

## MODELO MATEMÁTICO E MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO DE CERVEJA: UM TANQUE E MÚLTIPLAS LINHAS DE ENVASE

**Tamara A. Baldo**

Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13560-970, São Carlos-SP, Brasil  
e-mail: tamara@icmc.usp.br

**Maristela O. Santos**

Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13560-970, São Carlos-SP, Brasil  
e-mail: mari@icmc.usp.br

**Bernardo Almada-Lobo**

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Dr. Roberto Frias s/n, 4200-465, Porto, Portugal  
e-mail: balobo@fe.up.pt

**Reinaldo Morabito**

Universidade Federal de São Carlos - Departamento de Engenharia de Produção  
Via Washington Luiz, km.235, 13565-905, São Carlos-SP, Brasil  
e-mail: morabito@ufscar.br

### Resumo

Este trabalho apresenta um modelo matemático para o problema da programação da produção em indústrias cervejeiras, considerando um tanque de fermentação/maturação e múltiplas linhas de envase. O processo de produção de cerveja pode ser dividido em dois principais estágios: preparação do líquido e envase. O tempo de preparação do líquido na indústria cervejeira é o grande responsável pela demora de vários dias envolvidos no processo de produção, enquanto na indústria de refrigerantes este tempo é de no máximo algumas horas. O modelo matemático apresentado neste trabalho considera estes estágios de forma acoplada, diferentemente do que ocorre na prática, pois os estágios são analisados separadamente pelas indústrias. O modelo foi testado com instâncias geradas com base em dados reais. A dificuldade de resolução do modelo motivou o desenvolvimento de uma heurística para o problema com base na formulação matemática. Os resultados são analisados e a abordagem apresenta-se promissora.

**Palavras chave:** *modelo matemático, indústria cervejeira, planejamento e sequenciamento da produção.*

### Abstract

This paper presents a mathematical model for lot sizing and scheduling problem in brewery industries, considering a fermentation/maturation tank and multiple filling lines. The beer production process may be divided into two major stages: the preparation and the bottling of the liquids. The preparation times of the liquids in brewery industry is the greatest responsible for the delay of several days, while in soft drink industries these times are few hours. The mathematical model presented in this paper considers these stages integrated, differing what occurs in practice, where the stages are analyzed separately by industries. The model was tested with problem instances generated based on real data. The difficulty by solving the model motivated the development of a heuristic method for the problem based on the mathematical formulation. The results are analyzed and the approach has presented to be promised.

**Keywords:** *mathematical model, brewery industry, lot sizing and scheduling problem.*

## 1 Introdução

O capitalismo intrínseco na atual sociedade reflete de diversas maneiras no setor industrial e com isso exigindo cada vez mais rapidez, eficiência e eficácia na elaboração e execução dos planos de produção. Em uma indústria, o PCP (planejamento e controle da produção) tem por finalidade coordenar e administrar os recursos que estão disponíveis e são utilizados durante o processo de produção, tendo como principal objetivo a execução da maneira mais eficiente e eficaz possível o que foi estabelecido para os níveis hierárquicos: estratégico, tático e operacional. O nível estratégico envolve as decisões de longo prazo, definindo os objetivos mais gerais da empresa, sendo as decisões deste nível as que envolvem altos investimentos. O nível tático abrange as decisões de médio prazo e está vinculado com a utilização efetiva de recursos existentes, com o objetivo de cumprir as metas determinadas no planejamento estratégico, definindo como irá acontecer a produção, por exemplo: quais produtos serão produzidos em um determinado período (dimensionamento de lotes). O nível operacional está relacionado ao dia-a-dia da produção (curto prazo), cujo objetivo é definir as prioridades do nível anterior, por exemplo, quais as ordens de produção dos itens e quais as respectivas máquinas irão fazê-los (programação da produção), entre outros. As decisões envolvidas durante o dimensionamento de lotes e programação da produção em indústrias cervejeiras é o objetivo principal deste trabalho, que visa o desenvolvimento de um modelo matemático, cuja resolução oferece planos de produção factíveis.

Para Fleischmann and Meyr (1997), um modelo realístico de dimensionamento de lotes deve considerar o processo produtivo com recursos limitados, sendo estes utilizados durante a preparação de máquina, produção dos itens demandados, limpeza de máquina, entre outros fatores. Antes do início da produção de determinado item, a máquina precisa ser preparada e esta preparação pode depender ou não da sequência dos produtos em questão. Por exemplo, em uma cervejaria, se o último produto fabricado na linha de envase for uma cerveja de puro malte e a próxima cerveja contenha griz de milho, o tempo de preparação é de 20 minutos (aproximadamente), porém se considerarmos a sequência contrária, o tempo de preparo é de uma hora e meia, supondo mesmo tipo de embalagem para ambas cervejas, pois se as embalagens mudarem, este tempo pode se tornar ainda maior. Este processo envolve o dimensionamento e o sequenciamento dos lotes de produção (nível operacional). Revisões da literatura sobre tais modelos podem ser encontradas em Drexl and Kimms (1997) e Staggmeier and Clark (2001).

Na literatura, existe diversos trabalhos que abordam modelos matemáticos para o problema de dimensionamento de lotes (Billington et al., 1986; Trigeiro et al., 1989) e sequenciamento da produção (Fleischmann, 1994; Fleischmann and Meyr, 1997). Os modelos CLSP (*Capacitated Lot-sizing Problem*) têm o horizonte de planejamento dividido em períodos de mesmo tamanho, onde para cada período há especificação de capacidade limitada dos recursos e demanda de cada item, sendo as variáveis de decisão deste modelo as quantidades de produção em cada período. Estes modelos não consideram o sequenciamento da produção. Revisões da literatura sobre tais modelos podem ser encontradas em Jans and Degraeve (2007). Suerie (2005) destaca alguns modelos presentes na literatura que consideram o sequenciamento da produção, dentre estes encontram-se: DLSP, CSLP, PLSP e o GLSP. O DLSP (*Discrete Lot-Sizing and Scheduling Problem*) tem por pressuposto a divisão de cada período, denominado agora macro-período; esta divisão resulta em vários micro-períodos de tamanho pré-definido (Fleischmann, 1994). O DLSP assume a produção 'tudo-ou-nada': um item será produzido por micro-período somente se esta produção utilizar toda a capacidade disponível. Os modelos CSLP (*Continuous Setup Lot-Sizing Problem*) descartam a produção 'tudo-ou-nada', ou seja, os lotes podem ter tamanhos variados, entretanto, os demais pressupostos fundamentais são os mesmos dos DLSP. Os modelos PLSP (*Proportional Lot-Sizing and Scheduling Problem*) permitem a utilização da capacidade dos recursos por mais de um item durante o mesmo micro-período. O GLSP (*General Lot-Sizing and Scheduling Problem*) considera o tamanho de cada micro-período flexível. Revisões da literatura e comparações sobre estes

modelos podem ser encontradas em Drexl and Kimms (1997) e Suerie (2005).

Os problemas integrados de dimensionamento e o sequenciamento de lotes de produção são comumente encontrados em processos industriais e estes envolvem enormes desafios, pois cada indústria possui suas peculiaridades (sazonalidade de demanda e insumos, perecibilidade, produtos que disputam recursos em comum, etc). Exemplos de trabalhos da literatura que abordam o problema de forma integrada aplicado a alguns setores industriais são: fundições (Araujo et al., 2007), suplementos para nutrição animal (Toso et al., 2009), produção de papéis (Santos and Almada-Lobo, 2012), refrigerantes (Ferreira et al., 2012; Toledo et al., 2012), entre outros.

Dependendo da estrutura dos itens demandados, a produção pode acontecer em um único estágio (monoestágio) ou em vários estágios (multiestágio). Na produção monoestágio (Trigeiro et al., 1989), a demanda é classificada como independente. Neste caso, os itens finais não dependem da produção dos itens intermediários (peças) e/ou não passam por estágios intermediários de fabricação. Na produção multiestágio (Billington et al., 1986), um item final necessita de itens intermediários ou passam por estágios intermediários. O problema abordado nesta pesquisa é multiestágio, visto que, para o processo de envase começar, é necessário que o líquido esteja pronto. O estágio de preparação dos líquidos ocorre, na maior parte do tempo, dentro de tanques de fermentação e maturação. Assim que os líquidos ficam prontos, escoam para que sejam envasados.

Estudos preliminares mostraram algumas semelhanças entre as indústrias cervejeiras e as de refrigerantes durante a fase de envase (estágio II), presente em ambas as indústrias. O problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção encontrado na indústria de refrigerantes, em geral, tem sua produção dividida em dois estágios principais: preparação dos xaropes e o envase. A duração de ambos os estágios é de algumas horas, diferentemente da produção de cerveja que tem duração de vários dias. Descrições pormenorizadas sobre o processo de produção de bebidas podem ser encontradas em Ferreira et al. (2008), Ferreira et al. (2012) e Toledo et al. (2012). Modelos específicos para representá-lo, são apresentados em Ferreira et al. (2009) e Ferreira et al. (2012). Neste trabalho, algumas restrições presentes em Ferreira et al. (2009) foram utilizadas para a modelagem do estágio II. Ferreira et al. (2009) propõem um modelo de otimização baseado no GLSP, proposto por Fleischmann and Meyr (1997), e heurísticas do tipo *relax-and-fix* foram utilizadas para a resolução do problema. Métodos de resolução baseados em programação inteira mista e técnicas de reformulação aplicadas a modelos matemáticos são apresentados em Pochet and Wolsey (2006).

Um dos trabalhos que mais se assemelham ao que esta pesquisa propõe, porém ainda bastante distante de nossos objetivos, é o de Guimarães et al. (2012). Neste apresenta-se um estudo de caso na Unicer Bebidas S.A. de Portugal, onde os autores tratam o problema de planejamento da produção desta indústria de bebidas (refrigerantes e cerveja). Os autores consideram a atribuição e dimensionamento de lotes de produção em um ambiente multi-planta (cada planta tem um conjunto de linhas de envase e empacotamento para cervejas e refrigerantes), incluindo a possibilidade de transferência de produtos entre as plantas.

Este estudo tem o intuito de apresentar um modelo matemático de programação inteira mista (em inglês *Mixed Integer Problem* - MIP) para o problema da produção em indústrias cervejeiras, considerando um tanque de fermentação/maturação e múltiplas linhas de envase. Os MIPs de grandes dimensões são, em geral, difíceis de serem resolvidos na otimalidade ou próximo dela. Esta dificuldade traz motivação de novos métodos de resolução à literatura, principalmente métodos heurísticos. Neste apresenta-se um método heurístico para a resolução do problema. Este trabalho está baseado em um estudo de caso em uma indústria cervejeira de Portugal e destaca-se as similaridades com as indústrias brasileiras.

As seções seguintes deste trabalho foram organizadas de forma que na Seção 2 encontra-se a descrição do problema. A Seção 3 traz o modelo matemático e a heurística proposta para a resolução do problema. Na Seção 4 aborda-se os resultados e a descrição das instâncias utilizadas para os testes computacionais. E, por fim, na Seção 5 encontra-se a conclusão.

## 2 Descrição do problema

Para melhor compreensão dos processos envolvidos durante a produção de cerveja, foram realizadas visitas à algumas cervejarias do Brasil e de Portugal. As empresas apresentam diversas semelhanças, não apenas durante o processo produtivo, como também na forma como tentam prever a demanda por meio de estudos baseados em históricos (informações de vendas anteriores) e análises do atual mercado. Por meio desta previsão de demanda, o planejamento ocorre do final para o início do horizonte, primeiramente detecta-se quantos produtos finais serão necessários em cada período, depois, calcula-se a quantidade de líquido necessária para que, ao ser envasado, resulte na quantidade de itens demandados; após isso, aloca-se os tanques para receber o mosto, que sofre o processo de fermentação e maturação, ao final deste processo tem-se o líquido pronto para ser filtrado e, depois, envasado.

Para cada tipo de cerveja existe um processo de produção distinto e específico. Porém, pode-se dizer que todas passam pelas mesmas etapas de produção, distinguindo-se, principalmente, na utilização de determinadas matérias-primas e tempos de processamento em cada uma das etapas. Sendo assim, será descrito o processo de fabricação da cerveja de forma geral, com os ingredientes utilizados em cervejas do tipo *Lager*. Para tal, há quatro ingredientes fundamentais: água, malte, lúpulo e leveduras (Figura 1). Às cervejas mais consumidas no Continente Americano e em Portugal, há acréscimo também de cereais não maltados, por exemplo, griz de milho.

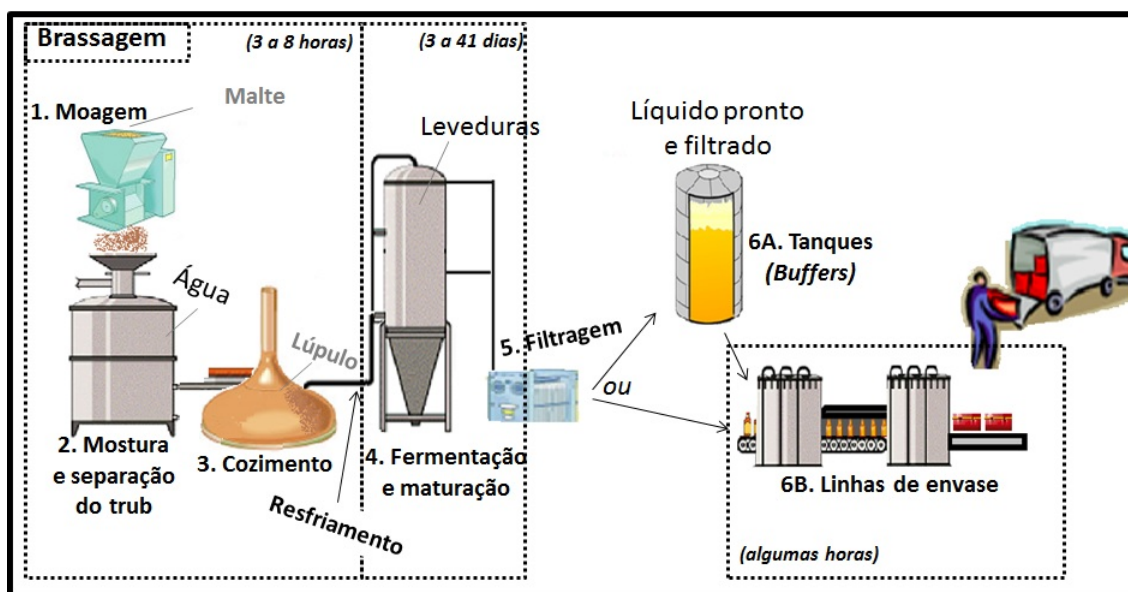


Figura 1: Processo de produção de cerveja.

O processo de fabricação de cerveja pode ser dividido basicamente em duas etapas: a preparação do líquido (estágio I) e o envase (estágio II). Durante o estágio I (Figura 1, etapas de 1 a 5) ocorre a preparação da cerveja, que ao final do processo, encontra-se pronta para ser envasada. Esta etapa pode ser subdividida em alguns processos:

(i) Brassagem (Figura 1, etapas de 1 a 3): os grãos de malte (e adjuntos) são moídos, adiciona-se água e inicia-se vários processos térmicos. Durante esta etapa acrescenta-se também o lúpulo. Ao final da brassagem obtém-se o mosto cervejeiro. A duração média de todo o processo é de 3 a 8 horas, dependendo do tipo de cerveja a ser fabricada.

(ii) Fermentação e Maturação (Figura 1, etapa 4): são adicionadas leveduras ao mosto e estas transformam os açúcares em dióxido de carbono e etanol. Os fatores mais importantes a serem controla-

dos são: temperatura de fermentação, duração, contrapressão, escolha e a quantidade de leveduras a ser utilizada. Ao término, a levedura flocula (sedimentando ou flutuando) sendo recolhida. O processo de maturação tem início logo após retirada das leveduras, podendo acontecer no mesmo tanque utilizado para o processo de fermentação, como ocorre nas cervejarias estudadas nesta pesquisa. A fermentação e a maturação são consideradas o gargalo da produção, pois a duração média é de 3 a 41 dias (este valor depende do tipo de cerveja que está sendo fabricada).

(iii) Filtração (Figura 1, etapa 5): ao término da maturação, a cerveja precisa ser filtrada. A cerveja pode esperar dentro dos próprios tanques para ser envasada. Ou ainda, ser filtrada e esperar em outro(s) tanque(s) (uma espécie de *buffer*, veja a Figura 1, etapa etapa 6.A), liberando assim o tanque de fermentação/maturação. O processo de filtração tem por objetivo dar o acabamento “brilhante”, eliminando quase que totalmente as leveduras. Após o líquido ser filtrado, este já está pronto para ser envasado.

O envase (estágio II), Figura 1 - 6.B, é a fase final do processo, onde a cerveja será colocada dentro de garrafas de vidro, latas de alumínio, barris, etc. Logo, a cerveja é a mesma em qualquer uma das embalagens, não alterando seu paladar e aroma. Após o enchimento, inicia-se o processo de pasteurização, principalmente quando são envasadas em garrafas ou latas (no barril, normalmente não é pasteurizada e, por isso, recebe o nome de chope). A pasteurização é um processo térmico no qual a cerveja é submetida a um aquecimento e posterior resfriamento, para garantir maior estabilidade ao produto. Portanto, a cerveja está pronta para ser entregue às distribuidoras.

Existem algumas particularidades durante o processo produtivo, como por exemplo, um tanque pode abastecer mais de uma linha de envase, entretanto, uma linha pode receber líquido de apenas um tanque por vez. Tanto na linha de envase quanto no tanque, quando há troca de líquidos ou chegada de um novo mosto cervejeiro (respectivamente), é feita uma limpeza. A duração da limpeza dos tanques é em média de algumas horas e independe de qual líquido estava no tanque anteriormente. Porém, o tempo de duração de limpeza (e preparação) das linhas de envase está vinculado a sequência. Todos os tanques possuem uma capacidade máxima (tamanho do tanque) e mínima (devido ao controle de temperatura).

As cervejarias estudadas neste trabalho fazem o planejamento e a programação da produção de cada um dos estágios de maneira desacoplada, onde primeiramente há o planejamento do estágio I e depois a programação do estágio II. Embora não ocorra na prática, estes precisam ser considerados de maneira integrada, pois qualquer decisão em um dos estágios, pode interferir diretamente no outro. Logo, o intuito deste trabalho é apresentar um modelo matemático considerando as decisões de cada estágio de maneira acoplada.

### 3 Modelo matemático e método de solução

Como descrito anteriormente, o processo de produção de cerveja pode ser dividido basicamente em dois estágios: preparação do líquido (estágio I) e envase (estágio II). Durante o estágio I, o gargalo do problema é o processo de fermentação e maturação, responsável por mais de 95% do tempo despendido para a preparação do líquido. Isso ocorre pois quando um tanque é alocado para receber o mosto cervejeiro, este fica durante vários dias dedicados somente a este mosto, até que se complete o processo de fermentação e maturação. O gargalo durante o estágio II, pode-se considerar a etapa de enchimento das embalagens, pois quando ocorre a alocação dos líquidos prontos às suas embalagens, acontece o esvaziamento dos tanques, ou seja, quanto mais rápido for o envase, mais brevemente os tanques são liberados. Sendo assim, para o desenvolvimento do modelo matemático presente nesta pesquisa, partimos do pressuposto que se há um programa de produção para as etapas de fermentação/maturação e envase, o programa de produção para as demais etapas pode ser facilmente derivado. Logo, para o estágio I, assumiu-se (sem perda de generalidade) que os demais processos não envolvidos no gargalo fossem desprezados, pois não interferem diretamente

nas decisões necessárias a serem tomadas durante a programação da produção.

Alguns pressupostos foram necessários para elaboração do modelo matemático, sendo mais um deles a consideração do processo de fermentação e maturação de maneira conjunta, dado que ambos acontecem dentro dos tanques. E, também, o tempo despendido para a limpeza dos tanques, que é previamente conhecido e independente do líquido a ser fabricado. Assim, o estágio I tem duração de no mínimo  $\Delta_t$  macroperíodos, correspondente a 'limpeza/fermentação/maturação'. Outro pressuposto é não permitir a possibilidade dos líquidos serem filtrados e esperarem em outros tanques (*buffers*).

Devido a complexidade do problema abordado e as diversas informações a serem consideradas simultaneamente, fizemos algumas simplificações durante a elaboração do modelo; considera-se apenas um tanque de fermentação/maturação e várias linhas de envase. Estas simplificações permitiram o desenvolvimento de um modelo inicial e em trabalhos futuros pretende-se acoplar múltiplos tanques.

### 3.1 Modelo matemático: T1LM (1 tanque e M linhas de envase)

O modelo matemático considera o horizonte de planejamento dividido em dias para o estágio I (macroperíodos). Para o estágio II, cada macroperíodo foi subdividido em três microperíodos, cujo tamanho corresponde a 8 horas cada (tamanho fixo, assim como nos modelos CSLP). A comunicação entre os estágios é importante, pois estes são modelados de maneira acoplada. Logo, a referência que fornece a ligação entre o macroperíodo  $t$  (estágio I) e os seus respectivos microperíodos  $s$  (estágio II) é feita por meio de  $S_t$  (subconjunto de microperíodos  $s$  que pertencem ao macroperíodo  $t$ ), ou seja, para um determinado  $t$ , os microperíodos  $s$  correspondentes estão no subconjunto  $S_t$  ( $s \in S_t$ ). A motivação desta divisão do horizonte de planejamento, baseia-se na empresa que possui jornadas de trabalho de 8 horas, ocorrendo no máximo uma troca de produtos em cada uma das linhas de envase por jornada. Os parâmetros e variáveis são definidos a seguir.

#### - Conjuntos:

- $T$ : conjunto de macroperíodos do horizonte de planejamento ( $t \in T$ );
- $N$ : conjunto de itens ( $i, j \in N$ );
- $M$ : conjunto de linhas de envase ( $m \in M$ );
- $L$ : conjunto de líquidos ( $l \in L$ );
- $S$ : conjunto de microperíodos ( $s \in S$ );
- $S_t$ : subconjunto de microperíodos pertencentes ao macroperíodo  $t$ ;
- $\gamma_l$ : conjunto de itens que utilizam o líquido  $l$ ;

#### - Parâmetros:

- $\Delta_t$ : quantidade de períodos que o líquido precisa para ser processado (tempo de fermentação/maturação e limpeza dos tanques);
- $d_{it}$ : demanda para o item  $i$  no período  $t$ ;
- $h_{it}^+$ : custo de estocagem de uma unidade do item  $i$  no período  $t$ ;
- $h_{it}^-$ : custo de atraso de uma unidade do item  $i$  no período  $t$ ;
- $a_{mi}$ : tempo que  $m$  leva para envasar uma unidade do item  $i$ ;
- $C_{ms}$ : capacidade (tempo) disponível da envasadora  $m$  no microperíodo  $s$ ;
- $r_{ij}$ : quantidade (litros) necessária do líquido  $l$  a cada unidade do item  $i$ ;
- $b_{mji}$ : tempo de troca na linha de envase  $m$ , do item  $j$  para o  $i$ ;
- $c_{mji}$ : custo de troca na linha de envase  $m$ , do item  $j$  para o  $i$  (quando  $i = j$ ,  $c_{mji} = 0$ );
- $Cap^{min}$ : quantidade mínima de líquido no tanque;
- $Cap^{max}$ : quantidade máxima de líquido no tanque.

#### - Variáveis:

- $Y_{it}^l$ : 1 se o líquido  $l$ , que está no tanque, está pronto período  $t$ , 0 caso contrário;

- $Q_{lt}$ : quantidade total de líquido  $l$  pronto no período  $t$ ;
- $O_{lt}$ : quantidade de líquido  $l$  armazenada no tanque no período  $t$  (independente se este está fermentando, maturando ou pronto);
- $G_{lt}$ : 1 se o tanque está sendo utilizado no final do período  $t$  pelo líquido  $l$ , 0 caso contrário;
- $I_{it}^+$ : quantidade do item  $i$  em estoque no final do período  $t$ ;
- $I_{it}^-$ : quantidade do item  $i$  em atraso no final do período  $t$ ;
- $X_{mis}$ : quantidade produzida do item  $i$ , na envasadora  $m$  durante o microperíodo  $s$ ;
- $Y_{mis}^{II}$ : 1 se a linha de envase  $m$  está preparada para produzir o item  $i$  no microperíodo  $s$ , 0 caso contrário;
- $Z_{mjis}$ : 1 se existe troca, na linha de envase  $m$ , do item  $j$  para o  $i$  no microperíodo  $s$ ; 0 caso contrário (embora o domínio seja real em  $0 \leq Z_{mjis} \leq 1$ , a forma como está modelado permite que  $Z_{mjis} \in \{0, 1\}$ ).

Minimizar

$$\sum_{m \in M} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} c_{mji} Z_{mjis} + \sum_{i \in N} \sum_{t \in T} (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^-) \quad (1)$$

Sujeito a:

(Estágios I e II)

$$O_{lt} = O_{l,t-1} - \sum_{m \in M} \sum_{i \in \gamma_l} \sum_{s \in S_t} r_{li} X_{mis} + Q_{l,t+\Delta_l} \quad l \in L; t \in \{1, \dots, |T| - \Delta_l\} \quad (2)$$

$$O_{lt} = O_{l,t-1} - \sum_{m \in M} \sum_{i \in \gamma_l} \sum_{s \in S_t} r_{li} X_{mis} \quad l \in L; t \in \{|T| - \Delta_l + 1, \dots, |T|\} \quad (3)$$

(Estágio I)

$$O_{l,t-t'} \geq Q_{lt} \quad l \in L; t \in T; t' \in \{1, \dots, \Delta_l - 1\}; (t - t' \geq 0) \quad (4)$$

$$\sum_{t'=0}^{\Delta_l} \sum_{l \in L} Y_{l,t-t'}^I \leq 1 \quad t \in T \quad (5)$$

$$O_{lt} \leq Cap^{max} G_{lt} \quad t \in T; l \in L \quad (6)$$

$$\sum_{l \in L} G_{l,t} \leq 1 \quad t \in T \quad (7)$$

$$G_{l,t-1} \leq Cap^{max} (1 - \sum_{l' \in L} Y_{l',t+\Delta_l}^I) \quad t \in \{1, \dots, |T| - \Delta_l\}; l \in L \quad (8)$$

$$Cap^{min} Y_{lt}^I \leq Q_{lt} \leq Cap^{max} Y_{lt}^I \quad t \in T; l \in L \quad (9)$$

(Estágio II)

$$I_{i(t-1)}^+ + I_{it}^- + \sum_{m \in M} \sum_{s \in S_t} X_{mis} = I_{i(t-1)}^- + I_{it}^+ + d_{it} \quad i \in N; t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N \left[ a_{mi} X_{mis} + \sum_{j=1}^N b_{mji} Z_{mjis} \right] \leq C_{ms} \quad m \in M; s \in S \quad (11)$$

$$X_{mis} \leq \frac{C_{ms}}{a_{mi}} Y_{mis}^{II} \quad m \in M; i \in N; s \in S \quad (12)$$

$$Z_{mjis} \geq Y_{mj(s-1)}^{II} + Y_{mis}^{II} - 1 \quad m \in M; i \in N; j \in N; s \in S \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{mis}^{II} = 1 \quad m \in M; s \in S \quad (14)$$

$$\begin{aligned} I_{it}^+ \geq 0; I_{it}^- \geq 0; Q_{lt} \geq 0; O_{lt} \geq 0; X_{mis} \geq 0; 0 \leq Z_{mjis} \leq 1; \\ Y_{lt}^I \in \{0, 1\}; G_{lt} \in \{0, 1\}; Y_{mis}^{II} \in \{0, 1\}; \\ l \in L; t \in T; s \in S; m \in M; i \in N; j \in N. \end{aligned} \quad (15)$$

A função objetivo (1) visa minimizar os custos de *setup* (a cada microperíodo), estocagem e atraso (a cada macroperíodo). As restrições de acoplamento são dadas por (2) e (3), que representam o balanço da quantidade de líquido no tanque durante o horizonte de planejamento. O tanque enche  $\Delta_l$  macroperíodos antes do líquido ficar pronto. Quando pronto, este está disponível para o envase, logo a quantidade de líquido no tanque será igual a quantidade vinda do macroperíodo anterior subtraindo a utilizada durante o envase. As equações (2) garantem que o tanque só receberá líquido até o macroperíodo  $|T| - \Delta_l$ , pois depois deste, se o tanque receber líquido, ele não ficará disponível para o envase. As equações (3) permitem que o envase ocorra durante  $|T| - \Delta_l + 1$  a  $|T|$  apenas se houver líquido no tanque.

As restrições (4) a (9) representam as decisões envolvidas durante o estágio I. As inequações (4) forçam a quantidade de líquido no tanque permanecer inalterada durante  $\Delta_l - 1$  macroperíodos anteriores a  $t$ , evitando o escoamento durante o período de fermentação e maturação; o líquido está pronto apenas em  $t$  ( $Q_{lt} > 0$ ). As inequações (5) garantem que apenas um tipo de líquido ficará pronto a cada  $\Delta_l$  macroperíodos, ou seja,  $Y_{lt}^l = 1$  apenas uma vez durante (no mínimo)  $\Delta_l$  macroperíodos. Nas inequações (6),  $G_{lt}$  terá valor não nulo enquanto o tanque estiver sendo usado ao final do macroperíodo  $t$ . Em (7), temos a garantia de que se o tanque estiver ocupado, ele ficará ocupado apenas para um líquido. As inequações (8) garantem que um líquido  $l$  ficará pronto em  $t + \Delta_l$  apenas se o tanque não está ocupado em  $t - 1$  para receber o mosto cervejeiro. As inequações (9) garantem que a quantidade de líquido que estará pronta no macroperíodo  $t$  não pode ultrapassar a capacidade máxima do tanque e, também, devido aos sensores de temperatura, a quantidade de líquido não pode ser inferior a  $Cap^{min}$ .

As equações e inequações, referentes as linhas de envase, foram adaptadas de Ferreira et al. (2009) e baseiam-se em algumas considerações dos modelos CSLP. Sendo assim, no estágio II, as restrições (10) representam as equações de balanço de estoque para cada item em cada macroperíodo. As restrições (11) garantem que o tempo de troca de itens e o tempo de preparação na linha de envase não ultrapassem a capacidade disponível a cada macroperíodo. As restrições (12) asseguram que existirá a produção do item  $i$  no microperíodo  $s$  apenas se as variáveis de preparação associadas foi definida. As restrições (13) referem-se a troca de itens na linha, se houver troca do item  $j$  para o item  $i$  no microperíodo  $s \in S_t$ , a variável  $Z_{jits}$  terá valor igual a 1. As restrições (14) asseguram que cada linha de envase esteja prepara para um item a cada microperíodo. O domínio das variáveis estão definidos pelas restrições (15).

### 3.2 Método de solução

A heurística relax-and-fix é um procedimento fundamentado na resolução iterativa de problemas MIPs (Wolsey, 1998). As variáveis inteiras do problema são divididas em  $|C|$  subconjuntos disjuntos (este valor define o número de iterações da heurística). Cada subconjunto  $C_c$  (com  $c = 1, \dots, |C|$ ), agrupam um número pequeno de variáveis inteiras. Para cada iteração  $c$ , somente as variáveis pertencentes a  $C_c$  são definidas como inteiras, as demais variáveis do problema são relaxadas (ou fixadas). O submodelo MIP resultante é então resolvido, porém se este for inviável, o método para. Caso seja viável, as variáveis do subconjunto  $C_c$ , são fixadas em seu valor corrente (ou parte delas). Este procedimento repete-se enquanto os sub-MIPs forem viáveis e todos os  $|C|$  subconjuntos não possuírem suas variáveis fixadas.

A heurística apresentada neste trabalho tem as variáveis inteiras agrupadas por período, de forma que os últimos períodos sejam os primeiros subconjuntos de  $C$ ; esta estratégia é denominada na literatura como *backward* (Toso et al., 2009). As variáveis que formam os  $|C|$  subconjuntos são as  $Y_{lt}^l$  e  $Y_{mis}^l$ . Entretanto, o tamanho dos subconjuntos das variáveis que tem suas condições de integralidade reiterada durante a execução do problema ( $|C_c^r|$ , com  $c = 1, \dots, |C|$ ) e o tamanho dos subconjuntos que tem seus valores fixados ( $|C_c^f|$ , com  $c = 1, \dots, |C|$ ), são diferentes ( $|C_c^r| \neq |C_c^f|$ ), porém  $C_c^f \subseteq C_1^r \cup C_2^r \cup \dots \cup C_c^r$ . Esta técnica é conhecida na literatura por *overlapping* (Wolsey,



1998). A cardinalidade de cada subconjunto  $C_c^r$  é de 11 macroperíodos ( $|C_c^r| = 11$ ), correspondente a uma semana e meia, e de cada  $C_c^f$  de 7 macroperíodos ( $|C_c^f| = 7$ ), correspondente a uma semana.

A ideia geral do procedimento proposto é: na primeira iteração, somente as variáveis dos últimos períodos são mantidas inteiras ( $C_{c=1}^r$ ), as variáveis dos demais períodos são relaxadas e o submodelo é resolvido. Os valores obtidos para as variáveis pertencentes a  $C_{c=1}^f$  são fixados e utilizados até o final do procedimento. Para a próxima iteração ( $c \leftarrow c + 1$ ), as condições de integridade das variáveis pertencentes ao  $c$ -ésimo subconjunto são retomadas ( $C_c^r$ ), e um novo sub-MIP resolvido. Os valores obtidos para as variáveis do subconjunto  $C_c^f$  são fixados e utilizados até o final do procedimento. Este processo é repetido até que todos os valores de  $C_c^f$  (com  $c = 1, \dots, |C|$ ) tenham sido fixados, ou interrompido se algum sub-MIP for inviável.

## 4 Testes computacionais

O modelo TILM proposto e a heurística foram implementados utilizando a linguagem de programação C++, conjuntamente com a biblioteca Concert do *software* de otimização CPLEX (versão 12.2). Os testes computacionais foram realizados em uma máquina com processador Intel(R) Core(TM) 2 Quad e 4 GHz de RAM, cujo sistema operacional é o Windows 7.

Os testes realizados neste trabalho estão fundamentados em instâncias geradas à partir de informações coletadas em uma indústria portuguesa. A indústria possui 5 linhas de envase e produz 47 tipos de produtos diferentes (variando a embalagem e o líquido). No total, são 7 líquidos diferentes de cerveja pronta. O horizonte de planejamento considerado pela empresa é de 3 meses e a cada 15 dias há um novo (re)planejamento da produção. Sendo assim, os demais dados não são explicitamente descritos, de forma a preservar os interesses da empresa.

A partir dos dados fornecidos pela indústria, foram geradas 60 instâncias para os testes computacionais e cada uma delas possui 5 itens. Estas foram agrupadas em 6 classes, contendo 10 instâncias cada (Tabela 1, Classe-A1 a Classe-B3). O tamanho do horizonte de planejamento considerado é de 2 meses. A redução no tamanho do horizonte de planejamento, comparado ao utilizado na empresa, foi motivada com o intuito de reduzir o número de variáveis do problema. A construção das demais classes de problemas estão vinculadas as Classe-A1 e Classe-B1, logo estas serão descritas primeiro.

Para a Classe-A1 e a Classe-B1 foi escolhida aleatoriamente uma entre as 5 linhas de envase especificadas pela empresa; este sorteio foi repetido para cada uma das 20 instâncias. Os 5 itens sorteados de cada instância são produzidos pelo mesmo líquido para a Classe-A1, enquanto para a Classe-B1 são dois líquidos diferentes. A quantidade de líquido (em litros) para cada item foi definida entre os valores da coluna  $r_{li}$  da Tabela 1. O tempo de processamento da máquina é proporcional ao tamanho dos itens; o custo e o tempo de trocas nas linhas de envase, dependem da embalagem, do tamanho do item anterior e da troca de líquidos. Os valores para o  $\Delta_l$  foram estipulados com base na média do tempo de limpeza/fermentação/maturação dos líquidos pertencentes aos dados reais (Tabela 1). A Classe-A2 e a Classe-B2 foram geradas pela duplicação, a Classe-A3 e a Classe-B3 foram gerados a partir da triplicação, do número de linhas de envase das Classe-A1 e Classe-B1, respectivamente.

A demanda dos itens foi gerada proporcionalmente a contribuição da respectiva máquina escolhida para o cumprimento da demanda total. A partir desta contribuição, houve uma variação de 10% (para mais e para menos) e um valor foi sorteado neste intervalo. A demanda gerada está concentrada nas três últimas semanas do horizonte de planejamento. O tanque de fermentação e maturação tem sua capacidade calculada dependendo da demanda de cada instância e a fórmula para este cálculo está na coluna  $Cap^{max}$  e  $Cap^{min}$  da Tabela 1. Na Tabela 1 contém um resumo com as especificações das classes utilizadas no problema.

Tabela 1: Dados utilizados para a geração das classes de instâncias.

	Exemplares	$ N $	$ M $	$ L $	$\Delta_l$	$r_{li}$	$Cap^{max}$	$Cap^{min}$
Classe-A1	10	5	1	1	15	{1,8; 4;	$0,5 \times \sum_{i \in N, t \in T} d_{it}$	$0,1 \times Cap^{max}$
Classe-A2	10	5	2	1	15			
Classe-A3	10	5	3	1	15			
Classe-B1	10	5	1	2	10 e 15	4,8; 5; 6 ; 7,92; 12 }	$0,9 \times \max\left\{ \sum_{i \in \gamma_1, t \in T} d_{it}, \sum_{i \in \gamma_2, t \in T} d_{it} \right\}$	
Classe-B2	10	5	2	2	10 e 15			
Classe-B3	10	5	3	2	10 e 15			

## 4.1 Resultados

Durante os testes computacionais, a dificuldade de resolução do modelo ficou comprovada. Ao tentar resolver o modelo utilizando as 6 classes de problemas, mantendo a configuração *default* do *solver* CPLEX e limitando o tempo de execução em 3600 segundos, mais 85% dos testes tem o procedimento interrompido antes do final do tempo limite. Os experimentos pararam por falta de memória. Logo, para evitar este tipo de problema, a memória utilizada foi limitada em 3GB e, assim que alcançado este limite, os experimentos paravam a sua execução, devolvendo a resposta corrente, caso houvesse encontrado uma solução admissível. Outra medida adotada, foi a limitação de 15 mil nós durante a construção da árvore *branch-and-cut* pelo CPLEX. Estas configurações foram consideradas para todos os testes computacionais realizados.

Para cada classe de instâncias foram analisados o GAP e o tempo de execução (em segundos). O GAP foi estimado por meio da equação (16), onde  $Fo$  representa o valor corrente da função objetivo analisada e  $Best$  o melhor limitante encontrado para o problema, durante a execução do modelo TILM. Devido a grande quantidade de instâncias, os resultados foram resumidos e apresentados na Tabela 2. Foram calculadas as médias ponderadas do GAP e do tempo de execução do modelo e da heurística, sendo estes valores apresentados conjuntamente com os respectivos valores mínimo e o máximo encontrados para cada classe de instâncias. Nota-se que há valores para os GAPs na maioria das instâncias, porém o modelo apresenta melhores valores (de maneira geral), que a heurística proposta. Entretanto, a heurística mostra-se promissora para classe de problemas com maiores números de variáveis, visto que encontram uma boa solução em um curto intervalo de tempo e sem apresentarem os estouros de memória, presentes durante a execução do modelo e controlados por meio de parâmetros fornecidos ao CPLEX. O tempo de execução dos modelos são elevados, enquanto das heurísticas não superam 1050 segundos.

$$GAP = \frac{Fo - Best}{Fo} 100\% \quad (16)$$

Tabela 2: Resumo dos resultados obtidos por meio da resolução do modelo matemático (TILM) e execução da heurística utilizando as instâncias das Classes A1, A2, A3, B1, B2 e B3, analisando o GAP e tempo de execução (mínimo, médio e máximo).

		Modelo			Heurística		
		Mínimo	Média	Máximo	Mínimo	Média	Máximo
Classe-A1	GAP	0,1%	3,9%	11,0%	0,6%	21,0%	62,0%
	Tempo	1942	2461	3600	116	394	835
Classe-A2	GAP	1,0%	1,7%	5,1%	1,1%	3,7%	22,0%
	Tempo	3059	3448	3600	110	335	754
Classe-A3	GAP	0,0%	52,7%	91,0%	1,2%	2,3%	3,4%
	Tempo	1587	3418	3600	124	377	967

		Modelo			Heurística		
		Mínimo	Média	Máximo	Mínimo	Média	Máximo
Classe-B1	GAP	0,9%	1,7%	2,8%	15,0%	62,2%	91,0%
	Tempo	1727	2747	3600	74	368	805
Classe-B2	GAP	0,0%	44,2%	71,8%	2,9%	41,4%	83,2%
	Tempo	2693	3306	3600	229	617	1049
Classe-B3	GAP	0,2%	51,4%	95,3%	0,3%	49,2%	94,1%
	Tempo	1915	2811	3600	134	464	865

## 5 Conclusão e perspectivas

Este trabalho apresentou um modelo matemático (TILM) acoplado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em indústrias cervejeiras, considerando simultaneamente a preparação (um tanque de fermentação/maturação) e o envase dos líquidos (múltiplas linhas de envase). Este modelo tem o intuito de auxiliar no processo de tomada de decisões da programação da produção. Atualmente, não há relatos de estudos referentes a produção da fabricação de cerveja como proposto neste trabalho. Encontram-se algumas pesquisas que descrevem a otimização de partes do processo e outras que abordam somente o planejamento da produção na fabricação de bebidas (cerveja e refrigerante) considerando um ambiente multi-planta. O modelo apresentado neste trabalho considera um horizonte de planejamento de 2 meses, divididos em macro-períodos (dias) e os subperíodos de tamanho fixo, determinados por turnos de trabalho de 8 horas. As instâncias utilizadas nos testes computacionais foram geradas com base em dados reais. Devido a dificuldade apresentada durante a resolução do modelo, uma heurística é proposta. Analisando os resultados obtidos, a resolução do modelo mostrou-se difícil, enquanto as estratégias relax-and-fix fornecem bons planos de produção em um tempo razoável. Em trabalhos posteriores pretende-se acoplar múltiplos tanques, como também, instâncias com maior número de linhas de envase, similares aos problemas encontrados na prática.

### Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de fomento pelos suportes financeiros: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo À Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

### Referências

- Araujo, S., Arenales, M., Clark, A., 2007. Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *Journal of Heuristics* 13 (4), 337–358.
- Billington, P. J., McClain, J. O., Thomas, L. J., 1986. Heuristics for multilevel lot-sizing with a bottleneck. *Management Science* 32 (8), 989–1006.

- Drexl, A., Kimms, A., June 1997. Lot sizing and scheduling – survey and extensions. *European Journal of Operational Research* 99 (2), 221–235.
- Ferreira, D., Clark, A. R., Almada-Lobo, B., Morabito, R., 2012. Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. *International Journal of Production Economics* 136 (2), 255–265.
- Ferreira, D., França, P. M., Kimms, A., Morabito, R., Toledo, S. R. C. M. F., 2008. Heuristics and meta-heuristics for the lot-sizing and scheduling in the soft drinks industry: a comparison study (Cap. 8), em: *Metaheuristics for Scheduling in Industrial and Manufacturing Applications*. Springer.
- Ferreira, D., Morabito, R., Rangel, S., 2009. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research* 196 (2), 697–706.
- Fleischmann, B., 1994. The discrete lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs. *European Journal of Operational Research* 75 (2), 395 – 404.
- Fleischmann, B., Meyr, H., 1997. The general lotsizing and scheduling problem. *Operations-Research-Spektrum* 19 (1), 11–21.
- Guimarães, L., Klabjan, D., Almada-Lobo, B., 2012. Annual production budget in the beverage industry. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 25 (2), 229 – 241.
- Jans, R., Degraeve, Z., 2007. Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches. *European Journal of Operational Research* 177 (3), 1855–1875.
- Pochet, Y., Wolsey, L., 2006. *Production Planning by Mixed Integer Programming*. Springer Series in Operations Research And Financial Engineering. Springer.
- Santos, M. O., Almada-Lobo, B., 2012. Integrated pulp and paper mill planning and scheduling. *Computers & Industrial Engineering* 63 (1), 1 – 12.
- Staggmeier, A. T., Clark, A. R., 2001. A survey of lot-sizing and scheduling models. In: *Anais do XXXIII SBPO*. pp. 938–947.
- Suerie, C., 2005. Basic models in lot-sizing. In: *Time Continuity in Discrete Time Models*. Vol. 552 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer Berlin Heidelberg.
- Toledo, C. F. M., da Silva Arantes, M., França, P. M., Morabito, R., 2012. A memetic framework for solving the lot sizing and scheduling problem in soft drink plants. In: Chiong, R., Weise, T., Michalewicz, Z. (Eds.), *Variants of Evolutionary Algorithms for Real-World Applications*. Springer, pp. 59–93.
- Toso, E. A. V., Morabito, R., Clark, A. R., Oct. 2009. Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant. *Comput. Ind. Eng.* 57 (3), 813–821.
- Trigeiro, W. W., Thomas, L. J., McClain, J. O., 1989. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science* 35 (3), 353–366.
- Wolsey, L. A., 1998. *Integer Programming*. Wiley, New York.