

DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES DE MÚLTIPLOS PRODUTOS EM ESTÁGIO ÚNICO E PASSO FIXO DE PRODUÇÃO

Euclides da Cunha Neto

Instituto Nacional de Tecnologia
Rio de Janeiro, RJ - Brasil
euclides.cunha@int.gov.br

Virgílio José Martins Ferreira Filho

Programa de Engenharia de Produção, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e
Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, RJ - Brasil
virgilio@ufrj.br

Edilson Fernandes de Arruda

Programa de Engenharia de Produção, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e
Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, RJ - Brasil
efarruda@po.coppe.ufrj.br

RESUMO

O artigo apresenta uma solução para uma classe do problema estocástico de dimensionamento e sequenciamento de lotes (SELSP) em que lotes de quaisquer produtos são produzidos em intervalos fixos de tempo chamados de *passo fixo*. Este tipo de problema é característico do *sistema puxado nivelado de reposição* proposto pela abordagem *lean manufacturing*.

A solução proposta utiliza pontos de pedido e sequência variável de produção. Ela adota disciplina de fila obtida através de modelo de fluido que aproxima o processo estocástico de chegada e atendimento de ordens de produção. Dada a disciplina de fila, um algoritmo iterativo retorna solução próxima da ótima para os parâmetros operacionais do sistema.

O algoritmo é rápido e estável, permitindo o uso frequente com instâncias reais. Com a disciplina de fila proposta, o estoque requerido para atender níveis de serviço preestabelecidos é significativamente menor que o necessário pela disciplina "primeiro estoque a acabar, primeiro a sair".

ABSTRACT

This paper presents a solution for a class of the stochastic economic lot sizing and scheduling problem (SELSP). In this class, the lots of any product are produced in fixed time intervals called *pitch*. This kind of problem is typical of the *replacement pull system* proposed by *lean manufacturing* approach.

The proposed solution uses reorder points and variable sequence production. It adopts a queue discipline obtained from a flow model that approximates the stochastic process of arrival and production orders. Given the queue discipline, an iterative algorithm returns a solution close to the optimum for the parameters to run the system.

The algorithm is fast and stable, allowing its frequent use with real instances. With the proposed queuing discipline, the stock required to meet predetermined service levels is significantly less than required by the discipline "first stockout, first out."

KEYWORDS: SELSP, Gestão de estoques, Dimensionamento de lotes, Sequenciamento, Lean manufacturing, Modelos fluidos.

1. Introdução

Problemas de produção e estoque de múltiplos produtos processados por uma única máquina, em estágio único, um produto de cada vez, com tempos de *setup* significativos, são identificados como ELSP (*Economic Lot Sizing and Scheduling Problem*) em sua versão determinística, e SELSP (*Stochastic Economic Lot Sizing and Scheduling Problem*) em sua versão estocástica. Uma solução para este problema deve estabelecer simultaneamente os tamanhos dos lotes, o sequenciamento da produção e regras para a reposição dos estoques.

Este tipo de problema é muito comum, e por isso relevante, tanto em indústrias de processo quanto em manufaturas. Em indústrias de processo, é ponto central do planejamento e controle da produção de diversos segmentos, como por exemplo: petroquímico, químico, farmacêutico e alimentício. Em manufaturas, aparecem frequentemente em etapas de produção tais como: estamparia, moldagem de plásticos ou metais, centros de usinagem, células de montagem.

Os métodos de solução da versão determinística do problema (ELSP) buscam encontrar um ciclo de produção, composto por uma sequência fixa de produção e tamanhos fixos de lotes, tal que: (i) possa ser repetido indefinidamente, (ii) atenda integralmente a demanda, (iii) respeite a capacidade e (iv) incorra no menor custo possível de carregamento de estoque e *setup*.

Já para resolver o problema estocástico (SELSP), existem diversas estratégias distintas. Vários métodos procuram complementar soluções do ELSP com regras que tornem flexíveis a sequência de produção e / ou os tamanhos de lotes, em resposta ao estado corrente do sistema, representado pelo saldo em estoque de cada produto e pelo *setup* corrente da máquina. Genericamente, a solução deve conter um conjunto de regras capaz de indicar, a cada momento, se a máquina deve ser mantida em seu estado atual (continuando com o mesmo produto em produção ou continuando ociosa), ou se o seu estado deve ser alterado para iniciar a produção de outro produto ou ainda se deve iniciar período ocioso.

O presente artigo tem como objetivo modelar e apresentar um método de solução para uma classe de problemas SELSP particularmente adequada a empresas que acionam e controlam produção e estoques através do chamado *sistema puxado nivelado de reposição* ou apenas *sistema puxado de reposição* (Smaley, 2004), conforme proposto pela metodologia de produção conhecida como manufatura enxuta ou *lean manufacturing* (Wormack e Jones, 2004).

Segundo a abordagem *lean manufacturing*, cujos princípios e práticas vêm se disseminando crescentemente, as plantas industriais devem se organizar como cadeias de módulos de produção e estoque bem delimitados. Como boa parte desses módulos são instâncias reais do SELSP, ampliam-se as oportunidades de uso para seus métodos de solução.

A seção seguinte expõe o referencial teórico mais relevante para o desenvolvimento do trabalho. A seção 3 descreve brevemente algumas características do sistema puxado de reposição e da abordagem *lean manufacturing* relacionando-as com as regras de controle adotadas. A seção 4 formula um modelo matemático para determinar a disciplina de fila e os parâmetros necessários à operação do sistema. A seção 5 é dedicada à determinação da disciplina de fila. A seção 6 mostra os resultados obtidos para três instâncias do problema. Na seção 7 são discutidas algumas conclusões e apontados possíveis desdobramentos para o trabalho.

2. Referencial teórico

Bomberger (1966), Doll e Whybark (1973) e Elmaghraby (1978) apresentaram as primeiras soluções para o ELSP. Mais recentemente, Khouja et al. (1998), Chatfield (2007) e Chandrasekharan et al. (2007) utilizaram metaheurísticas como método de solução do problema determinístico.

Já para resolver o problema estocástico (SELSP), diversos autores (Gallego, 1990; 1994; Federgruen e Katalan, 1996a; b; Eisenstein, 2005; Brander e Forsberg, 2006) usaram como estratégia preservar as sequências fixas desenvolvidas para o problema determinístico, combinando-as com a alteração dinâmica dos tamanhos de lote em função do estoque dos produtos.

Winands *et al.* (2010), na mais recente revisão sobre o estado da arte do SELSP, mostraram que a maior parte das propostas de solução pré-estabelecem regras estáticas, mantidas fixas independentemente do estado do sistema. Foram encontradas na literatura apenas duas propostas de solução totalmente flexíveis para o SELSP: uma delas apresentada por Qiu e Loulou (1995) e outra por Paternina-Arboleda e Das (2005).

Qiu e Loulou (1995) modelaram o SELSP como um processo estocástico semi-markoviano, resolvendo-o através de programação dinâmica. Obtiveram, desta forma, solução próxima ao ótimo e uma estimativa de desvio máximo em relação ao ótimo. A proposta, entretanto, tem limitações: (a) só pode ser usada para 2 ou 3 produtos, se tanto, devido ao crescimento exponencial do espaço de estados do processo estocástico; e (b) a dificuldade de operar, e mesmo comunicar ao usuário, a política a ser seguida quando temos mais do que dois produtos.

A outra solução totalmente flexível foi apresentada por Paternina-Arboleda e Das (2005) que desenvolveram um método de otimização baseado em simulação de múltiplos agentes, usando procedimento de inteligência artificial chamado de *reinforcement learning* para "ensinar" os agentes a tomar a decisão. Segundo o autor, este método é suficientemente eficiente para que possa ser usado com muitos produtos. Como a dificuldade de informar a política proposta ao usuário persiste, o autor propôs o uso de *data mining* para extrair e comunicar apenas a parte mais relevante das regras de decisão.

Diante de tão poucos resultados em termos de métodos flexíveis, Winands *et al.* (2010) sugeriram enfaticamente que novas pesquisas se direcionem particularmente para estratégias de sequenciamento dinâmico baseadas em regras intuitivas, próximas do ótimo, que possam ser usadas em problemas com muitos produtos.

Nesta linha, Segerstedt (1999), Levén e Segerstedt (2007) e Nilsson e Segerstedt (2008) desenvolveram e aperfeiçoaram métodos dinâmicos de sequenciamento da produção, explorando a ideia de produzir primeiro o produto cujo estoque estiver mais próximo de se esgotar (regra chamada de PAPS: "primeiro a acabar o estoque, primeiro a ser servido" neste artigo). Brander *et al.* (2005), além disso, mostraram a partir de simulações que a disciplina de fila impacta mais decisivamente na qualidade das soluções do que os tamanhos do lote. Postularam, a partir daí, ser mais importante flexibilizar a sequência do que os tamanhos do lote em soluções para o SELSP.

Outra contribuição importante para o desenvolvimento de métodos flexíveis foi dada por Zipkin (1986). Ele propôs a conexão entre modelos clássicos de estoque e de filas das ordens de ressuprimento, para a solução do SELSP. Seu trabalho mostrou que os problemas resultantes são convexos desde que atendidas determinadas condições. Dentre estas, a mais restritiva é que o tempo de produção de um lote de um produto deve ser aproximadamente independente da quantidade do lote.

Quanto a métodos específicos para o ambiente *lean manufacturing*, identificou-se apenas um artigo (Cunha Neto *et al.*, 2012). O método proposto encontra parâmetros próximos aos ótimos para os produtos, desde que se aceite como premissa: (i) regras de operação idênticas às do presente artigo e compatíveis com o *sistema puxado nivelado de reposição*; e (ii) a disciplina de fila PAPS proposta por Segerstedt (1999). Embora flexível, esta disciplina de fila é desprovida de critérios de custo / prioridade diferenciados por produto, ao contrário do presente artigo.

3. Diretrizes para construção do modelo

Os pontos mais importantes do *sistema puxado nivelado de reposição* estão resumidos a seguir. Logo a seguir são apresentadas e justificadas as regras de controle adotadas pelo trabalho.

3.1. O Sistema Puxado e Nivelado de Reposição

Segundo Smalley (2004), um dos poucos modos de se comandar e controlar a produção de uma planta industrial que opera conforme proposto pela abordagem *lean* é o *sistema puxado e nivelado de reposição* ou apenas *sistema puxado de reposição*.

No sistema puxado de reposição, o armazenamento dos produtos produzidos por um determinado processo é organizado em um *supermercado de peças* que é uma espécie de

depósito aberto e desburocratizado onde cada produto possui um limite superior para seu estoque, tipicamente determinado pelo número total de kanbans relacionados a este produto. O sistema é dito *puxado* porque é o consumo das peças localizadas no supermercado que autoriza a produção até que o limite máximo seja repostado.

Quanto à produção, ela deve se aproximar ao máximo do que se chama de *heijunka*, ou seja: ser a mais *nivelada* possível, o que significa produzir em pequenos lotes, alternando-se ao máximo o que é produzido. Outra característica do regime de produção é a adoção de um *pitch* ou *passo fixo*, que é o intervalo de tempo dedicado à produção de qualquer lote de qualquer produto (incluindo *setup*). O passo fixo determina o ritmo da produção, isto é: de quanto em quanto tempo a produção deve entregar um lote concluído e iniciar a produção de um novo lote. Busca-se, com isso, facilitar o controle e aumentar a previsibilidade da produção. Além disso, com o passo fixo sabe-se de antemão quando serão necessários os *setups*, o que facilita a racionalização e redução de seus tempo e custo unitário.

Sabe-se que reduzir o tempo de *setup* é um ponto central da abordagem *lean*, que integra técnicas que tem exatamente este objetivo tais como o *SMED* (sigla de “Single Minute Exchange of Die”) cuja meta é conseguir que todos os *setups* da planta sejam inferiores a 10 minutos (Shingo, 1985). Menores tempo e custo de *setup* viabilizam lotes menores, que permitem maior flexibilidade, menores estoques e custos totais. Este é o significado da produção nivelada que se deseja. Vale notar ainda que, devido aos benefícios relacionados acima, muitas indústrias adotam o passo fixo de produção mesmo sem operar segundo o paradigma *lean manufacturing*.

3.2. Regras de controle

Foram assumidas *a priori* algumas regras de controle, buscando-se construir uma solução para o problema SELSP que seja ao mesmo tempo flexível, conforme recomendado por Winands *et al.* (2010), e adequada ao *sistema puxado nivelado de reposição* da abordagem *lean manufacturing*.

É fato que ao se estabelecer qualquer regra *a priori*, corre-se o risco de descartar as melhores soluções. Mas a abordagem totalmente flexível, por outro lado, pode dificultar o uso da solução, particularmente diante de peculiaridades operacionais relevantes como é o caso do *sistema puxado nivelado de reposição*. Então, buscando um equilíbrio, optou-se pela alternativa que segundo Brander *et al.* (2005) é a melhor e suficientemente flexível: fixar lotes e variar a sequência de produção, conforme detalhado a seguir:

a) Passo fixo de produção: é uma regra necessária por ser parte do sistema puxado nivelado. Apresenta, além disso, as vantagens organizacionais conforme explicado na seção 3.1 acima. Em contrapartida, para uma instância mantida inalterada, resultará em custos extras, além do custo mínimo que uma política ótima incorreria.

b) Política (s, Q) de controle de estoque: significa que quando o estoque do produto i alcança o ponto de pedido s_i , é imediatamente disparada uma ordem de reposição de tamanho Q_i .

Esta política funciona também como critério de parada de produção: quando o estoque de todos os produtos estiver acima dos respectivos pontos de pedido. Vale notar que é um critério sub ótimo, pois não é baseado no estado global do sistema. Ao contrário, cada produto sinaliza pela continuação da produção ou não em função apenas de seu próprio estoque.

Este tipo de política traz, entretanto, as seguintes vantagens:

- Adequação natural aos *supermercados de peças* da abordagem *lean manufacturing*.
- Compatível com o sequenciamento flexível da produção, conforme item “c” abaixo.
- Facilidade de adoção prática e uso, podendo ser implementada através de simples controles visuais.

- Garantia de que o percentual de tempo realmente consumido com *setups* não será afetado pela demanda corrente, mantendo-se no nível planejado no momento de cálculo dos tamanhos dos lotes.

c) Sequenciamento flexível de produção: a política de sequenciamento adotada é flexível e suas regras não são definidas *a priori*. Ao contrário, encontrar uma política de sequenciamento próxima da ótima é parte do problema tratado pelas próximas seções.

4. Modelo global

Para solucionar completamente o SELSP enfocado, a partir das estratégias de produção descritas na seção anterior, é necessário determinar a disciplina de fila e as seguintes variáveis: o passo, os tamanhos de lote e os pontos de pedido dos produtos.

Para isso, esta seção formula um modelo acoplando equações típicas de modelos de estoques com equações típicas de modelos de filas, cuja vantagem é resultar em modelos convexos (Zipkin, 1986) conforme citado na seção 2. O modelo tem semelhanças com o proposto por Cunha Neto *et al.* (2012), que usa a mesma abordagem, diferindo porém, para permitir a priorização por produto.

4.1. Premissas

- a) A demanda é conhecida, com função de probabilidade exponencial e estacionária;
- b) O nível de serviço (isto é: percentual de vezes em que a demanda durante o tempo de reposição do estoque foi integral e imediatamente atendida em relação ao número total de lotes solicitados) é pré-definido e igual para todos os produtos;
- c) A demanda que não é prontamente atendida fica pendente, para atendimento logo que possível (backlog);
- d) Os tempos unitários de produção e de setup de cada produto são determinísticos, conhecidos e independentes da sequência de produção;
- e) A capacidade de produção é fixa, conhecida e previamente contratada por custo fixo, independente de percentual de utilização;
- f) Inexiste custo de setup significativo (além da perda de tempo de produção);
- g) Cada produto possui um custo de estocar proporcional ao nível de seu estoque;
- h) A matéria prima necessária à produção de um lote é integralmente disponibilizada para o processo produtivo no momento em que é solicitada a produção do lote;
- i) O lote concluído é entregue ao estoque integralmente, ao final da sua produção;
- j) O horizonte de planejamento é indeterminado ou infinito.

4.2. Nomenclatura

a) Índices e Conjuntos:

i índice que indica um produto;

N total de produtos diferentes presentes no sistema.

b) Dados de entrada:

d_i demanda do produto i (variável aleatória com função de probabilidade exponencial, em unidades por unidade de tempo);

\bar{d}_i demanda média do produto i (em unidades por unidade de tempo);

o_i tempo de operação para produzir uma unidade do produto i (em unidade de tempo por unidade);

a_i tempo para realizar um *setup* do produto i (em unidade de tempo);

K nível de serviço requerido pelo mercado (comum a todos os produtos - em percentual);

I_i custo de estocar uma unidade do produto i durante uma unidade de tempo.

c) Variáveis de decisão:

Q_i quantidade fixa do lote de encomenda do produto i (em unidades);

s_i ponto de pedido do produto i (em unidades).

d) Variáveis auxiliares:

P duração do passo de produção (em unidade de tempo);

- A número de *setups* por unidade de tempo (em vezes por unidade de tempo);
 ρ taxa de ocupação da capacidade por todos os produtos, incluindo o tempo dos *setups* (em percentual);
 Tq tempo de espera de uma ordem na fila (variável aleatória, em unidade de tempo);

4.3. O modelo

a) Função objetivo: tendo em vista o conjunto de premissas relacionadas a custo, a função objetivo é minimizar o custo total de estocar, incluindo produtos acabados e em processo. Temos então:

$$Z = \min \sum_{i=1}^N I_i s_i + \sum_{i=1}^N I_i Q_i \quad (1)$$

Na equação (1), o primeiro somatório engloba o custo do estoque de segurança e do estoque em processo (na medida em que este, na média, equivale à quantidade de material que se encontra abaixo do ponto de pedido); enquanto que o segundo somatório corresponde ao custo do maior nível do estoque de ciclo.

b) Restrição de capacidade: na medida em que a capacidade contratada se mantém fixa em todo o horizonte de planejamento, e este é infinito, o tempo total disponível se divide em três parcelas:

- Tempo total para executar operações: é um percentual fixo da capacidade contratada.
- Tempo total de *setup*: é inversamente proporcional ao tamanho dos lotes e limitado pela diferença entre o tempo total contratado e o tempo total das operações.
- Tempo ocioso: é o tempo não empregado nem em operações nem em *setup*, necessariamente maior que zero devido às flutuações aleatórias da demanda.

A restrição (2) abaixo expressa a limitação ao tempo total empregado em *setups*. O tempo total médio empregado em *setups* por unidade de tempo está do lado esquerdo da equação, sendo que, para cada produto i , a taxa de demanda \bar{d}_i dividida pelo tamanho do lote Q_i resulta no número médio de *setups* por unidade de tempo. Do lado direito da equação, o resultado do somatório é o tempo total médio gasto com operações por unidade de tempo e o resultado da subtração é o tempo total médio ocioso por unidade de tempo.

$$\sum_{i=1}^N \left(a_i \frac{\bar{d}_i}{Q_i} \right) < 1 - \sum_{i=1}^N (\bar{d}_i o_i) \quad (2)$$

c) Restrições de passo fixo de produção: a política de se usar o mesmo passo de produção para qualquer produto, impõe o conjunto de restrições (3). Com isso, todos os tamanhos de lote estarão univocamente determinados como decorrência direta do passo P escolhido.

$$(Q_i o_i) + a_i = P \quad \forall i = 1 \dots N \quad (3)$$

d) Restrição que fixa o número de *setups* necessários por unidade de tempo (A) em função do passo P : através da restrição (4), o número de *setups* por unidade de tempo A é determinado a partir dos tamanhos de lote Q_i (indiretamente pelo passo P).

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{d}_i}{Q_i} \quad (4)$$

e) Restrição que relaciona o número de *setups* A com o percentual de ocupação da capacidade ρ : como o número de *setups* por unidade de tempo A é exatamente o número de passos não ociosos por unidade de tempo (ou lotes que serão produzidos por unidade de tempo), a equação (5) abaixo estabelece a taxa de ocupação da capacidade ρ .

$$\rho = A P \quad (5)$$

f) Restrições de atendimento ao nível de serviço K : por definição da teoria básica de estoques, o ponto de pedido s_i é a quantidade de produtos dedicados a atender à demanda durante o tempo de reposição do estoque. Neste caso, o tempo de reposição será o tempo de espera de uma ordem na fila Tq mais o passo P , que é o tempo de produção do lote. Então, o conjunto de restrições (6) impõe que os pontos de pedido s_i sejam tal que o nível de serviço K seja respeitado:

$$P \left((T_q + P)d_i \leq s_i \right) \geq K \quad \forall i = 1..N \quad (6)$$

Este conjunto de restrições é dependente da disciplina de fila e torna complexa a solução exata do modelo, devido à dificuldade de se obter uma expressão analítica para a função de densidade de probabilidade da variável T_q .

g) Domínio das variáveis: por fim, as restrições (7) estabelecem os domínios das variáveis do modelo.

$$Q_i > 0; s_i \geq 0; P > 0; A > 0; 1 > \rho \geq 0; T_q \geq 0 \quad \forall i = 1..N \quad (7)$$

4.4. Resolução

O modelo pode ser resolvido através de algoritmo global, com estrutura similar a proposta por Cunha Neto *et al.* (2012). Este algoritmo explora a convexidade do modelo, combinando dois procedimentos:

a) Um algoritmo de busca linear através da seção áurea (Bazaraa *et al.*, 2006; Luenberger e Yinyu, 2008), que escolhe valores progressivamente melhores para o passo e, conseqüentemente, os tamanhos de lote.

b) Uma rotina de simulação discreta estocástica para encontrar os menores pontos de pedido que, respeitada a disciplina de fila, sejam suficientes para atender o nível de serviço K .

Vale notar que o uso de simulação se justifica devido a difícil resolução analítica exata do modelo, dada a combinação de sua natureza não linear com seu processo estocástico semi-markoviano de grande porte expressado pelas equações (6).

Resta então estabelecer a disciplina de fila que será fornecida como *input* ao algoritmo global citado acima, para completar a solução do modelo. Este é o assunto da próxima seção.

5. Determinação da disciplina de fila

Para determinar a política de fila, temos um subproblema de sequenciamento que é um problema de rede de filas com máquina única, onde cada ordem de produção é um cliente e a cada tipo de produto corresponde uma classe de clientes e respectiva fila.

Deseja-se estabelecer uma política de priorização que determine qual ordem produzir a cada passo de modo a minimizar o custo total de permanência dos produtos nas filas. Para que esta função objetivo seja compatível com a do problema global, a taxa de custo de permanência de um produto na fila é definida pela multiplicação da sua taxa de demanda pelo seu custo de armazenar uma unidade em estoque.

Temos então um problema de decisão semi-markoviano, onde o estado do sistema é o número de ordens de produção de cada produto aguardando processamento num dado instante. O espaço de estados é enumerável e infinito, já que o modelo global admite *backlog*. O momento de tomada de decisão é a cada início de passo P , tratando-se de uma sequência discreta e infinita de decisões ao longo do tempo. O espaço de ações é composto pelo conjunto de produtos candidatos à produção e mais a possível decisão de manter o servidor ocioso. Para o presente problema, existe uma política ótima estacionária, semi-markoviana e determinística (Hajek, 1984).

Para a definição formal do modelo é necessária a seguinte notação adicional:

- λ_i Taxa de chegada de ordens de produção do produto i . Portanto: $\lambda_i = \bar{d}_i/Q_i$.
- μ Taxa de produção de um lote de qualquer produto quando este está em produção. Portanto: $\mu = 1/P = \mu_i/Q_i$.
- t Momento de tomada de decisão (início de um passo P).
- x Número de ordens de cada produto aguardando processamento no instante t ; vetor de estado do sistema.
- $v(x)$ Política de controle em função do estado x .
- ω Conjunto de todas as possíveis políticas de decisão.
- β Taxa financeira de desconto.
- $H(x, v(x))$ Função que retorna o custo de manutenção de ordens durante um passo P quando estamos no estado x e aplicamos a regra de decisão $v(x)$.

$p(\cdot | x, v(x))$ Função que retorna a probabilidade de transição para um estado qualquer, dado que o sistema se encontra no estado $x \in X$ e é aplicada a regra de decisão $v(x)$.

Temos então a seguinte equação de otimalidade para o custo médio:

$$V_\beta(x) = \min_{\omega} E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t H(x, v(x)) \right]$$

A figura abaixo ilustra o problema para o caso de apenas 2 produtos.

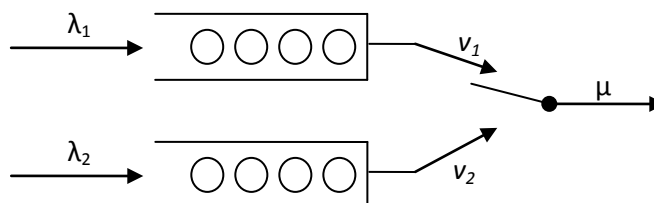


Figura 1: Visão Esquemática do subproblema de Sequenciamento para 2 produtos

5.1. Aproximação através de Modelo de Fluidos:

O modelo de fluido é obtido quando as variáveis associadas a eventos discretos são substituídas por processos contínuos comandados pelas mesmas taxas médias. Os modelos resultantes são de solução mais simples e orientam a obtenção de política discreta próxima da ótima principalmente porque as superfícies de comutação (isto é: as superfícies do espaço de estados que indicam que o produto a ser fabricado deve ser trocado) da política discreta e da política de fluido tem assintoticamente as mesmas inclinações (Veatch, 2001; Meyn, 1997).

Sob a condição de estabilidade $\rho < 1$, o modelo fluido irá drenar a partir de qualquer estado inicial até secar. E assim, o problema de controle do fluido utiliza a minimização do "custo para escoar" como função objetivo.

Segue abaixo a notação adicional usada para a definição do modelo:

- c Taxa de custo de permanência nas filas. Portanto, é um vetor onde: $c_i = I_i \cdot \bar{d}_i$.
- T Horizonte de tempo para um estado inicial x . Portanto, é o instante no tempo tal que $x(t) = 0$ para todo $t \geq T$, para uma classe apropriada de políticas.
- $v_i(t)$ Função que indica a probabilidade do servidor estar dedicado à produção do produto i no instante t . Estabelece a política de controle para o modelo.

Veja abaixo o modelo:

$$J(x) = \min \int_0^T c'x(t)dt \quad (8)$$

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i - \mu v_i(t) \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N v_i(t) \leq 1 \quad (10)$$

$$x(0) = x; \quad x(t) \geq 0; \quad v(t) \geq 0.$$

A política ótima para este modelo de fluidos, para o caso de dois produtos, é a seguinte:

Política Ótima para Modelo de Fluidos com Dois Produtos:

Ordene os produtos tal que: $c_1 \geq c_2$.
Enquanto $x_1 > 0$ faça: $v_1 = 1$.
Quando $x_1 = 0$ faça: $v_1 = \lambda_1/\mu$; $v_2 = 1 - v_1$.

Para mostrar que a política acima é mesmo ótima, observe inicialmente que uma política ótima deve atender a restrição (10) na igualdade, isto é:

$$\sum_{i=1}^N v_i(t) = 1, \quad \forall t, 0 \leq t \leq T.$$

Ou seja, para uma solução ótima o servidor precisa operar 100% do tempo. Temos ainda que todas as políticas deste tipo possuirão o mesmo tempo T que, para um estado inicial $x(0)$ qualquer, pode ser obtido a partir do seguinte sistema simples de equações:

$$T = \frac{x_1(0) + \lambda_1 T}{\mu \cdot u_1}; \quad T = \frac{x_2(0) + \lambda_2 T}{\mu \cdot u_2}; \quad u_1 + u_2 = 1$$

sendo que u_i indica a fração da capacidade acumulada do servidor que deve ser dedicada a cada produto até o sistema secar.

Se todas as políticas que mantêm o servidor à plena carga possuem T invariante e, além disso, a taxa de “entrada de custos” ao sistema é constante no tempo, então a política ótima será aquela que, a cada instante, escolha a maior taxa de “saída de custos” possível naquele instante. Ou seja, a política gulosa é ótima. Por fim, como a taxa de produção para lotes de qualquer produto é igual, então será ótima a política que, ao longo do tempo, escolher para produzir os lotes com o maior custo de estoque. Ou seja:

$$\max_{i: x_i > 0} (c_i) = \max_{i: x_i > 0} (I_i \cdot \bar{d}_i)$$

6. Experimentos computacionais

Para avaliar o método proposto, um algoritmo baseado na estrutura descrita na seção 4.4 combinado com a disciplina de fila obtida pelo modelo de fluidos acima (que será chamado de PMC – primeiro o maior custo) foi projetado, codificado na linguagem Pascal e compilado com o Delphi 2007. Além disso, compilou-se um segundo algoritmo idêntico e nas mesmas condições, alterando-se apenas a disciplina de fila que passou a ser a PAPS.

Os dois algoritmos foram testados com 3 instâncias derivadas da proposta por Bomberger (1966), uma das mais utilizadas na literatura (ver Tabela 1). Elas diferem entre si apenas nos valores das demandas que multiplicam respectivamente por 2, 3 e 4 a “demanda base” do trabalho de Bomberger. A jornada diária de trabalho é de 480 minutos e o nível de serviço requerido pelo mercado é de 90%. O custo de estocar é de 1 unidade monetária por peça por unidade de tempo.

Tabela 1: Três Instâncias Variando apenas a Taxa de Demanda

Produtos	Tempo de Operação (min./peça)	Tempo de Setup (min)	Demanda 1 (peças/dia)	Demanda 2 (peças/dia)	Demanda 3 (peças/dia)
1	6.40	60	8	12	16
2	5.05	120	4	6	8
3	1.60	60	2	3	4
4	6.00	60	2	3	4
5	3.20	60	2	3	4
6	36.92	240	1.7	2.55	3.4
7	24.00	360	1.7	2.55	3.4
8	24.00	240	0.4	0.6	0.8
9	8.00	120	0.4	0.6	0.8
10	20.00	480	0.12	0.18	0.24

Cada uma das 3 instâncias foi resolvida 50 vezes. Na resolução foi usado um equipamento com processador Intel Core i5 de 2,53 GHz, 4 GB memória RAM e sistema operacional Windows 7. A cada simulação executada pelo algoritmo, foram colhidas 5.000 amostras da demanda durante o tempo de reposição, para determinação dos pontos de pedido. O método da seção áurea foi aplicado com uma tolerância de 2 minutos para o passo de produção.

O algoritmo convergiu igualmente em suas duas versões: em 17, 18 e 20 iterações, respectivamente para as instâncias 1, 2 e 3. O tempo de execução foi sempre inferior a 215 segundos. Os desvios padrões para as 50 execuções, de todas as variáveis obtidas (passo, tamanhos do lote, pontos de pedido e estoque máximo), se mantiveram sempre bem inferiores a 1%, o que revela a estabilidade do método desenvolvido.

As soluções obtidas estão apresentadas nas tabelas 2, 3, 4 e 5 abaixo. A Tabela 2 mostra medidas globais de desempenho, enquanto que as demais mostram os parâmetros dos produtos

(tamanhos de lote e os pontos de pedido) obtidos para cada instância. Estas tabelas mostram que a disciplina de fila PMC retornou um menor nível de estoque do que a disciplina PAPS principalmente devido à redução dos pontos de pedido em seu conjunto. Os percentuais de redução devida aos pontos de pedido, aos tamanhos de lote e total estão resumidos na Tabela 6 abaixo. Observa-se uma expressiva redução nos pontos de pedido, que são diretamente impactados pela disciplina de fila, a qual se soma uma redução nos tamanhos de lote. Pode-se notar também que quanto maior a taxa de ocupação, menos expressiva é a redução do estoque.

Tabela 2: Indicadores Globais obtidos para cada Instância

Instância	Passo de Produção P (min.)		Tempo de $Setup$ (%)		Folga (%)		Estoque Máximo Z (peças)	
	PMC	PAPS	PMC	PAPS	PMC	PAPS	PMC	PAPS
1	501	513	50,5	44,2	5,4	11,6	793	853
2	687	699	31,6	30,7	2,1	3,1	1251	1323
3	1841	1853	107	10,6	1,0	1,1	3823	3953

Tabela 3: Parâmetros dos Produtos obtidos para a Instancia 1

Produtos:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
s_i	PMC	19	12	7	7	8	7	10	6	7	6	89
	PAPS	42	22	12	12	12	10	10	3	3	2	129
Q_i	PMC	69	75	275	73	138	7	6	11	48	1	704
	PAPS	71	78	283	75	141	7	6	11	49	2	723

Tabela 4: Parâmetros dos Produtos obtidos para a Instancia 2

Produtos:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
s_i	PMC	36	23	14	14	15	14	25	20	38	23	222
	PAPS	95	48	25	25	25	21	21	6	6	2	274
Q_i	PMC	98	112	392	105	196	12	14	19	71	10	1029
	PAPS	100	115	399	106	200	12	14	19	72	11	1048

Tabela 5: Parâmetros dos Produtos obtidos para a Instancia 3

Produtos:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
s_i	PMC	120	79	46	47	51	48	92	65	143	91	782
	PAPS	316	159	81	80	80	68	68	17	17	6	892
Q_i	PMC	278	341	1113	297	557	43	62	67	215	68	3041
	PAPS	280	343	1120	299	560	44	62	67	217	69	3061

Tabela 6: Redução no Custo do Estoque Máximo obtida pela disciplina PMC para cada Instância

Instância	Redução nos Pontos de Pedido (%)	Redução nos Tamanhos de Lote (%)	Redução no Total (%)
1	30,6	2,6	6,9
2	19,0	1,9	5,4
3	12,4	0,7	3,3

Em seguida, procurou-se verificar o atendimento ao nível de serviço requerido. Para isso, o “uso real” de cada solução obtida para cada instância foi simulado 50 vezes, e em cada simulação foram recolhidas 20.000 amostras da demanda durante o tempo de reposição de cada produto. Os valores obtidos estão na Tabela 7.

Tabela 7: Nível de Serviço Obtido em 50 Execuções para cada Instancia

Instâncias	Prod.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	PMC	91,0	92,0	90,4	90,1	93,7	92,6	91,9	92,6	91,5	94,6
	PAPS	97,3	96,7	94,2	95,3	94,7	96,3	95,6	90,0	88,5	91,6
2	PMC	90,6	91,2	92,1	91,5	91,8	92,4	90,9	90,4	90,2	91,0
	PAPS	93,1	92,9	91,3	92,2	91,9	92,5	91,9	88,7	87,5	83,7
3	PMC	90,4	90,3	90,6	90,5	90,2	90,9	90,3	90,4	90,3	90,3
	PAPS	91,2	91,1	90,1	90,8	90,6	90,8	90,6	88,8	88,1	84,5

Examinando a Tabela 7 acima, observa-se que o método PMC respeita produto a produto o nível de serviço requerido, não se distanciando muito dele. Já o método PAPS, produz níveis de serviço menos homogêneos devido a distintas variâncias para a demanda durante o tempo de reposição (quanto menor a taxa de demanda maior a variância). Para que todos os produtos atendam ao nível de serviço requerido, é necessário elevar o ponto de pedido de todos os produtos, o que não foi feito para não distorcer uma comparação dos métodos pela média.

7. Conclusões e Desdobramentos

Os experimentos computacionais mostraram que os dois algoritmos implementados são suficientemente rápidos e apresentam resultados estáveis, o que viabiliza o uso frequente com instâncias de porte real, em computadores de uso corrente. Estes resultados puderam ser alcançados devido à alta convergência apresentada pela simulação estocástica executada a cada iteração dos algoritmos. Em decorrência, ambos os métodos podem ser usados como solução para o problema SELSP com passo fixo de produção, típico das plantas industriais que operam o sistema puxado nivelado de reposição da abordagem *lean manufacturing*.

A solução construída com a disciplina PMC (produzir primeiro o produto com o maior produto custo de estocar vezes taxa de demanda), proposta pelo presente artigo, produziu estoques significativamente menores e melhor atendimento aos níveis de serviço por produto. Ela tem ainda a vantagem de admitir, sem dificuldade adicional, níveis de serviço diferenciados por produto.

O método proposto pode ainda ser melhorado através da combinação dinâmica entre as duas disciplinas de fila utilizadas já que uma é sensível ao caráter estocástico do problema e a outra prioriza produtos pelo critério de custos.

Quanto ao desempenho computacional do método, pode ser ainda melhorado através da determinação de tamanhos de amostras da demanda durante o tempo de reposição, colhidas durante a simulação estocástica, apenas suficiente para garantir intervalos de confiança necessários.

Outro trabalho relevante seria comparar a solução encontrada com soluções que usam outras estratégias de produção. Particularmente interessante seria a comparação com soluções quase ótimas totalmente dinâmicas, para que se possa avaliar o custo extra, imposto pelas regras de controle propostas por este trabalho.

Referências Bibliográficas

- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M.** *Nonlinear programming: Theory and algorithms*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2006.
- Bomberger, E. E.** (1966), A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Scheduling Problem. *Management Science*, 12, 778-784.
- Brander, P. e R. Forsberg.** (2006), Determination of safety stocks for cyclic schedules with stochastic demands. *International Journal of Production Economics*, 104, 271-295.
- Brander, P., Levén E., Segerstedt, A.** (2005), Lot sizes in a capacity constrained facility--a simulation study of stationary stochastic demand. *International Journal of Production Economics*, 93-94, 375-386.
- Chandrasekaran, C., Chandrasekharan R., Krishnaiah C. O. V., Donakonda, H.** (2007), Metaheuristics for solving economic lot scheduling problems (ELSP) using time-varying lot-sizes approach. *European Journal of Industrial Engineering*, 1, 152-181.
- Chatfield, D. C.** (2007), The economic lot scheduling problem: A pure genetic search approach. *Computers & Operations Research*, 34, 2865-2881.
- Cunha Neto, E., Ferreira Filho, V. J. M., Arruda, E. F.** (2012), Single-stage multi-product production and inventory systems: an iterative algorithm based on dynamic scheduling and fixed pitch production. *XVI CLAIO (Congresso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa)*. Rio de Janeiro.
- Doll, C. L. e Whybark, D. C.** (1973), An iterative procedure for the single-machine multi-product lot scheduling problem. *Management Science*, 20, 50-55.

- Eisenstein, D. D.** (2005), Recovering Cyclic Schedules Using Dynamic Produce-Up-To Policies. *Operations Research*, 53, 675-688.
- Elmaghraby, S. E.** (1978), The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP): Review and Extensions. *Management Science*, 24, 587-598.
- Federgruen, A. e Katalan, Z.** (1996a), Customer waiting-time distributions under base-stock policies in single-facility multi-item production systems. *Naval Research Logistics*, 43, 533-548.
- _____. (1996b), The Stochastic Economic Lot Scheduling Problem: Cyclical Base-Stock Policies with Idle Times. *Management Science*, 42, 783-796.
- Gallego, G.** (1990), Scheduling the Production of Several Items with Random Demands in a Single Facility. *Management Science*, 36, 1579-1592.
- _____. (1994), When is a base stock policy optimal in recovering disrupted cyclic schedules? *Naval Research Logistics*, 41, 317-333.
- Hajek, B.** (1984), Optimal control of two interacting service stations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 29, 491-499.
- Khouja, M., Michalewicz, Z., Wilmot, M.** (1998), The use of genetic algorithms to solve the economic lot size scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 110, 509-524.
- Leven, E. e Segerstedt, A.** (2007), A scheduling policy for adjusting economic lot quantities to a feasible solution. *European Journal of Operational Research*, 179, 414-423.
- Luenberger, D. G., Ye Yinyu.** *Linear and Nonlinear programming*. Springer Science, New York, 2008.
- Meyn, S.** (1997). Stability and optimization of queueing networks and their fluid models. *Lectures in Applied Mathematics - American Mathematical Society*, 33, 175-200.
- Nilsson, K. e Segerstedt, A.** (2008), Corrections of costs to feasible solutions of economic lot scheduling problems. *Computers & Industrial Engineering*, 54, 155-168.
- Paternina-Arboleda, C. D. e Das, T. K.** (2005), A multi-agent reinforcement learning approach to obtaining dynamic control policies for stochastic lot scheduling problem. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 13, 389-406.
- Qiu, J. e Loulou, R.** (1995), Multiproduct production/inventory control under random demands. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, 350-356.
- Segerstedt, A.** (1999), Lot sizes in a capacity constrained facility with available initial inventories. *International Journal of Production Economics*, 59, 469-475.
- Shingo, S.** *A Revolution in Manufacturing: The SMED System*. Productivity Press, Cambridge, MA, 1985.
- Smalley, A.** *Creating level pull: a lean production-system improvement guide for production-control, operations, and engineering professionals*. Lean Enterprise Institute, Cambridge, MA. 2004.
- Veatch, M. H.** (2001). Fluid analysis of arrival routing. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46, 1254-1257.
- Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., van Houtum, G. J.** (2010), The stochastic economic lot scheduling problem: A survey. *European Journal of Operational Research*, In Press, Corrected Proof.
- Wormack, J. P., Jones, D. T., Ross, D.** *The machine that changed the world*. Simon and Schuster, 2007.
- Zipkin, P. H.** (1986), Models for Design and Control of Stochastic, Multi-Item Batch Production Systems. *Operations Research*, 34, 91-104.