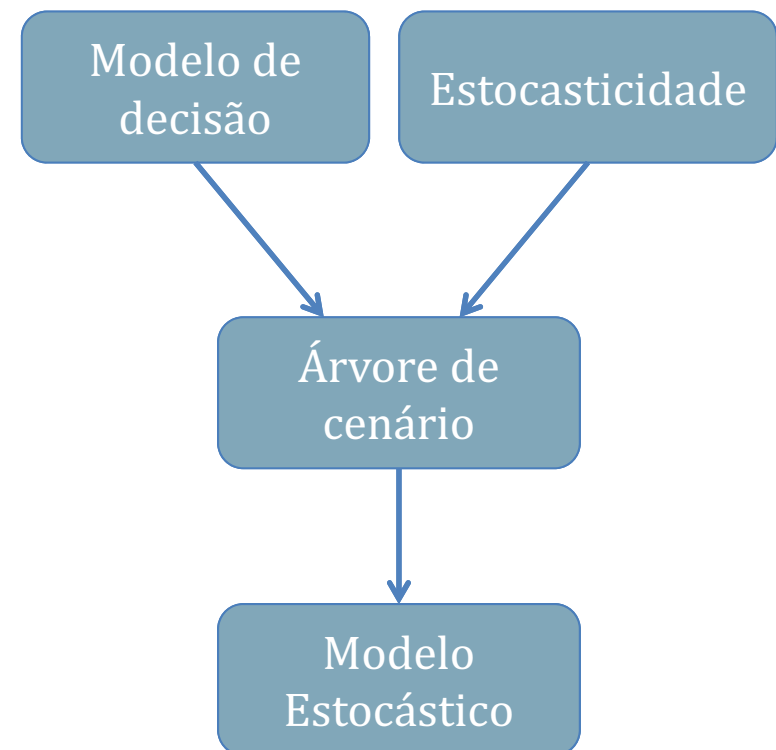
Fontes típicas de dados para cenários

- Dados históricos
 - A história é uma boa descrição do futuro?
- Simulação baseada em modelos matemáticos/estatísticos
 - Parâmetros estimados a partir de casos reais
- Opinião de especialistas
 - Subjetivo
 - “Back-testing” não é uma opção nesse caso!
- Na prática, acabamos por optar por uma **combinação de (quase) todas essas opções**
 1. Estima-se a distribuição de dados históricos
 2. Usa-se um modelo matemático e/ou opinião de especialistas
 3. Ajusta-se a distribuição para a situação atual.

Geração de cenários

Métodos de geração de cenários

- A escolha de um bom método de geração de cenários depende do problema.
 - Geração de cenários é parte do processo de modelagem.
- Por não ser uma parte natural do problema, até recentemente não recebia muita atenção
 - Em geral, nem o usuário, nem o modelador estão interessados nos cenários e como eles são gerados...
- Problema: os cenários (e sua qualidade) influenciam a qualidade da solução
 - **Entra lixo → sai lixo**

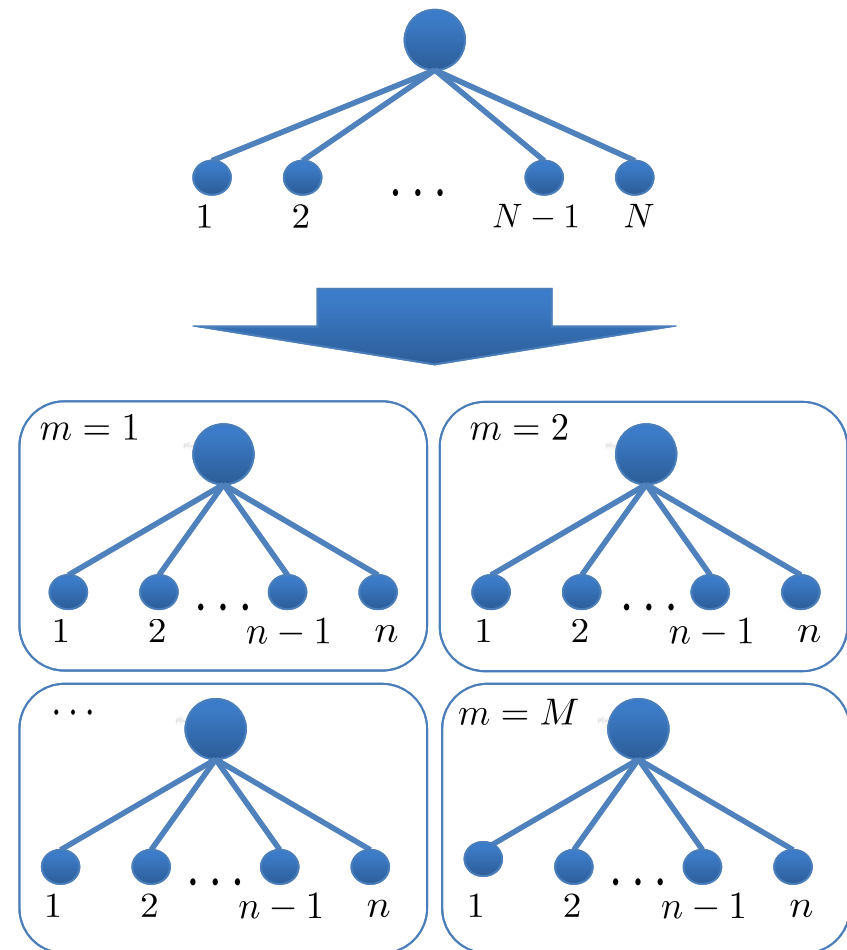


Geração de cenários

Métodos de geração de cenários

Amostragem: conhecido um processo estocástico que descreva a incerteza, são amostrados cenários para compor a árvore

- Pode ser usado algum método especializado de amostragem (Hiper-cubo Latino, Importance sampling...)
1. *Pros:* Implementação fácil; convergência em direção a distribuição
 2. *Contras:* Pouca estabilidade para pequenas árvores, necessário conhecimento da distribuição, aplicável somente ao caso de 2-estágios (SAA);



Sample Average Approximation

Indo além no processo de amostragem (Shapiro and Homem-de-Mello, 1998)

Pode-se embutir o processo de amostragem de árvores de cenário em uma análise baseada em simulação de Monte Carlo. Tal método é conhecido como *Sample Average Approximation*

Passos principais do algoritmo:

1. Sorteia-se M árvores de N cenários. Com isso temos como provar que podemos obter um limite inferior para o valor real do problema ($F(x, \eta)$)

$$L_{NM} = \frac{1}{M} \sum_{m=1, \dots, M} \hat{v}_N^m \quad \hat{v}_N^m = \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1, \dots, N} F(x, \xi^{nm}) \right\}$$

1. Usando alguma das soluções x obtidas em 1 (no pior caso m soluções) podemos obter uma estimativa para o limite superior

$$U_{NT}(\hat{x}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1, \dots, T} \hat{f}_N^t(\hat{x}) \quad \hat{f}_N^t(\hat{x}) = \frac{1}{\bar{N}} \sum_{n=1, \dots, \bar{N}} F(\hat{x}, \xi^{nt})$$

Sample Average Approximation

Indo além no processo de amostragem (Shapiro and Homem-de-Mello, 1998)

Pode-se embutir o processo de amostragem de árvores de cenário em uma análise baseada em simulação de Monte Carlo. Tal método é conhecido como *Sample Average Approximation*.

Passos principais do algoritmo:

3. Com uma estimativa para o limite superior e para o limite inferior, temos como estimar o *gap máximo* entre nossa estimativa e o valor real do problema.

$$GAP_{NM\bar{N}T}(\hat{x}) = U_{\bar{N}T} - L_{NM}$$

Observações:

- Podemos usar as amostras para calcular **intervalos de confiança** para as estimativas;
- Se definirmos graus de precisão previamente, **podemos estimar o número mínimo de amostras** necessárias (Oliveira e Hamacher, 2012);

Geração de cenários

Métodos de geração de cenários

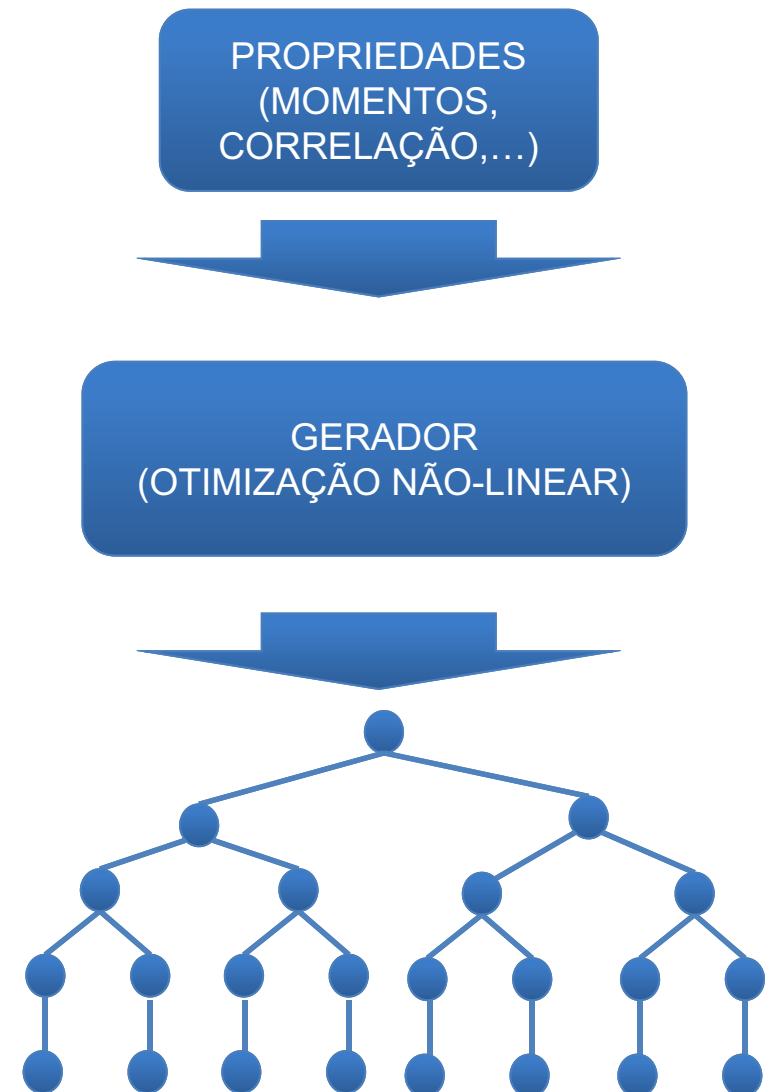
Moment-matching: otimização não-linear para gerar árvores com momentos pré-definidos (Høyland e Wallace (2001))

1. *Pros:*

1. Não precisa conhecer a família da distribuição;
2. Pode-se usar dados históricos e modelos de previsão para obter tais momentos estatísticos.

2. *Contras:*

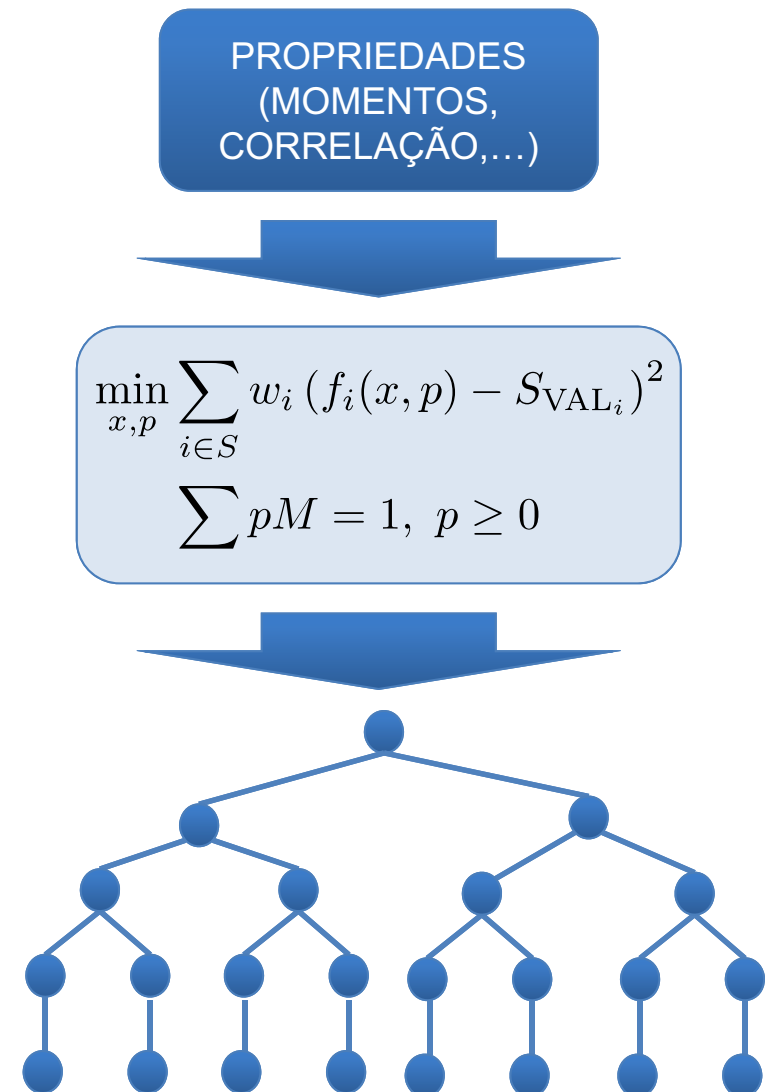
1. Negligencia informação sobre distribuição, se disponível;
2. Gera problemas altamente não-lineares;



Geração de cenários

Moment matching (Hoyland & Wallace (2001))

- Consiste de um problema de otimização onde os valores das variáveis aleatórias e as probabilidades são **variáveis**.
- As propriedades são expressas como funções dessas variáveis
- O objetivo é minimizar a distância (usualmente L_2) dessas propriedades aos seus valores-meta
- Altamente não-linear e não-convexo
- Funciona bem para pequenas árvores.
- A otimização é **pouco especificada**.



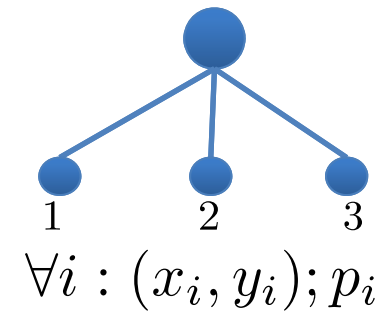
Geração de cenários

Moment matching

EX (Hoyland & Wallace (2001)):

São conhecidos:

$\mathbb{E}[x]$, $\mathbb{E}[y]$, $\mathbb{E}[x^2]$, $\mathbb{E}[y^2]$ e $Cov(x, y)$



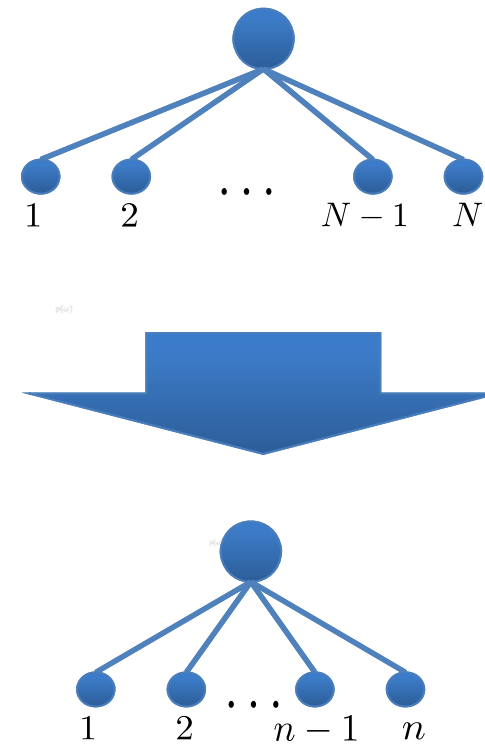
$$\min_{x, y, p} \left(\sum_i p_i x_i - \mathbb{E}[x] \right)^2 + \left(\sum_i p_i y_i - \mathbb{E}[y] \right)^2 + \left(\sum_i p_i x_i^2 - \mathbb{E}[x^2] \right)^2 +$$
$$\left(\sum_i p_i y_i^2 - \mathbb{E}[y^2] \right)^2 +$$
$$\left(\sum_i p_i (x_i - \mathbb{E}[x]) (y_i - \mathbb{E}[y]) - cov(x, y) \right)^2$$

$$\text{s.a: } \sum_i p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, 3$$

Geração de cenários

Redução de cenários (Dupačová et. al 2003)

- Inicia-se com uma distribuição de probabilidade discreta \mathbf{P} (uma árvore de cenários!) geralmente amostrada de algum processo estocástico.
- O objetivo é encontrar uma outra distribuição de probabilidade discreta \mathbf{Q} (uma **árvore menor**) de tamanho pré-definido, a qual é a mais próxima de \mathbf{P} .
- Tal proximidade é medida segundo **métricas do tipo Fortet-Mourier**
 - A métrica é absolutamente independente do método de otimização utilizado.



Geração de cenários

Redução de cenários (Dupačová et. al 2003)

A avaliação de tais distâncias envolve a solução de um problema linear de transporte;

São usadas regras **heurísticas** para decidir quais cenários serão removidos de **P** para que se obtenha **Q**.

- *Backward Reduction*
- *Forward Selection* – muito lento para árvores grandes
- *Simultaneous Backward Reduction* – resultados melhores que a backward reduction, porém mais lenta.
- *Fast Forward Selection* – melhoria do Forward selection, em geral gera as melhores árvores

Alguns resultados interessantes:

- 50% dos cenários implicam em 90% a precisão relativa
- 2% dos cenários implicam em 50% de precisão relativa

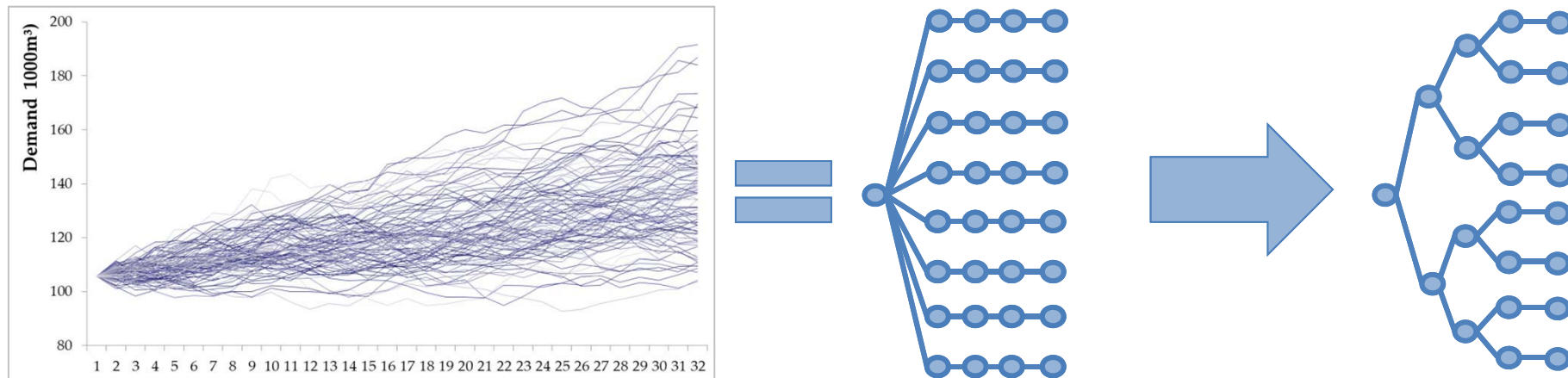
Geração de cenários

Fazendo uma árvore de um a partir de um “fan” (Heitsch e Römisch, 2003)

Em geral, os dados estão disponíveis em forma de sequências ou caminhos (paths)

Quando combinados, eles formam um ventilador e não uma árvore!

- Precisamos criar nós aglutinando caminhos, de forma a criar uma árvore.



Baseia-se nas mesmas ideias de **redução de cenário**, ou seja, minimizando distâncias medidas por métricas do tipo Fortet-Mourier e baseando-se em heurísticas para a seleção/construção dos nós

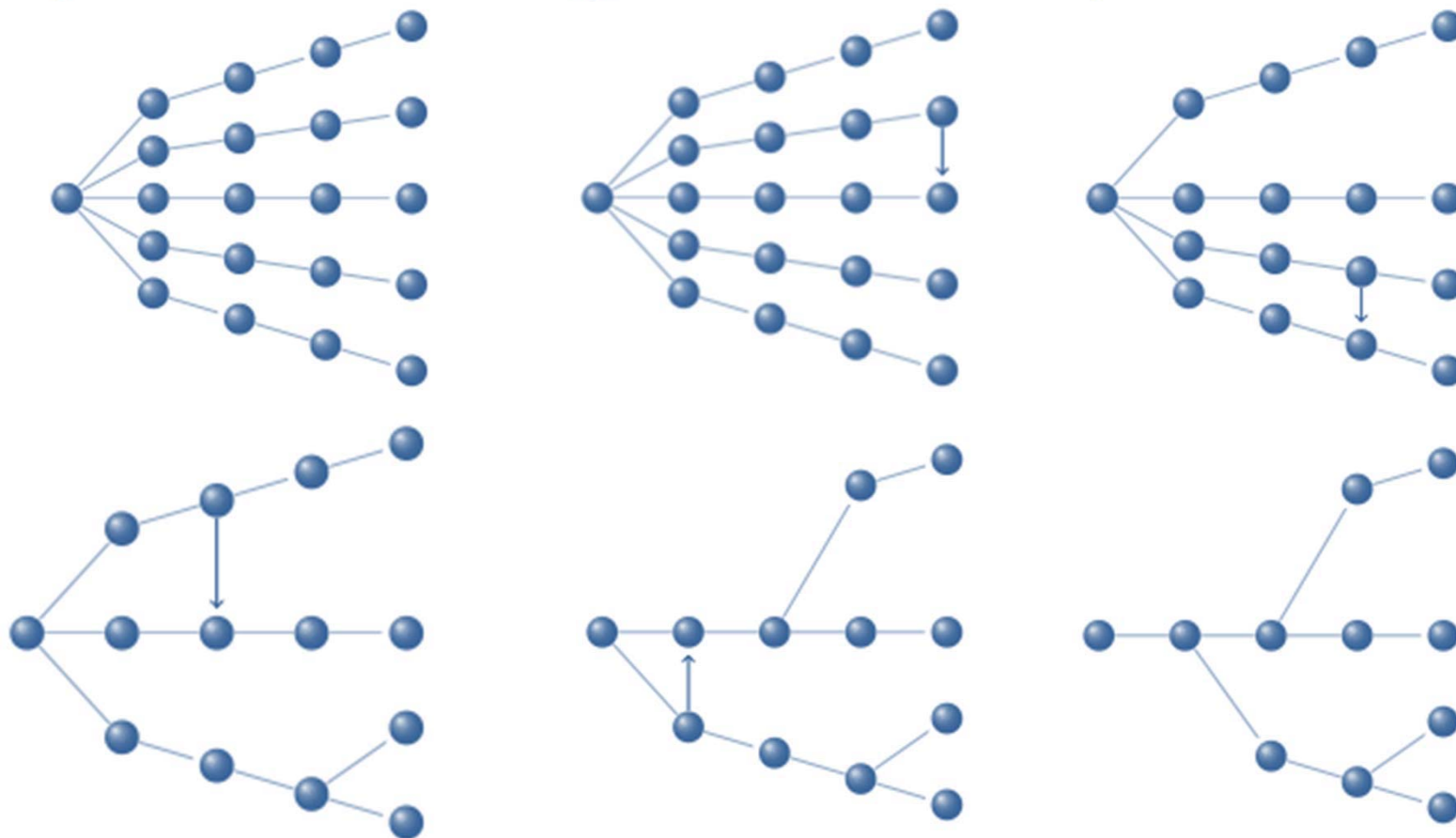
Alguns resultados empíricos:

- 15% dos nós dão 60% de precisão
- 6% dos nós dão 50% de precisão

Geração de cenários

Fazendo uma árvore de um a partir de um “fan” (Heitsch e Römisch, 2003)

Exemplo: Construção de trás-para-frente (Backward)



Geração de cenários

Medindo a qualidade dos cenários

A pergunta que devemos ter em mente quando geramos cenários para o nosso problema é a seguinte: **o quão boa é essa árvore de cenários?**

Tal qualidade depende de basicamente de **dois fatores**:

1. Erro

- Nós usamos uma aproximação da distribuição real, e, portanto muito provavelmente obteremos soluções sub-ótimas
- **Não é trivial** de se medir o erro.

2. Estabilidade

- Se nós gerarmos várias árvores, as soluções não deveriam ser muito diferentes.
- Estabilidade da **solução** vs. estabilidade da **função objetivo**

Geração de cenários

Um pouco de notação:

Seja o problema original (“não-resolvível”)

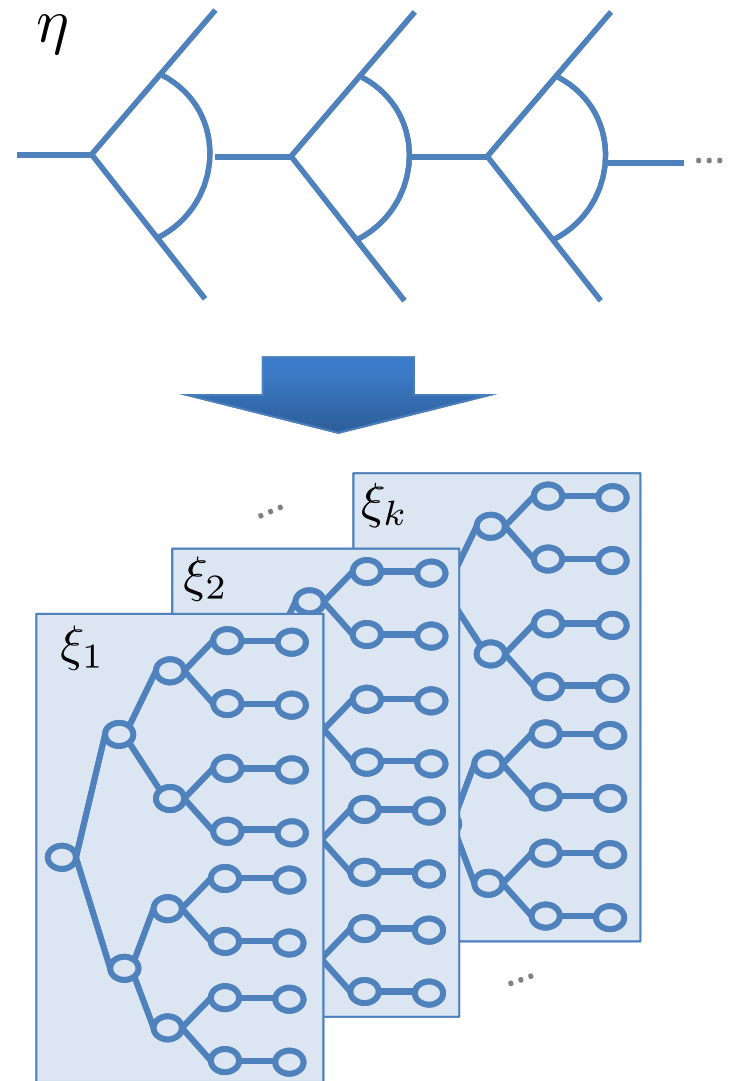
$$\min_{x \in X} F(x, \eta)$$

Que é substituído pelo problema baseado em cenários:

$$\min_{x \in X} F(x, \xi)$$

Para testar estabilidade, nós geramos diversas árvores de cenário ξ_k , $k = 1, \dots, n$, cada uma nos levando a soluções

$$x_k^* = \arg \min_{x \in X} F(x, \xi_k)$$



Geração de cenários

Pflug (2001) define **erro de aproximação** causado por ξ_k como sendo

$$\begin{aligned} e(\eta, \xi_k) &= F(\arg \min_{x \in X} F(x, \xi_k), \eta) - F(\arg \min_{x \in X} F(x, \eta), \eta) \\ &= F(x_k^*, \eta) - \min_{x \in X} F(x, \eta) \end{aligned}$$

Para calcular tal erro precisaríamos:

- Ser capazes de avaliar uma solução na função objetivo original
 - Pode ser aproximado por intermédio de **simulação**

$$F(x_k^*, \eta)$$

- Ser capazes de resolver o problema original
 - Impossível! Do contrário não precisaríamos de cenários!

$$\min_{x \in X} F(x, \eta)$$

Geração de cenários

Avaliando estabilidade:

Assuma que nós possuímos um simulador para avaliar $F(x_k^*, \eta)$

Isso permite:

- comparar duas soluções x_1^* e x_2^*
- comparar dois métodos de geração de cenários distintos
- testar estabilidade **out-of-sample** (“por fora da amostra”):
 1. Gera-se um conjunto de árvores $\xi_k, k = 1, \dots, n$
 2. Resolve-se os problemas usando as árvores \rightarrow soluções x_k^*
 3. Testa-se as soluções buscando observar se:

$$F(x_k^*, \eta) \cong F(x_l^*, \eta)$$

Geração de cenários

Avaliando estabilidade:

Observar que temos:

$$F(x_k^*, \eta) \cong F(x_l^*, \eta)$$

Implica em termos:

$$e(\eta, \xi_k) \cong e(\eta, \xi_l)$$

Que é possível demonstrar que implica em:

$$e(\eta, \xi_k) \cong 0$$

- Sem estabilidade temos um problema **grave!**
- Estabilidade presume que **diferentes rodadas** do método de geração gerarão **árvores distintas**.
- Pode-se pensar no mesmo teste considerando árvores de **tamanhos distintos**
 - Técnica para determinar tamanho de árvore

Geração de cenários

Avaliando estabilidade:

Outro tipo de estabilidade a ser avaliada é o que chamamos de estabilidade **in-sample**, que é definida como:

$$F(x_k^*, \xi_K) \cong F(x_l^*, \xi_l)$$

que é equivalente a:

$$\min_x F(x, \xi_K) \cong \min_x F(x, \xi_l)$$

- Significa que estamos preocupados com a estabilidade do valor da função objetivo reportado pelo **próprio problema**
- Não há **conexão direta** entre os dois tipos de estabilidade
- Sem esta estabilidade, não há como termos confiança na performance reportada pelas soluções baseadas em cenários.

Geração de cenários

Avaliando estabilidade:

O que significa não termos estabilidade?

- Sem estabilidade → **decisões dependem da árvore gerada**

O que podemos fazer se for o caso?

- **Melhorar** o método de geração
- **Aumentar** o número de cenários
- Gerar várias árvores e várias soluções e, “de alguma forma” escolher a melhor solução.

Para mais informações sobre tratamentos teóricos sobre estabilidade: Heitsch et. al (2006)

Geração de cenários

Take-aways

- Geração de cenários é uma parte importantíssima, porém **largamente negligenciada**, de otimização sob incerteza.
- Um método de geração de cenários ruim pode **arruinar** a qualidade da solução de um modelo de otimização
- Existe atualmente uma **ampla gama de métodos** sendo propostos na literatura, porém é preciso avaliar o nível de adequação
 - Depende de o que se tem de dados disponíveis, como a incerteza pode ser modelada, ect.
- Questões em aberto:
 - Existe um método de geração de cenário universalmente bom?
 - Qual é estrutura ótima da árvore de cenários? (larga vs. longa)

Linhas de pesquisa

O que a gente vem fazendo até então:

Desenvolvimentos teóricos

- Aproximação por média amostral para problemas 2 estágios;
- Aceleração de algoritmos baseados em decomposição de Benders;
- Métodos de decomposição para problemas não-convexos baseados em decomposição Lagrangeana;
- Consistência temporal de medidas de risco;
- Desenvolvimento de metodologias para avaliação de árvores de cenário;
- Associação de medidas de risco e métodos de decomposição.

Linhas de pesquisa

O que a gente vem fazendo até então:

Aplicações práticas

- Planejamento do refino sob incerteza (Leiras et. al, 2013; Ribas et. al, 2012; Leiras et. al, 2011; Carneiro et. al, 2010, Ribas et. al, 2010, Leiras et. al, 2010a, 2010b)
- Programação do atracamento de navios e bombeio de petróleo sob incerteza na chegada dos navios;
- Planejamento estratégico da cadeia de petróleo (Oliveira et. al, 2013; Oliveira e Hamacher, 2012a, 2012b)
- Planejamento estratégico da cadeia de distribuição de hidrogênio;
- Desenho da cadeia de distribuição de biodiesel sob incerteza na produtividade agrícola familiar (Leão et. al 2011);
- Gestão de carteira de ativos sob incerteza;
- Despacho elétrico sob incerteza com critérios de segurança (Street et. al, 2011)

Linhas de pesquisa

O que a gente vem fazendo até então:

Formação de RH

- Antecedentes
 - Mini curso de otimização robusta – Prof. Morabito (UFSCAR)
 - Curso de Otimização Estocástica – Prof. Tomei (PUC-Rio), Prof. Bortolossi (UFF) e Prof. Pagnoncelli (UAI - Chile)
- Curso de pós-graduação em otimização sob incerteza todo primeiro semestre na PUC-Rio
 - Otimização Estocástica, Otimização Robusta, Métodos de Decomposição...
- Mini-cursos no tema (PUC-Rio, Åbo Akademy, Carnegie Mellon,...)

Perspectivas futuras

O que tem de “quente” em termos de pesquisa

■ Modelagem

- Formulações eficientes para problemas multi-estágios;
- Consideração de medidas de risco em problemas multi-estágio;

■ Representação

- Disseminação de técnicas formais de geração de cenários no meio industrial;
- Aprimoramento dos métodos de geração de cenários e comparação sistemática entre os métodos;
- Desenvolvimento das técnicas atuais de redução de cenários para multi-estágio;
- Tratamento de incerteza endógena;
- Estruturas ótimas para árvores de cenários.

Perspectivas futuras

O que tem de “quente” em termos de pesquisa

■ Métodos

- Disseminação das técnicas modernas existentes no contexto industrial;
- Novas técnicas de aceleração para os atuais métodos de decomposição;
- Extensão ao caso multi-estágio;
- Paralelização → Cloud computing;

■ Otimização Robusta

- Otimização robusta ajustável;
- Robustez com relação a distribuição de probabilidades;
- Otimização robusta multi-estágio;

Introdução a Otimização Estocástica

Prof. Fabrício Oliveira, D.Sc.
fabricio.oliveira@puc-rio.br

Prof. Silvio Hamacher, D.Sc.
hamacher@puc-rio.br

Referências bibliográficas

Links disponíveis em www.labnexo.com

1. LEIRAS, A; RIBAS, G; HAMACHER, S; ELKAMEL, A. **Tactical and Operational Planning of Multirefinery Networks under Uncertainty: An Iterative Integration Approach.** INDUSTRIAL & ENGINEERING CHEMISTRY RESEARCH | 2013
2. OLIVEIRA, F; GUPTA, V; HAMACHER, S; GROSSMANN, IE. **A Lagrangean Decomposition Approach for Oil Supply Chain Investment Planning under Uncertainty with Risk Considerations.** COMPUTERS & CHEMICAL ENGINEERING | 2013
3. OLIVEIRA, F; HAMACHER, S **Optimization of the Petroleum Product Supply Chain under Uncertainty: A Case Study in Northern Brazil** INDUSTRIAL & ENGINEERING CHEMISTRY RESEARCH | 2012
4. OLIVEIRA, F; HAMACHER, S. **Stochastic Benders Decomposition for the Supply Chain Investment Planning Problem under Demand Uncertainty** PESQUISA OPERACIONAL (IMPRESSO) | 2012
5. RIBAS, GP; HAMACHER, S; LEIRAS, A. **Operational Planning of Oil Refineries under Uncertainty Special Issue: Applied Stochastic Optimization.** IMA JOURNAL OF MANAGEMENT MATHEMATICS (PRINT) | 2012
6. LEÃO, RRCC; HAMACHER, S; OLIVERIA, F. **Optimization of Biodiesel Supply Chains Based on Small Farmers: A Case Study in Brazil** BIORESOURCE TECHNOLOGY | 2011

Referências bibliográficas

Links disponíveis em www.labnexo.com

7. LEIRAS, A; RIBAS, GP; HAMACHER, S; ELKAMEL, A. **Literature Review of Oil Refineries Planning under Uncertainty.** INTERNATIONAL JOURNAL OF OIL, GAS AND COAL TECHNOLOGY (ONLINE) | 2011
8. CARNEIRO, MC; RIBAS, GP; HAMACHER, S. **Risk Management in the Oil Supply Chain: A CVaR Approach.** INDUSTRIAL & ENGINEERING CHEMISTRY RESEARCH | 2010
9. RIBAS, GP; HAMACHER, S; STREET, A. **Optimization under Uncertainty of the Integrated Oil Supply Chain using Stochastic and Robust Programming.** INTERNATIONAL TRANSACTIONS IN OPERATIONAL RESEARCH | 2010
10. LEIRAS, A; HAMACHER, S; ELKAMEL, A. **Petroleum Refinery Operational Planning using Robust Optimization.** ENGINEERING OPTIMIZATION (PRINT) | 2010
11. LEIRAS, A; ELKAMEL, A; HAMACHER, S. **Strategic Planning of Integrated Multirefinery Networks: A Robust Optimization Approach Based on the Degree of Conservatism.** INDUSTRIAL & ENGINEERING CHEMISTRY RESEARCH | 2010

Referências bibliográficas

12. DUPAČOVÁ, J., GRÖWE-KUSKA, N., & RÖMISCH, W.; **Scenario reduction in stochastic programming.** MATHEMATICAL PROGRAMMING | 2003
13. HEITSCH, H., RÖMISCH, W., & STRUGAREK, C.; **Stability of multistage stochastic programs.** SIAM JOURNAL ON OPTIMIZATION | 2006
14. HØYLAND, K., & WALLACE, S. W.; **Generating scenario trees for multistage decision problems.** MANAGEMENT SCIENCE | 2001
15. PFLUG, G. C.; **Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization.** MATHEMATICAL PROGRAMMING | 2001
16. SANTOSO, T.; AHMED, S.; GOETSCHALCKX, M.; SHAPIRO, A., **A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty.** EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH | 2005
17. SHAPIRO, A., & HOMEM-DE-MELLO, T. **A simulation-based approach to two-stage stochastic programming with recourse.** MATHEMATICAL PROGRAMMING. | 1998
18. SCHÜTZ, P.; TOMASGARD, A.; AHMED, S., **Supply chain design under uncertainty using sample average approximation and dual decomposition.** EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH | 2009