

## Planejamento da produção para uma indústria química utilizando heurísticas *relax-and-fix*

**Artur Lovato Cunha**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Universidade de São Paulo (USP)  
arturlc@icmc.usp.br

**Maristela Oliveira Santos**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Universidade de São Paulo (USP)  
mari@icmc.usp.br

### Resumo

Neste Trabalho são propostas heurísticas do tipo *relax-and-fix*, para a resolução de um problema de dimensionamento de lotes encontrado em uma indústria química brasileira, na qual existem produtos com estrutura de múltiplos níveis e múltiplos processos, máquinas paralelas distintas e compartilhamento de tanques de armazenamento. Os experimentos computacionais mostraram que a heurística *relax-and-fix forward* com decomposição de variáveis por período apresentaram bons resultados tanto com relação à qualidade das soluções como à quantidade de instâncias resolvidas, mesmo quando foi destinado pouco tempo às execuções.

**PALAVRAS CHAVE:** Dimensionamento de Lotes, *Relax-and-Fix*, Indústria Química.

### Abstract

In this paper relax-and-fix heuristics are proposed to solve a lot sizing problem found in a Brazilian chemical industry, in which are products with multilevel and multiple process structure, distinct parallel machines and storage tanks sharing. Computer experiments shown that relax-and-fix forward with period oriented decomposition presented good results for solution's quality and for the number of instances solved, even when short times were available.

**KEYWORDS:** Lot Sizing, *Relax-and-Fix*, Chemical Industry.

## 1 - Introdução

A otimização dos processos administrativos e operacionais é fundamental para a consolidação das empresas no atual cenário da economia mundial. Dentre os processos operacionais, uma das atividades que se destacam é o planejamento e controle da produção (PCP), o qual consiste em delimitar a aquisição de matérias primas e a alocação de recursos, geralmente limitados, para viabilizar a manufatura de produtos, visando atender à demanda dos clientes em um determinado período de tempo (Fernandes e Godinho, 2010).

Uma das atividades que compõem o PCP é o problema do dimensionamento de lotes (PDL). Esses problemas podem conter uma ampla gama de características, como itens únicos ou múltiplos, produção monoestágio ou multiestágio, restrições de capacidade produtiva, estocagem de produtos, restrições de capacidade de estocagem, tempo e/ou custo de preparação das máquinas, máquinas paralelas idênticas ou não, atraso na entrega dos produtos, entre outras.

O sistema de produção monoestágio caracteriza-se por apresentar produção de itens independente da produção de outros itens (Araujo e Arenales, 2000). Alguns dos artigos que trataram esses problemas são Maes e Wassenhove (1986), Trigeiro et al. (1989), Kirca e Kökten (1994) e Mercé e Fontan (2003).

Em Maes e Wassenhove (1986) foi proposta uma heurística que percorre as variáveis período por período, determinando o tamanho dos lotes através da demanda e da antecipação da produção para períodos em que haja ociosidade, e duas heurísticas de melhoria, uma tentando antecipar lotes para agrupá-los e outra protelando a produção quando há estoque ao final do período. Já em Kirca e Kökten (1994) foi proposta uma heurística orientada a itens, os quais são selecionados por um critério baseado no *Economic Order Quantity* (Harris, 1913), para determinar limitantes superiores de produção e estocagem.

O trabalho de Trigeiro et al. (1989) considera o problema com tempo e custo de preparação de máquina, para o qual foi proposto uma heurística que aplica relaxação lagrangiana nas restrições de capacidade, as únicas que relacionam os produtos, decompondo o problema em subproblemas independentes, sem restrições de capacidade e com apenas um item, que podem ser resolvidos eficientemente por programação dinâmica.

Já em Mercé e Fontan (2003) foi considerado apenas o tempo de preparação de máquinas, mas com permissão de atraso das entregas, sendo proposta uma heurística *relax-and-fix* dividindo as variáveis, com relação aos períodos, em um subconjunto com variáveis fixadas, outro com as originais (inteiras e binárias) e um último com as simplificadas. Durante o processo iterativo, algumas variáveis passam do subconjunto das simplificadas para o das originais, enquanto outras passam desse para o das fixadas, até que todas as variáveis assumam valores inteiros, configurando uma solução factível para o problema original.

O sistema de produção multiestágio caracteriza-se por apresentar produção de itens dependentes da produção de outros itens que devem ter sido fabricados anteriormente, também conhecido como itens componentes (Araujo e Arenales, 2000). Alguns dos artigos que trataram esses problemas são Billington et al. (1983), Maes et al. (1991), Sahling et al. (2009) e Akartunali e Miller (2009).

Billington et al. (1983) foram um dos pioneiros na abordagem desses problemas, acrescentando a característica de *lead time*, tempo necessário para o item estar disponível após sua manufatura. Eles ainda apresentaram um procedimento de compressão do problema, visando reduzir seu tamanho sem perda da otimalidade.

Em Maes et al. (1991) foram propostas duas heurísticas baseadas na resolução de relaxações lineares do modelo original e uma no *branch-and-bound* parcial, a qual limita as soluções candidatas mais rapidamente mas perde a garantia de otimalidade. Eles ainda mostraram que ao ser considerado tempo de preparação de máquinas, apenas a obtenção de

uma solução factível é um problema NP-Completo.

Sahling et al. (2009) consideraram a preservação da preparação das máquinas e o sequenciamento parcial da produção, determinando o primeiro e o último item produzido em cada período. O procedimento proposto consiste em gerar subproblemas que são resolvidos por algum *software* de otimização e então aplicar a heurística de melhoria *fix-and-optimize*, com fixação de variáveis binárias através de decomposições orientadas a itens, recursos e processos produtivos.

Em Akartunali e Miller (2009) foi considerado um problema com tempo e custo de preparação de máquinas, para o qual foi proposto um procedimento que combina as heurísticas *LP-and-fix* e o *relax-and-fix*, com sobreposição da janela de períodos entre as iterações.

Maiores detalhes sobre outros trabalhos podem ser encontrados em revisões como Drexl e Kimms (1997), Karimi et al. (2003), Brahimi et al. (2006), Quadt e Kuhn (2008), Comelli et al. (2008) e Buschkühl et al. (2010).

Neste trabalho foram propostas heurísticas do tipo *relax-and-fix*, baseadas nos estudos de Mercé e Fontan (2003), para tratar um problema real com estrutura de produtos multiestágio e multiprocesso, utilizando máquinas paralelas distintas e compartilhamento de tanques entre produtos. Ainda foi considerado uma decomposição das variáveis orientada a itens (Sahling et al., 2009) e uma variação desta com decomposição orientada aos níveis dos produtos.

## 2 - Definição do Problema e Modelo Matemático

Este artigo trata um problema de planejamento da produção enfrentado por uma grande indústria química brasileira, com atuação em diversos países. Dentre os produtos comercializados por essa empresa estão os etoxilados<sup>1</sup>, cuja produção ocorre em reatores de batelada, ou seja, são produzidos apenas em múltiplos do volume de suas bateladas. Este fato faz com que seja necessário considerar variáveis discretas para a modelagem matemática deste problema, originando um problema inteiro misto (MIP).

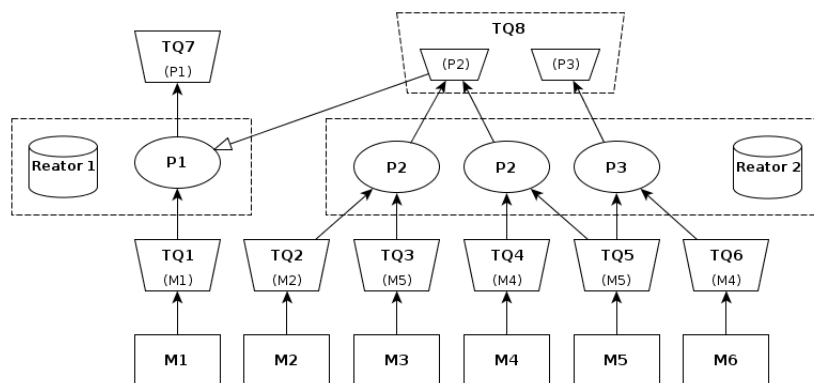


Figura 1: Fluxograma resumido do processo produtivo da indústria em estudo.

Outras características apresentadas por este problema podem ser observadas na Figura 1, a qual ilustra seis matérias primas, três produtos, dois reatores e oito tanques de armazenamento. Nota-se que o Reator 1 produz apenas o produto 1 (P1), o qual utiliza em sua reação o produto P2 e a matéria prima 1 (M1), caracterizando as estruturas de

<sup>1</sup>Produtos como desinfetantes, detergentes multiúso, lava-roupas e lava-louças, ceras líquidas, polidores para couro, entre outros.

múltiplos níveis. Após seu processo produtivo ser finalizado, P1 é estocado no tanque de armazenamento 7 (TQ7).

Já no Reator 2 ocorrem as produções de P2 e P3, o que representa a concorrência por este recurso. A fabricação de P2 pode ser efetuada através de dois processos distintos, utilizando matérias primas diferentes, o que denota a existência de produtos com estrutura de múltiplos processos. Além do reator, P2 e P3 também competem pelo tanque TQ8 para que possam utilizá-lo exclusivamente, ao final dos períodos, configurando a concorrência pelos tanques multipropósito.

Considerando essas características, foi desenvolvido um modelo matemático que utiliza os seguintes índices, parâmetros e variáveis:

Índices:

- $i = 1, \dots, N$  (número de itens);
- $p = 1, \dots, P$  (número de processos);
- $r = 1, \dots, R$  (número de reatores);
- $m = 1, \dots, M$  (número de matérias primas);
- $t = 1, \dots, T$  (número de períodos);
- $q = 1, \dots, Q$  (número de tanques).

Parâmetros do problema:

- $a_q$ : capacidade de armazenamento do tanque  $q$ ;
- $b_{i,p}$ : quantidade produzida do item  $i$ , por batelada, pelo processo  $p$ ;
- $c_{m,t}$ : custo unitário da matéria prima  $m$  no período  $t$ ;
- $d_{i,t}$ : demanda do item  $i$  no período  $t$ ;
- $e_{m,i,p}$ : consumo por batelada da matéria prima  $m$  na produção do item  $i$  no processo  $p$ ;
- $f_{j,i,p}$ : consumo por batelada do item intermediário  $j$  na produção do item  $i$  pelo processo  $p$ ;
- $g_{r,i,p}$ : consumo por batelada da capacidade produtiva do reator  $r$  na produção do item  $i$  pelo processo  $p$ ;
- $h_{r,t}$ : capacidade em horas do reator  $r$  no período  $t$ ;
- $s_{i,t}$ : preço de venda unitário do item  $i$  no período  $t$ ;
- $u_{i,q}$ : determina se o item  $i$  pode utilizar o tanque  $q$ ;
- $\alpha$ : percentual do preço de venda correspondente ao descarte do produto.
- $\beta$ : percentual do preço de venda correspondente ao custo de estocagem.
- $Q(i)$ : conjunto de tanques utilizáveis pelo item  $i$ .
- $R(q)$ : conjunto de itens que podem utilizar o tanque  $q$ .

Variáveis do problema:

- $X_{i,p,t}$ : número de bateladas produzidas do item  $i$  pelo processo  $p$  no período  $t$ ;
- $I_{i,t}$ : volume armazenado do item  $i$  no período  $t$ ;
- $W_{i,t}$ : volume descartado do item  $i$  no período  $t$ ;
- $Z_{q,i,t}$ : determina se o tanque  $q$  é ocupado pelo item  $i$  ao final do período  $t$ .

Modelo Matemático:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M (e_{m,i,p} * c_{m,t} * X_{i,p,t}) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T s_{i,t} (\alpha W_{i,t} + \beta I_{i,t}) \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^P (g_{r,i,p} * X_{i,p,t}) \leq h_{r,t} \quad \forall t, r \quad (2)$$

$$I_{i,t-1} + \sum_{p=1}^P (b_{i,p} * X_{i,p,t}) = d_{i,t} + \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^N (f_{i,j,p} * X_{j,p,t}) + W_{i,t} + I_{i,t}, \quad \forall i, t \quad (3)$$

$$I_{i,t} \leq \sum_{q \in Q(i)} a_q * Z_{q,i,t}, \quad \forall t, i \quad (4)$$

$$\sum_{i \in R(q)} Z_{q,i,t} \leq 1, \quad \forall q, t \quad (5)$$

$$I_{i,0} = 0, \quad \forall i \quad (6)$$

$$I_{i,t} \text{ e } W_{i,t} \geq 0, \quad \forall i, t \quad (7)$$

$$Z_{q,i,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall q, i, t \quad (8)$$

$$X_{i,p,t} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad \forall i, t, p \quad (9)$$

A função objetivo (1) visa minimizar os custos produtivos da indústria. Para isso, é analisado a relação de compromisso, ou *trade-off*, entre a escolha dos processos que reduzem o custo das matérias primas empregadas nas reações, a perda com o descarte de produtos quando não houver capacidade de armazenamento suficiente para a produção excedente, e o custo de estocagem dos produtos após a demanda do período ser atendida.

No processo produtivo dos itens multiestágio, o cálculo dos custos referentes aos itens componentes ocorre apenas na produção destes itens, ou seja, quando um item componente é utilizado em alguma reação, sua contribuição para a função objetivo ocorre apenas pelo incremento de seu custo produtivo em relação à sua demanda externa, por isso, a primeira parcela da função objetivo considera somente matérias primas.

O conjunto de inequações (2) limitam a utilização das máquinas pelos processos, assegurando que suas capacidades operacionais não sejam excedidas. Já em (3) ocorre o balanço de estoque do sistema, ou seja, a produção dos itens em um período, somado ao estoque proveniente do período anterior, deve ser igual à soma de sua demanda externa, de sua demanda interna, de seu descarte e do estoque ao final deste período.

As restrições (4) indicam que o estoque dos produtos podem ser distribuídos entre vários tanques, desde que a quantidade de cada produto armazenado não exceda a somatória das capacidades dos tanques que podem ser utilizados por eles, os quais limitam-se ao conjunto  $Q(i)$ . Já as restrições (5) garantem que ao final dos períodos cada tanque pode ser ocupado por até um produto, caso este pertença ao conjunto de itens representado por  $R(q)$ . Em (6) são representados, sem perda de generalidade, os estoques dos produtos no início do horizonte de planejamento,  $t = 0$ . Finalmente, em (7), (8) e (9) são definidos os domínios das variáveis.

### 3 - Abordagens de Solução

Neste trabalho foram desenvolvidas quatro heurísticas do tipo *relax-and-fix*, as quais caracterizam-se, em geral, por particionar as variáveis do problema em três conjuntos disjuntos. O primeiro conjunto contém as variáveis que passaram por um processo de fixação, o segundo possui as que se encontram da mesma forma que no modelo original e no terceiro ficam as variáveis que passaram por um processo de simplificação, por exemplo, como a relaxação linear, a qual foi utilizada neste trabalho.

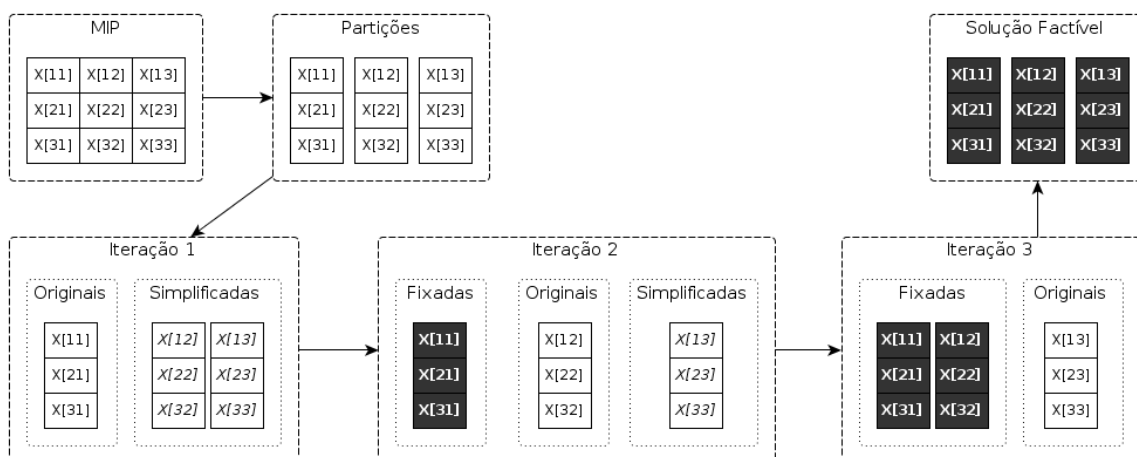


Figura 2: Representação genérica de uma heurística *relax-and-fix*.

Um modelo genérico para representar esse tipo de heurística é ilustrado pela Figura 2, na qual todas as variáveis inteiras ou binárias do MIP são particionadas em três subconjuntos disjuntos, as quais são inicialmente transformadas para pertencerem ao conjunto de variáveis simplificadas. Durante o processo iterativo, algumas variáveis que se encontram simplificadas são transformadas para integrarem o conjunto de variáveis originais, enquanto outras deste conjunto são modificadas para comporem o conjunto de variáveis fixadas, como pode ser observado na transição da iteração 1 para a 2. Ao final do processo, espera-se que todas as variáveis estejam fixadas, o que representa uma solução factível para o MIP original. Porém, se durante o processamento algum subproblema for infactível, a heurística é interrompida, pois não seria capaz de encontrar uma solução factível, mesmo se o problema original apresentasse tais soluções.

Um dos fatores fundamentais para a eficiência destas heurísticas está no particionamento de suas variáveis, sendo assim foram utilizadas três estratégias, uma orientada períodos, outra a itens e uma última a níveis.

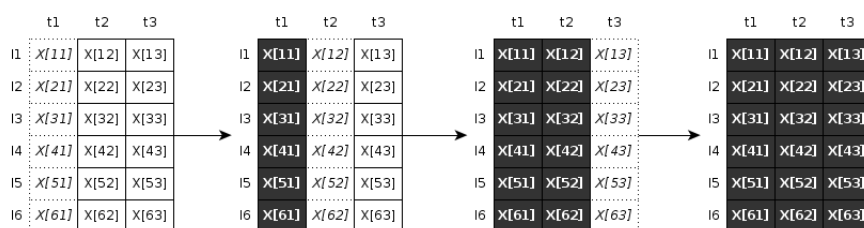


Figura 3: *Relax-and-fix forward* com partição por período.

A primeira forma de particionamento utiliza o agrupamento das variáveis em períodos, como ilustra a Figura 3, segundo a qual é possível notar que a cada iteração um novo subconjunto compõe as variáveis originais, representadas pelos retângulos com linhas pontilhadas. Ao final de cada iteração, essas variáveis passam pelo procedimento de fixação, passando a serem representadas pelos retângulos de cor preta. As demais variáveis, pertencente ao subconjunto das simplificadas, encontrando-se relaxadas. Para este particionamento foram utilizadas duas variantes, uma *forward*, que percorre os períodos começando do primeiro em direção ao último, e outra *backwards*, que inicia do último período e caminha para o primeiro.

Porém, o particionamento por períodos faz com que as variáveis originais de um

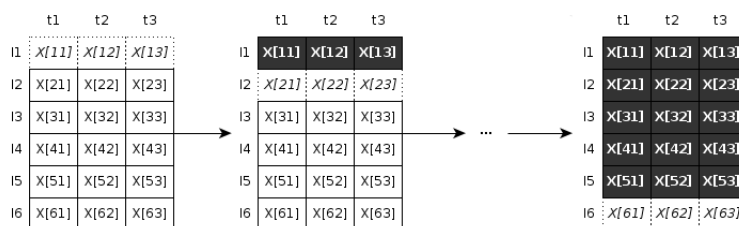


Figura 4: *Relax-and-fix* com partição por item.

item, consideradas a cada iteração, interajam apenas com as relaxadas deste mesmo item, no restante do horizonte de planejamento. Sendo assim, as variáveis também foram agrupadas com relação aos itens, de forma que uma partição contivesse todas as variáveis relacionadas a um item, ao longo do horizonte de planejamento, como pode ser observado na Figura 4.

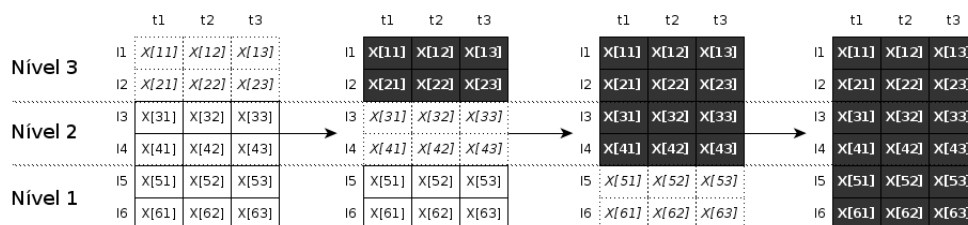


Figura 5: *Relax-and-fix* com partição por nível.

Ainda com relação à partição por itens, é possível aplicar nesta abordagem uma variação específica para problema com estrutura multiestágio, na qual ao invés de ser considerado um item a cada iteração, são considerados todos os itens pertencentes a um mesmo nível durante as iterações, como ilustrado na Figura 5, começando pelos itens do nível mais alto, pois estes não possuem itens predecessores.

## 4 - Experimentos Computacionais

### 4.1 - Geração dos Dados

O problema completo fornecido pela indústria é composto por 474 produtos, 134 matérias primas, 98 tanques e 15 reatores, apresentando demandas externas, preço de compra das matérias primas e de venda dos produtos para duas plantas produtivas, por um período de 12 meses. Porém, decidiu-se restringir o estudo a apenas uma planta produtiva, com 281 produtos, 53 matérias primas, 7 reatores, 56 tanques e 4 períodos.

Como a maior estrutura de produtos da empresa era composta por 4 níveis, optou-se por gerar classes com estruturas de 1, 2 e 3 níveis, para um estudo mais detalhado. Entretanto, ao considerar estas derivações e apenas uma planta, a capacidade produtiva dos reatores não condizia com as demandas dos produtos para as quatro classes. Portanto foi necessário realizar um procedimento para adequar essas capacidades, o qual consistiu em determinar a demanda de cada produto, como na equação (10), para posteriormente recalculer a capacidade produtiva dos reatores de acordo com a equação (11).

$$D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in \Phi(i)} \sum_{p=1}^{P_j} \frac{D_{jt}}{P_j} * \frac{f_{ijp}}{b_{ip}}, \quad \forall t, i \in \{S(n) \mid n \in \{N, \dots, 2, 1\}\} \quad (10)$$

O procedimento de determinação da demanda total é representado pela equação (10), na qual  $D_{it}$  e  $d_{it}$  equivalem à demanda total e à demanda externa do produto  $i$  no período  $t$ , respectivamente. O subconjunto  $\Phi(i)$  corresponde aos produtos do nível imediatamente superior a  $i$ , obviamente este subconjunto é vazio para os produtos finais,  $P_j$  constitui o número de possíveis processos para a fabricação do produto  $j$ ,  $f_{ijp}$  denota o consumo do produto intermediário  $i$  para a produção do produto  $j$  através do processo  $p$  e  $b_{ip}$  representa a quantidade produzida do produto  $i$  pelo processo  $p$ .

$$h_{rt} = \sum_i \sum_{p=1}^{P_i} \frac{D_{it}}{P_i} * \frac{g_{rip}}{b_{ip}}, \quad \forall r, t \quad (11)$$

A capacidade produtiva dos reatores foi determinada pela equação (11), na qual  $h_{rt}$  representa a capacidade do reator  $r$  no período  $t$ ,  $D_{it}$  corresponde à demanda total do produto  $i$  no período  $t$ ,  $P_i$  constitui o número de possíveis processos para a fabricação do produto  $i$ ,  $g_{rip}$  denota o tempo consumido no reator  $r$  para a produção do produto  $i$  através do processo  $p$  e  $b_{ip}$  representa a quantidade produzida do produto  $i$  pelo processo  $p$ .

Tabela 1: Características das instâncias geradas para os testes computacionais.

Classe	Produtos	Níveis	Reatores	Subclasse	Compartilhamento de Tanques
1	46	1	5	1.1	mínimo (0%)
				1.2	médio (~50%)
				1.3	máximo (~100%)
2	228	2	7	2.1	mínimo (0%)
				2.2	médio (~50%)
				2.3	máximo (~100%)
3	278	3	7	3.1	mínimo (0%)
				3.2	médio (~50%)
				3.3	máximo (~100%)
4	281	4	7	4.1	mínimo (0%)
				4.2	médio (~50%)
				4.3	máximo (~100%)

Um último procedimento foi adotado para gerar três subclasses de compartilhamento dos tanques, a primeira apresentando compartilhamento mínimo de tanques, ou seja, os tanques eram exclusivos dos produtos, chamados de tanques cativos, a segunda apresentando compartilhamento médio de tanques, para a qual aproximadamente metade dos produtos compartilhavam seus tanques com um segundo produtos, conhecidos como tanques multipropósito, e a última apresentando compartilhamento máximo dos tanques, no qual quase todos os itens compartilhavam seus tanques.

A Tabela 1 apresenta um resumo das características instâncias geradas para este trabalho. Cada uma das subclasses possui cinco exemplares, totalizando um conjunto de 60 instâncias de teste.

## 4.2 - Resultados Computacionais

O tempo total de processamento adotado na primeira etapa de testes foi de 300 segundos, com divisão igualitária entre as iterações das heurísticas *relax-and-fix*. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 2, na qual as siglas *R.F.* correspondem a *Relax-and-Fix*, e são representados através da média do GAP das soluções, o qual foi calculado através da equação (12). Como nem todas as heurísticas foram capazes de resolver as cinco instâncias propostas, o número sobrescrito, entre colchetes, representa a quantidade total de instâncias que as heurísticas encontraram ao menos uma solução factível.



$$GAP = \frac{\text{Solução Factível} - \text{Limitante Inferior}}{\text{Limitante Inferior}} \quad (12)$$

Analisando estes resultados, é possível observar que para a estrutura de produtos com um nível (Classe 1) a resolução do modelo inteiro misto, utilizando o *software* de otimização CPLEX 12.4<sup>2</sup>, destaca-se sobre as demais abordagens, as quais também utilizaram o mesmo *software*. Porém, quando é analisado o problema com estrutura de dois ou mais níveis (Classes 2, 3 e 4), o desempenho da heurística *relax-and-fix forward* é superior às demais tanto em relação à qualidade como em relação à quantidade das soluções obtidas, principalmente quando há compartilhamento de tanques.

O desempenho do modelo inteiro misto foi como esperado, visto que este problema apresenta características do *Capacitated Lot Sizing Problem* (CLSP), cuja obtenção da solução ótima possui complexidade NP-Difícil (Bitran e Yanasse, 1982), com adição de algumas propriedades que impõem dificuldade ao problema, caso dos produtos com estrutura multietágio e do compartilhamento de tanques. Para problemas com essa complexidade, conforme o número de variáveis aumenta, o tempo necessário para a obtenção de uma solução factível cresce rapidamente. Este fato pode ser observado através de redução do número de soluções factíveis encontradas ao analisar o aumento do número de variáveis de produtos, por exemplo entre as subclasses 2.2, 2.3 e 2.4, ou de compartilhamento de tanques, por exemplo entre as subclasses 3.1, 3.2 e 3.3.

A heurística *relax-and-fix* por itens não foi capaz de obter soluções factíveis para as instâncias com estrutura de mais de um nível devido a um problema de propagação das demandas internas, ou seja, quando as variáveis de produção de um item componente são determinadas antes de algum dos itens que o consome, ocorre uma subestimação da demanda interna, ocasionada pela relaxação linear das variáveis do item consumidor. Portanto, quando essas variáveis estiverem no subconjunto das originais (inteiras ou binárias), espera-se que seja necessário produzir um volume maior, para atender à integralidade dessas variáveis, porém, o estoque do item componente pode não ser suficiente para suprir tal incremento, impossibilitando a obtenção de uma solução factível.

A heurística *relax-and-fix* por níveis apresentou um GAP médio de 2.99%, enquanto a do MIP foi apenas 1.41%, entretanto, ela foi capaz de obter 41.0% a mais de soluções factíveis. O baixo percentual de instâncias resolvidas para a subclasse 2.3 provavelmente deve-se à configuração dos tanques, visto que cada subclasse apresenta essa característica distinta das demais, mas igual para todas as suas cinco instâncias.

Já a heurística *relax-and-fix backwards* por período não foi eficiente justamente pela ordem em que os períodos são percorridos, pois iniciando pelo último e deslocando em direção ao primeiro, as variáveis dos períodos iniciais serão as últimas a serem consideradas inteiras ou binárias, com isso, as produções dos itens podem tender aos períodos iniciais, que por possuírem variáveis relaxadas, permitem a utilização de 100% das capacidades dos reatores. Porém, a partir do momento que essas variáveis passam a ser consideradas como no modelo original, não há folga para que elas sejam reajustadas a valores inteiros.

Ao considerar a média dos tempos de execução, notou-se que o MIP utilizou 301.0 segundos para o processamento total, desde a inicialização até a liberação de memória, já a *relax-and-fix* por item necessitou de 7.4 segundos. As demais heurísticas *relax-and-fix forward* por período, *relax-and-fix backwards* por período e *relax-and-fix* por nível utilizaram, em média, 126.5, 95.2 e 299.5 segundos para resolver instâncias com estrutura de produtos com um nível e 283.4, 272.4 e 215.8 segundos para instâncias com estrutura de produtos com mais de um nível, respectivamente. Note que a heurística *relax-and-fix* por nível utiliza

<sup>2</sup> *Software* de otimização pertencente à IBM. Maiores informações em <http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer>

Tabela 2: GAP médio das heurísticas após 300 segundos de execução.

Subclasse	#	MIP (%)	R.F. Períodos Forward (%)	R.F. Períodos Backwards (%)	R.F. Item (%)	R.F. Nivel (%)
1.1	1	0.27	0.34	-	0.19	0.27
	2	0.18	0.38	0.61	0.15	0.18
	3	0.19	0.34	0.44	0.23	0.18
	4	0.22	0.45	-	-	0.22
	5	0.21	0.34	0.67	0.18	0.17
2.1	1	0.68	0.63	3.84	-	0.71
	2	0.82	0.76	4.88	-	0.93
	3	0.79	0.76	-	-	0.94
	4	0.79	0.68	4.14	-	0.82
	5	0.81	0.73	1.35	-	1.03
3.1	1	0.82	0.69	-	-	0.74
	2	0.94	0.90	2.44	-	0.85
	3	0.91	0.87	2.29	-	0.84
	4	0.82	0.72	1.44	-	0.81
	5	0.84	0.89	2.02	-	0.83
4.1	1	0.96	0.87	3.55	-	0.87
	2	1.05	0.92	2.38	-	0.95
	3	1.02	0.94	4.61	-	0.86
	4	-	0.95	1.85	-	0.95
	5	1.87	1.72	-	-	1.79
1.2	1	0.32	0.43	1.40	3.78	0.31
	2	0.37	0.58	1.44	3.98	0.36
	3	0.42	0.49	1.04	-	0.39
	4	0.46	0.75	1.11	2.95	0.48
	5	0.45	0.66	1.53	2.38	0.49
2.2	1	2.22	1.59	23.77	-	3.52
	2	3.19	2.18	22.86	-	4.14
	3	2.29	1.83	-	-	3.01
	4	2.54	1.87	5.96	-	3.31
	5	3.63	1.65	-	-	3.68
3.2	1	-	2.08	-	-	4.10
	2	3.12	2.29	-	-	3.71
	3	6.19	2.61	5.91	-	4.30
	4	2.76	2.41	4.81	-	3.81
	5	-	2.35	6.00	-	3.50
4.2	1	-	3.27	7.79	-	6.02
	2	4.57	2.47	5.97	-	4.66
	3	-	2.51	9.22	-	5.08
	4	-	2.58	7.37	-	4.73
	5	-	2.48	-	-	4.44
1.3	1	0.66	1.17	1.97	-	0.64
	2	0.81	1.22	2.50	5.67	0.88
	3	0.74	0.90	1.81	5.32	0.77
	4	0.93	1.35	2.43	4.54	1.17
	5	0.73	1.09	2.41	3.90	0.75
2.3	1	4.59	2.76	26.44	-	6.08
	2	-	3.29	-	-	-
	3	-	3.22	-	-	-
	4	-	3.33	9.08	-	-
	5	-	3.31	-	-	-
3.3	1	-	4.96	-	-	-
	2	-	4.72	19.19	-	7.99
	3	-	4.58	-	-	8.36
	4	-	4.95	-	-	8.56
	5	-	4.48	13.96	-	7.36
4.3	1	-	5.13	-	-	9.27
	2	-	4.04	-	-	8.19
	3	-	4.63	30.09	-	8.61
	4	-	4.81	21.44	-	8.69
	5	-	4.53	-	-	8.08

mais tempo de processamento para instâncias com estrutura de um nível do que para as com mais de um nível, este fato ocorre pois de forma geral essa heurística é semelhante à resolução do MIP quando trata instâncias com estrutura de apenas um nível.

Com essa análise e considerando o fato do problema enfrentado pela empresa aproximar-se da subclasse 4.2, apenas as heurísticas *relax-and-fix forward* por período e *relax-and-fix* por nível foram selecionadas para a próxima etapa de testes, para a qual foi disponibilizado 3600 segundos para execução.

Os resultados obtidos neste último teste estão exibidos na Tabela 3, através da qual é possível notar que o CPLEX 12.4 foi capaz de encontrar solução para 40% das instâncias, através do modelo inteiro misto, enquanto as duas heurísticas obtiveram soluções em todos os casos de teste.

Tabela 3: GAP das soluções após 3600 segundos de execução.

Subclasse	#	MIP (%)	R.F. Períodos Forward (%)	R.F. Nível (%)
4.2	1	3.20	3.22	5.88
	2	2.21	2.44	4.39
	3	-	2.39	4.85
	4	-	2.44	4.46
	5	-	2.38	3.97

Analisando a variação do GAP, entre as execuções de 300 e 3600 segundos, nota-se uma redução significativa na instância 2, para o modelo inteiro misto, além da obtenção de uma solução factível para o instância 1. Enquanto a redução apresentada pelo *relax-and-fix* por nível foi de 0.28% e a do *relax-and-fix forward* por período foi de apenas 0.09%.

## 5 - Considerações Finais

Neste trabalho foi considerado um problema de dimensionamento de lotes multietápico com máquinas paralelas e multiprocessos, apresentando ainda a característica de compartilhamento de tanques entre produtos, para o qual foram propostas quatro heurísticas *relax-and-fix*, com decomposições de variáveis orientadas a períodos, itens e níveis.

Ao analisar os experimentos computacionais, constata-se que a heurística *relax-and-fix forward* por período obteve resultados mais consistentes que as demais, fornecendo boas soluções após 300 segundos de execução. Quando considerado apenas as instâncias similares ao problema real enfrentado pela empresa, com execução de 3600s segundos, a heurística *relax-and-fix forward* também destaca-se em relação às demais, apresentando GAPs consideravelmente menores do que a *relax-and-fix* por nível e resolvendo todas as instâncias, ao contrário do MIP.

Apesar da redução do GAP obtida pelo CPLEX 12.4 entre as execuções com tempo de 300 e 3600 segundos, ele ainda não foi capaz de resolver 50% das instâncias. Uma alternativa seria fornecer mais tempo de execução, porém, não haveria garantia de redução significativa dos GAPs se fosse mantido o equipamento utilizado, visto que após 3600 segundos de execução, o *software* já estava utilizando praticamente todos os 7.8 GB de memória principal, e assim que começasse a utilizar memória virtual, ou *swapping*, o desempenho cairia drasticamente.

A partir desse estudo, conclui-se que para problemas dessa natureza, a heurística *relax-and-fix forward* obtém boas soluções após pouco tempo de processamento, podendo ser empregada na simulação de diversos cenários enfrentados pela indústria ou permitir a inclusão de novas características no modelo, tornando-o ainda mais parecido com a realidade.

Trabalhos futuros serão direcionados para o desenvolvimento de novas heurísticas

construtivas utilizando *LP-and-Fix*, como proposto em Akartunali e Miller (2009), além de heurísticas de melhoria do tipo *Fix-and-Optimize*, como encontrado em Sahling et al. (2009).

**Agradecimentos.** Este trabalho teve apoio do CNPq e da FAPESP.

## Referências

- Akartunali, K.; Miller, A. J.** (2009). A heuristic approach for big bucket multi-level production planning problems. *European Journal of Operational Research*, 193, 396 – 411.
- Araujo, S. A. d.; Arenales, M. N.** (2000). Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, 20, 287 – 306.
- Billington, P. J.; McClain, J. O.; Thomas, L. J.** (1983). Mathematical programming approaches to capacity-constrained MRP systems: Review, formulation and problem reduction. *Management Science*, 29, 1126–1141.
- Bitran, G. R.; Yanasse, H. H.** (1982). Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, 28, 1174–1186.
- Brahimi, N.; Dauzere-Peres, S.; Najid, N. M.; Nordli, A.** (2006). Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, 168, 1 – 16.
- Buschkühl, L.; Sahling, F.; Helber, S.; Tempelmeier, H.** (2010). Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. *OR Spectrum*, 32, 231–261.
- Comelli, M.; Gourgand, M.; Lemoine, D.** (2008). A review of tactical planning models. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 17, 204–229.
- Drexl, A.; Kimms, A.** (1997). Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99, 221 – 235.
- Fernandes, F. C. F.; Godinho, M.** (2010). *Planejamento e Controle da Produção: dos Fundamentos ao Essencial*. Atlas S.A.
- Harris, F. W.** (1913). How many parts to make at once. *Factory, The Magazine of Management*, 10, 135–136, 152.
- Karimi, B.; Ghomi, S. F.; Wilson, J.** (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 31, 365 – 378.
- Kirca, O.; Kökten, M.** (1994). A new heuristic approach for the multi-item dynamic lot sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 75, 332 – 341.
- Maes, J.; McClain, J. O.; Wassenhove, L. N. V.** (1991). Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP-based heuristics. *European Journal of Operational Research*, 53, 131 – 148.
- Maes, J.; Wassenhove, L. N. V.** (1986). A simple heuristic for the multi item single level capacitated lotsizing problem. *Operations Research Letters*, 4, 265 – 273.
- Mercé, C.; Fontan, G.** (2003). MIP-based heuristics for capacitated lotsizing problems. *International Journal of Production Economics*, 85, 97 – 111.
- Quadt, D.; Kuhn, H.** (2008). Capacitated lot-sizing with extensions: a review. *4OR*, 6, 61–83.
- Sahling, F.; Buschkühl, L.; Tempelmeier, H.; Helber, S.** (2009). Solving a multi-level capacitated lot sizing problem with multi-period setup carry-over via a fix-and-optimize heuristic. *Computers & Operations Research*, 36, 2546 – 2553.
- Trigeiro, W. W.; Thomas, L. J.; McClain, J. O.** (1989). Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, 35, 353–366.