# LIMITANTES INFERIORES PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES COM VÁRIAS PLANTAS

**Gislaine Mara Melega**
UNESP/IBILCE/DMAp
Rua Cristóvão Colombo, 2265, Jd Nazareth - CEP 15054-000 - S. J. do Rio Preto - SP, Brasil
e-mail: gislainemelega@gmail.com

**Silvio Alexandre de Araujo**
UNESP/IBILCE/DMAp
Rua Cristóvão Colombo, 2265, Jd Nazareth - CEP 15054-000 - S. J. do Rio Preto - SP, Brasil
e-mail: saraujo@ibilce.unesp.br

## RESUMO

Este trabalho aborda o problema de dimensionamento de lotes em um ambiente constituído de várias plantas. Cada item pode ser produzido em qualquer planta e é possível atender a demanda de uma determinada planta com produção proveniente de uma (ou várias outras) planta(s); para tanto, incorre-se um custo de transferência. Propõem-se uma reformulação para o problema, baseada no problema do caminho mínimo (*Shortest Path* - *SP*). Como também um método de busca de bons limitantes inferiores, no qual a relaxação Lagrangiana é aplicada às restrições de demanda e o método do subgradiente é utilizado para atualizar os multiplicadores. A fim de verificar a qualidade dos limitantes obtidos, são apresentados experimentos computacionais com dados da literatura e estes são comparados aos obtidos com o pacote comercial CPLEX.

**PALAVRAS CHAVE: Problema de dimensionamento de Lotes, Reformulações, Relaxação Lagrangiana.**

**Área Principal:** Otimização Combinatória

## ABSTRACT

This paper deals with the multi-plant lot sizing problem. Each item can be produced at any plant and the demand of a particular plant can be met using the production from another (or several other) plant(s); to do so, there is a transfer cost. We propose a reformulation for the problem, based on the Shortest Path problem (*SP*). We also propose, a solution method to find good lower bounds, where, the Lagrangian relaxation is applied to the demand constraints and the subgradient method is used to update the multipliers. Aiming to verify the quality of the lower bounds, we present computational experiments with data from literature and compare them to those obtained with commercial package CPLEX.

**KEYWORDS: Lot sizing Problems, Reformulations, Lagrangian Relaxation.**

**Main area:** Combinatorial Optimization

# 1 Introdução

O problema de dimensionamento de lotes, consiste basicamente em determinar em um horizonte de tempo finito a quantidade de itens a ser produzido, para os quais há uma demanda a ser atendida. O objetivo é geralmente de origem econômica e envolve a minimização de custos de produção, custos de estoque e custos de preparação de máquinas. Tal tipo de problema enquadra-se no planejamento tático/operacional da produção.

Mais especificamente, o problema abordado neste trabalho, envolve o planejamento da produção de múltiplos itens em várias plantas distintas com capacidade limitada para cada planta. Cada planta tem uma determinada demanda por item, os quais podem ser produzidos em qualquer uma das plantas, podendo haver transferência entre plantas, a fim de atender suas demandas. Cada planta tem capacidade limitada e, para produzir determinado item em uma determinada planta, incorre-se um tempo de preparação.

Na literatura não existem muitos trabalhos que consideram o ambiente de produção composto de várias plantas. Um dos primeiros estudos que consideram este ambiente de produção é apresentado por Bhatnagar *et al.* (1993). Os autores estudaram o planejamento da produção entre várias plantas. O objetivo era coordenar os planos de produção e estoque em todas as plantas de modo que o desempenho global e a posição competitiva da empresa fosse melhorada. Este problema procura coordenar diferentes funções como o planejamento da produção, estoque, distribuição dentre outros. Para a eficácia, foram levados em consideração os efeitos da incerteza da demanda final, dos processos de produção e as restrições de capacidade em cada planta, sendo considerado também a integração entre as áreas de coordenação geral e a coordenação em cada planta. Em se tratando destes tipos de problemas, que são de difícil solução, heurísticas são necessárias a fim de se obter bons limitantes para o problema.

Sambasivan e Schmidt (2002) propuseram uma abordagem heurística para resolver o problema de dimensionamento de lotes com plantas e restrição de capacidade, podendo suprir a demanda uma da outra por transferência da produção e todas as plantas podem produzir os mesmos itens. Utilizam o problema sem restrição de capacidade para gerar as soluções iniciais. A fim de remover a violação de capacidade os autores empregam uma rotina de suavização, que consiste de dois módulos: mudança e divisão de lotes. Para testar a qualidade do método proposto, compararam à solução da relaxação linear.

Sambasivan e Yahya (2005) apresentam uma abordagem heurística baseada na relaxação Lagrangiana aplicada às restrições de capacidade a fim de resolver um sistema integrado com várias plantas, vários itens e transferências entre plantas utilizando o modelo apresentado em Sambasivan e Schmidt (2002). Tal heurística foi desenvolvida para resolver um problema real em uma empresa de fabricação de produtos de aço laminado com 4 unidades localizadas em diferentes partes dos Estados Unidos da América. Os autores concluíram que, de forma geral, a heurística de aproximação Lagrangiana obtém boas soluções para este problema e em testes realizados, o número de itens é o fator que causa maior interferência no *gap*.

Em um trabalho recente, Nascimento *et al.* (2010) utilizaram o modelo proposto em Sambasivan e Schmidt (2002). Os autores propõem uma heurística baseada na meta-heurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*). Os resultados foram analisados com os obtidos por Sambasivan e Yahya (2005) quanto ao caso de várias plantas obtendo resultados melhores. No caso de problemas em máquinas paralelas, a heurística proposta mostrou-se competitiva.

Silva e Toledo (2012) propõem um modelo para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas baseado no problema de localização de facilidades e compara este modelo com o proposto por Sambasivan e Schmidt (2002). Com os resultados dos testes computacionais os autores concluem que embora o modelo proposto tenha um número de restrições e variáveis maior do que o modelo original, sua relaxação linear e os tempos computacionais apresentaram melhores resultados.

A intenção deste trabalho é estudar e aplicar métodos a fim de se obter bons limitantes inferiores para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas. A princípio uma reformulação para o problema original é proposta baseada no problema do caminho mínimo e a partir desta reformulação são gerados limitantes inferiores através da relaxação Lagrangiana, a qual é aplicada às restrições de demanda, utilizando-se desta forma, a decomposição por períodos e plantas, ideia esta, já foi utilizada com sucesso na literatura para problemas similares. Para a atualização dos multiplicadores, utiliza-se o método do subgradiente.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. Na seção 2 são apresentados os modelos matemáticos para a formulação original e a reformulação proposta. Na seção 3 é apresentado o método de busca de limitantes inferiores no qual utiliza-se a relaxação Lagrangiana aplicada as restrições de demanda do problema original. Na seção 4 são apresentados os experimentos computacionais e finalmente as conclusões são apresentados na seção 5.

## 2 Formulação Matemática

A formulação para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas apresentada a seguir é a mesma que em Sambasivan e Schmidt (2002), com o acréscimo das variáveis de estoque inicial e será denotada por *MPCL* (*Multi- Plant Capacitated Lot-Sizing Problem*).

Dados:

$P = \{1, \dots, M\}$ denota o conjunto de plantas;

$fc_{il}$ custo unitário de estoque inicial para o item $i$ na planta $l$;

$d_{ijt}$ demanda do item $i$ na planta $j$ durante o período $t$;

$r_{jlt}$ custo unitário de transferência de uma unidade de qualquer item da planta $j$ para a planta $l$ durante o período $t$;

Variáveis de decisão:

$X_{ijt}$ quantidade produzida do item $i$ na planta $j$ durante o período $t$;

$H_{ijt}$ quantidade estocada do item $i$ na planta $j$ durante o período $t$;

$H_{il0}$ quantidade de estoque inicial para o item $i$ na planta $l$;

$Z_{ijt}$ variável binária, indicando a produção ou não do item $i$ na planta $j$ durante o período $t$;

$W_{ijlt}$ quantidade do item $i$ a ser transferida da planta $j$ para a planta $l$ $(l \neq j)$ durante o período $t$;

**Formulação do Problema *MPCL*:**

$$min \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} fc_{il}H_{il0} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{R}\left[sc_{ijt}Z_{ijt} + vc_{ijt}X_{ijt} + hc_{ijt}H_{ijt} + \left(\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M} r_{jlt}W_{ijlt}\right)\right] \tag{1}$$

Sujeito a:

$$X_{ijt} + H_{ijt-1} - H_{ijt} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{M} W_{isjt} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{M} W_{ijlt} = d_{ijt} \qquad \forall i,\ \forall j,\ \forall t \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left( \ st_{ijt} Z_{ijt} + vt_{ijt} X_{ijt} \ \right) \leq Cap_{jt} \qquad \forall j,\ \forall t \qquad (3)$$

$$X_{ijt} \leq \left( \sum_{l=1}^{M} \sum_{\tau=t}^{R} d_{il\tau} \right) Z_{ijt} \qquad \forall i,\ \forall j,\ \forall t \qquad (4)$$

$$Z_{ijt} \in \{0, 1\} \qquad \forall i,\ \forall j,\ \forall t \qquad (5)$$

$$X_{ijt} \geq 0, \quad H_{ijt} \geq 0, \quad H_{ij0} \geq 0, \quad H_{ijR} = 0, \quad W_{ijlt} \geq 0, \qquad \forall i,\ \forall j,\ l \neq j,\ \forall t \qquad (6)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos custos de preparo, produção, estoque e estoque inicial como também os custos de transferência dos itens entre as plantas. As restrições (2) garantem o balanceamento de estoque do item $i$ na planta $j$ durante o período $t$, ou seja, a demanda do item $i$ na planta $j$ durante o período $t$ ($d_{ijt}$) é atendida pela produção deste item na planta $j$ no período $t$ ($X_{ijt}$), adicionado à quantidade do item armazenada no período anterior na planta $j$ ($H_{ijt-1}$), a quantidade a ser transferida de outras plantas para planta $j$ ($\sum_{\substack{s \in P \\ s \neq j}}^{M} W_{isjt}$), subtraindo a quantidade do item $i$ na planta $j$ no período $t$ que é transferida para as outras plantas ($\sum_{\substack{l \in P \\ l \neq j}}^{M} W_{ijlt}$) e a quantidade deste item que é armazenada em estoque no período $t$ na planta $j$ ($H_{ijt}$). No modelo apresentado por Sambasivan e Schmidt (2002) os autores não utilizam nenhum procedimento para evitar possíveis problemas infactíveis. A fim de lidar com este tipo de problema, em nossos modelos será permitido estoque inicial, em que este, está disponível no primeiro período a um custo alto ($fc_{ij}$) e não é necessário preparo para o estoque inicial, o estoque inicial também pode ser visto como a compra de itens de terceiros no intuito de satisfazer a demanda de uma planta. Outras abordagens tem sido utilizadas para tratar da infactibilidade dos problemas como: a permissão de atrasos no atendimento à demanda, a permissão de horas extras (Vanderbeck (1988)). Em seguida, temos as restrições de capacidade (3) garantindo que a capacidade disponível na planta $j$ no período $t$ não é violada. As restrições de preparo (4) asseguram que o tempo e o custo de preparo são considerados apenas quando existe produção, isto é, $X_{ijt} > 0$ e, por fim, (5) e (6) são as restrições de domínio das variáveis.

Na formulação *MPCL*, ao considerar todos os valores $r_{jlt}$ iguais a zero e a presença de um único armazém de estoque, o modelo matemático pode ser tratado como um problema de programação em máquinas paralelas, em que cada planta representa uma máquina. Sambasivan e Schmidt (2002) mostram que, quando se tem o ambiente com várias plantas a solução ótima do problema considerando o planejamento da produção integrando as diversas plantas é equivalente ou melhor que à uma solução obtida da soma de cada subproblema com uma única planta.

Uma nova tendência na resolução dos problemas de dimensionamento de lotes é a redefinição das variáveis de decisão do problema original e a inclusão de inequações válidas. Tais acontecimentos ocorreram principalmente devido a qualidade ruim dos limites inferiores obtidos com a relaxação linear da formulação original. O objetivo de propor reformulações para o problema é apertar os limites inferiores, a fim de aumentar a eficiência dos métodos de solução. Uma das principais reformulações estudadas na literatura baseia-se no problema do caminho mínimo (*Shortest Path - SP* ) apresentada inicialmente por Eppen e Martin (1987). A ideia foi originalmente proposta para problemas sem restrição de capacidade, Jans e Degraeve (2004), estenderam a idéia para problemas com restrição de capacidade e uma única máquina. Posteriormente Jans (2009) e Fiorotto e Araujo (2012) estenderam para o caso com máquinas paralelas relacionadas e não relacionadas, respectivamente.

Cabe ressaltar a importância de se estudar e obter reformulações fortes para estes problemas, devido a sua grande complexidade computacional, pois ao apertar os limitantes inferiores tem-se uma redução das árvores de solução associados aos métodos de enumeração implícita e consequentemente uma diminuição no tempo computacional.

Para esta reformulação defina os seguintes parâmetros:

$cv_{ijlt\tau}$: custo de produção, transferência e estoque total do item $i$, na planta $j$ durante o período $t$, utilizado para satisfazer a demanda do item $i$ na planta $l$ dos períodos $t$ até $\tau$, com $\tau \geq t$, isto é,

$$cv_{ijlt\tau} = (vc_{ijt} + r_{jlt}) \sum_{a=t}^{\tau} d_{ila} + \sum_{a=t+1}^{\tau} \sum_{b=t}^{a-1} hc_{ilb} d_{ila}$$

$ct_{ijlt\tau}$: tempo necessário para a produção do item $i$, na planta $j$ durante o período $t$, utilizado para satisfazer a demanda do item $i$ na planta $l$ dos períodos $t$ até $\tau$, com $\tau \geq t$, ou seja,

$$ct_{ijlt\tau} = vt_{ijt} \sum_{a=t}^{\tau} d_{ila}$$

$co_{ilt}$: custo de estoque inicial para o item $i$ na planta $l$, a fim de satisfazer a demanda do período 1 até o período $t$, isto é,

$$co_{ilt} = \sum_{a=1}^{t} fc_{ilt} d_{ila} + \sum_{s=2}^{t} \sum_{u=1}^{s-1} hc_{ilu} d_{ils}$$

Considere também as seguintes redefinições das variáveis de decisão:

$Z_{ijt}$ variável binária indicando a produção ou não do item $i$, na planta $j$ durante o período $t$.

$V_{ijlt\tau}$: fração do plano de produção do item $i$, na planta $j$ durante o período $t$, utilizado para satisfazer a demanda do item $i$ na planta $l$ dos períodos $t$ até $\tau$, com $\tau \geq t$.

$VI_{ilt}$: fração do plano de estoque inicial para o item $i$ na planta $l$, em que a demanda do item $i$ na planta $l$ é satisfeita para os primeiros $t$ períodos.

A reformulação baseada no problema do caminho mínimo (*Shortest Path*) é a seguinte:

**Formulação do Problema *MPSP*:**

$$min \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} \sum_{t=1}^{R} co_{ilt} VI_{ilt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{R} sc_{ijt} Z_{ijt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \sum_{t=1}^{R} \sum_{\tau=t}^{R} cv_{ijlt\tau} V_{ijlt\tau} \quad (7)$$

Sujeito a:

$$\sum_{\tau=1}^{R} VI_{il\tau} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{R} V_{ijl1\tau} = 1 \qquad \forall i,\ \forall l \qquad (8)$$

$$VI_{ilt-1} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{t-1} V_{ijl\tau t-1} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R} V_{ijlt\tau} \qquad \forall i,\ \forall l,\ \forall t, t \geq 2 \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{N} st_{ijt}Z_{ijt} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R} ct_{ijlt\tau}V_{ijlt\tau} \leq Cap_{jt} \qquad \forall j,\ \forall t \qquad (10)$$

$$\sum_{\tau=t}^{R} V_{ijlt\tau} \leq Z_{ijt} \qquad \forall i,\ \forall j,\ l,\ \forall t \qquad (11)$$

$$Z_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall i,\ \forall j,\ \forall t \qquad (12)$$

$$V_{ijlt\tau} \geq 0, \quad VI_{ilt} \geq 0 \qquad \forall i,\ \forall j, l,\ \forall t, \tau,\ \tau \geq t \qquad (13)$$

Nesta formulação, a função objetivo (7) minimiza a soma dos custos de estoque inicial, preparo e custo agregado de produção, transferência e estocagem. As restrições (8) e (9) definem as restrições de fluxo para o problema de caminho mínimo. Para cada item, um fluxo unitário é enviado na rede, impondo que a demanda deste item, em cada planta $l$, dos períodos de $t$ até $\tau$ seja satisfeita sem atrasos. As restrições de capacidade (10) correspondem às restrições de capacidade (3). Em seguida, as restrições (11) asseguram que para todo par $(j,t)$ fixo é possível atender a demanda de qualquer planta para os períodos de $t$ até $\tau$. Por fim, as restrições (12) e (13) são de domínio das variáveis.

# 3 Relaxação Lagrangiana

Esta seção é destinada a apresentação do método de busca de limitantes inferiores para o problema *MPSP*. A técnica utilizada é a relaxação Lagrangiana, a qual é aplicada as restrições de fluxo do problema (8) e (9), em que estas são retiradas do conjunto de restrições do problema e dualizadas na função objetivo, que penalizam-à caso não sejam satisfeitas. O problema resultante pode ser decomposto em subproblemas independentes por período e planta, contendo as restrições de capacidade, preparo e as condições de integralidade.

Observa-se que, em geral, quando se aplica a relaxação Lagrangiana a problemas de dimensionamento de lotes, relaxam-se as restrições de capacidade (10) (ver por exemplo, Trigeiro *et al.* (1989), Toledo e Armentano (2006) e Sambasivan e Yahya (2005)). No entanto, motivados pela qualidade dos limitantes obtidos para o caso de única máquina (Jans e Degraeve (2004)) e máquinas paralelas (Fiorotto e Araujo (2012) resolvemos aplicar a relaxação Lagrangiana às restrições de fluxo (8) e (9).

Sejam $\lambda_{il1}$ os multiplicadores de Lagrange associados as restrições (8) e $\lambda_{ilt}$ com $t \geq 2$ os multiplicadores associados às restrições (9), multiplicadores estes irrestritos. Assim obtemos a seguinte função Lagrangiana:

$$min \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=1}^{R} co_{ilt}VI_{ilt} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{R} sc_{ijt}Z_{ijt} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=1}^{R}\sum_{\tau=t}^{R} cv_{ijlt\tau}V_{ijlt\tau} +$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} \lambda_{il1}\left( \sum_{\tau=1}^{R} VI_{il\tau} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{R} V_{ijl1\tau} - 1 \right) +$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=2}^{R}\lambda_{ilt}\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R}V_{ijlt\tau}-\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{t-1}V_{ijl\tau t-1}-VI_{ilt-1}\right)$$

Ao efetuar uma reorganização dos termos na função Lagrangiana obtemos o problema Lagrangiano que será denotado por $PLMPSP$.

$$min \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{R}sc_{ijt}Z_{ijt}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=1}^{R-1}\left(\ co_{ilt}-\lambda_{il1}+\lambda_{ilt+1}\ \right)VI_{ilt}+$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\ co_{ilR}-\lambda_{il1}\ \right)VI_{ilR}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=1}^{R-1}\sum_{\tau=t}^{R-1}\left(\ cv_{ijlt\tau}-\lambda_{ilt}+\lambda_{il\tau+1}\ \right)V_{ijlt\tau}+$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=1}^{R}\left(\ cv_{ijltR}-\lambda_{ilt}\ \right)V_{ijltR}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\lambda_{il1} \qquad (14)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{N}st_{ijt}Z_{ijt}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R}ct_{ijlt\tau}V_{ijlt\tau}\leq Cap_{jt} \qquad \forall j,\ \forall t \qquad (15)$$

$$\sum_{\tau=t}^{R}V_{ijlt\tau}\leq Z_{ijt} \qquad \forall i,\ \forall j,\ l,\ \forall t \qquad (16)$$

$$Z_{ijt}\in\{0,1\} \qquad \forall i,\ \forall j,\ \forall t \qquad (17)$$

$$V_{ijlt\tau}\geq 0,\quad VI_{ilt}\geq 0 \qquad \forall i,\ \forall j,l,\ \forall t,\tau,\ \tau\geq t \qquad (18)$$

O problema Lagrangiano (14) - (18) é resolvido iterativamente, e as variáveis duais $\lambda_{ijt}$ são atualizadas pelo método do subgradiente (Fisher (1981), Held *et al.* (1974)). Considere $\lambda_{ilt}^{k}$ os multiplicadores de Lagrange na iteração $k$ e $(Z_{ijt}^{k}, V_{ijlt\tau}^{k}, VI_{ilt}^{k})$ a solução ótima para o problema nesta iteração com valor ótimo da função objetivo (14) denotado por $z(\lambda_{ilt}^{k})$. Os novos multiplicadores de Lagrange serão atualizados de acordo com as equações (19) e (20) e o tamanho do passo $t_k$ é dado pela equação (21):

$$\lambda_{il1}^{k+1}=\lambda_{il1}^{k}-t_k\left(\sum_{\tau=1}^{R}VI_{il\tau}^{k}+\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{R}V_{ijl1\tau}^{k}-1\right) \qquad \forall i,\ \forall l \qquad (19)$$

$$\lambda_{ilt}^{k+1}=\lambda_{ilt}^{k}-t_k\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R}V_{ijlt\tau}^{k}-\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{t-1}V_{ijl\tau t-1}^{k}-VI_{ilt-1}^{k}\right) \qquad \forall i,\ \forall l,\ \forall t\geq 2 \qquad (20)$$

$$t_k=\frac{\rho(LS-z(\lambda_{ilt}^{k}))}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{\tau=1}^{R}VI_{il\tau}^{k}+\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{R}V_{ijl1\tau}^{k}-1\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{t=2}^{R}\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R}V_{ijlt\tau}^{k}-\sum_{j=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{t-1}V_{ijl\tau t-1}^{k}-VI_{ilt-1}^{k}\right)^2} \qquad (21)$$

onde $LS$ é o um limite superior (fornecido por exemplo por uma heurística de factibilização) e $\rho$ é um parâmetro conhecido que decresce sempre que não há melhoria no valor da função objetivo $z(\lambda_{ilt}^{k})$ após um certo número de iterações.

Como dito anteriormente, o problema *PLMPSP* pode ser decomposto em subproblemas independentes para cada período $t \in T$, e para cada planta $j \in P$ obtendo o seguinte subproblema:

$$min \sum_{i=1}^{N} sc_{ijt} Z_{ijt} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R-1} \left( cv_{ijlt\tau} - \lambda_{ilt} + \lambda_{il\tau+1} \right) V_{ijlt\tau} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} \left( cv_{ijltR} - \lambda_{ilt} \right) V_{ijltR} \tag{22}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{N} st_{ijt} Z_{ijt} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{\tau=t}^{R} ct_{ijlt\tau} V_{ijlt\tau} \leq Cap_{jt} \tag{23}$$

$$\sum_{\tau=t}^{R} V_{ijlt\tau} \leq Z_{ijt} \qquad \forall i,\ \forall l \tag{24}$$

$$Z_{ijt} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \tag{25}$$

$$V_{ijlt\tau} \geq 0 \qquad \forall i,\ \forall l,\ \forall \tau \geq t \tag{26}$$

Note que as variáveis de estoque inicial $VI_{ilt}$ presentes na função objetivo do problema *PLMPSP* não estão presentes na função objetivo do subproblema decomposto. Isto se deve ao fato de tais variáveis não estarem contidas nas restrições dos subproblemas. O subproblema resultante da decomposição, tem como principal objetivo facilitar a resolução do problema Lagrangiano, então resta encontrar algoritmos eficientes para resolve-lo.

O subproblema resultante da decomposição, tem como principal objetivo facilitar a resolução do problema Lagrangiano, então resta encontrar algoritmos eficientes para resolve-lo. Para o problema com uma única máquina Jans e Degraeve (2004) propuseram um método *Branch-and-Bound* para resolver o subproblema resultante da decomposição por períodos, em que os autores observaram a equivalência entre a relaxação linear do subproblema e o problema da mochila de múltipla escolha linear (*linear multiple choice knapsack problem* (*LMCKP*)) que é a relaxação linear do problema da mochila de múltipla escolha (*MCKP*). Posteriormente, Fiorotto e Araujo (2012) estenderam o mesmo método *Branch-and-Bound* para resolver o problema resultante da decomposição em períodos e máquinas para um problema com máquinas paralelas. No entanto a adaptação para o caso de várias plantas não é trivial, mas possivelmente se enquadra em alguma classe de problema da mochila. Na atual versão deste trabalho resolve-se este subproblema com o pacote computacional LINDO, que se comporta de maneira eficiente na resolução dos subproblemas.

Assim, para iniciar o método fixa-se as variáveis duas em zero ($\lambda_{ilt} = 0$), passando para o próximo passo aplica-se a relaxação lagrangiana nas restrições de fluxo e obtém-se subproblemas independentes por período e planta. Então, as soluções destes subproblemas são agrupadas e geram um limitante inferior para o problema e, se este for melhor, o limitante inferior é atualizado.

## 4 Testes Computacionais

A fim de verificar a qualidade dos limitantes inferiores obtidos, a reformulação *MPSP* foi escrita na sintaxe do AMPL e como solver utilizou-se o CPLEX 12.1. Por fim, para cada exemplar foi considerado um tempo limite de 30 minutos (1800 segundos). Estes resultados foram comparados aos obtidos com a relaxação Lagrangiana implementada em Fortran 77. Para a resolução dos subproblemas provenientes da decomposição por períodos e plantas, utiliza-se o pacote comercial LINDO. Todos os testes foram realizados em um computador com processador Intel Corel i7, com 2,93 GHz e com 8,00 GB de memória RAM, sob a plataforma do Windows 7.

No método do subgradiente as variáveis duais são atualizadas segundo o tamanho do passo (21). O tamanho do passo é proporcional ao parâmetro $\rho$ e este por sua vez decresce progressivamente a taxa $\alpha$, após um determinado número de iterações ($ite$) sem melhoria no limitante inferior. Os valores utilizados para os parâmetros são: $\rho = 1$, $\alpha = 0.7$ e $ite = 50$, e são realizados 5000 iterações do método. Para a obtenção do limitante superior ($LS$) desenvolveu-se uma heurística de factibilização baseada na transferência entre períodos e plantas. Embora os resultados obtidos com a atual versão da heurística de factibilização não são de boa qualidade, estes são utilizados no método do subgradiente na obtenção do limitante superior, no entanto não serão apresentados neste trabalho.

Nos testes realizados utiliza-se os mesmos exemplares de Nascimento *et al.* (2010). Um total de 480 exemplares que são divididos em 8 tipos diferentes de classes geradas com valores altos e baixos para os custos de preparação (SA ou SB), para tempos de preparação (TA ou TB) e com capacidades normal e apertada (CN ou CA). Ainda, são geradas 5 exemplares para cada classe e configuração de número de plantas ($M$ = 2, 4 e 6) e ítens ($N$ = 6, 12, 25 e 50) em que são considerados sempre 12 períodos, resultando num total de 60 exemplares para cada classe.

Os parâmetros foram gerados em intervalos $[a; b]$ com distribuição uniforme e denotados por $U[a; b]$. Tem-se custo de produção ($vc_{ijt}$) $\in$ U[1,5;2,5]; custo de preparação ($sc_{ijt}$) $\in$ U[5,0;95,0]; custo de estoque ($hc_{ijt}$) $\in$ U[0,2;0,4]; custo de transferência ($r_{jlt}$) $\in$ U[0,2;0,4]; tempo de produção ($vt_{ijt}$) $\in$ U[1,0;5,0]; tempo de preparação ($st_{ijt}$) $\in$ U[10,0;50,0]; demanda ($d_{ijt}$) $\in$ U[0;180]; estoque inicial ($fc_{ij}$) = 9999;

Para gerar exemplares com custos de preparação alto multiplicam-se os custos gerados por 10. Da mesma forma, para gerar exemplares com tempos de preparação alto multiplicam-se estes por $1,5$.

A capacidade também foi gerada segundo Nascimento *et al.* (2010), ou seja, toma-se como base a capacidade necessária para produzir os itens de acordo com a política lote-por-lote. Posteriormente aplica-se um ajuste para reduzir a capacidade a fim de gerar exemplares com a utilização da capacidade em torno de 80%. A capacidade apertada é obtida multiplicando a capacidade gerada por $0,9$.

A Tabela 1 apresenta os limitantes inferiores obtidos com a relaxação Lagrangiana e aqueles obtidos pelo CPLEX: a relaxação Linear ($RL$), limite inferior após os cortes fornecidos pelo CPLEX ($LIpC$) e limite inferior final após as ramificações ($LIF$), isto é,melhor limitante encontrado pelo CPLEX no tempo limite para a reformulação $MPSP$. Considerando a relaxação linear, a relaxação lagrangiana encontra resultados em média 0.21% melhores comparado ao CPLEX. Já em relação aos limitantes inferiores após os cortes, esta melhoria diminui para 0.20% na média. No entanto ao compará-la ao limite inferior final, não houve melhorias na média geral, mas para as classes com capacidade normal, a relaxação Lagrangiana ainda mostrou-se levemente mais eficiente.

| Classes | Relaxação Lagrangiana | MPSP RL | MPSP LIpC | MPSP LIF |
|---|---|---|---|---|
| CASATA | 258533,43 | 258156,50 | 258215,46 | 258791,52 |
| CASATB | 259632,76 | 259519,99 | 259581,62 | 260178,64 |
| CNSATA | 256373,60 | 255462,19 | 255512,21 | 256004,18 |
| CNSATB | 257010,47 | 256136,26 | 256185,26 | 256699,98 |
| MEDIA GERAL | 257887,57 | 257318,73 | 257373,64 | 257918,58 |

Table 1: Relaxação Lagrangiana e CPLEX.

A Tabela 2 apresenta os resultados detalhados para a classe CASATA, que avaliam a qualidade dos limitantes inferiores obtidos com a relaxação Lagrangiana comparada ao CPLEX. Em geral, observa-se que a maior dificuldade do método proposto, encontra-se nos problemas com 2 plantas. As mais significativas melhorias ocorreram nos problemas com 6 itens, 4 e 6 plantas, em que estas melhorias podem chegar a 4.67% para a relaxação linear e 2.81% para o limitante inferior final quando comparadas a reformulação. Exceto para as configurações com 2 plantas, a relaxação Lagrangiana sempre mostrou-se melhor que todos os limitantes encontrados pelo CPLEX, mesmo após as ramificações, sendo esta melhoria de aproximadamente 0.76%, isto mostra a qualidade dos limitantes encontrados.

| CLASSE CASATA | | Relaxação | MPSP | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Itens | Plantas | Lagrangiana | RL | LIpC | LIF |
| | 2 | 38806,53 | 40576,42 | 40644,93 | 42157,14 |
| 6 | 4 | 71153,73 | 68637,42 | 68789,78 | 69988,47 |
| | 6 | 99989,11 | 95522,50 | 95795,38 | 97381,97 |
| | 2 | 75805,16 | 81043,65 | 81072,49 | 81995,54 |
| 12 | 4 | 136667,27 | 135621,50 | 135652,73 | 136077,64 |
| | 6 | 188486,03 | 185933,06 | 186005,76 | 186536,96 |
| | 2 | 170982,58 | 172099,37 | 172109,67 | 172408,67 |
| 25 | 4 | 279161,29 | 278733,89 | 278751,33 | 278895,12 |
| | 6 | 386118,38 | 385230,39 | 385244,99 | 385406,42 |
| | 2 | 338080,93 | 337999,71 | 338012,24 | 338113,32 |
| 50 | 4 | 551890,25 | 551657,41 | 551671,90 | 551702,73 |
| | 6 | 765259,93 | 764822,70 | 764834,31 | 764834,31 |

Table 2: Relaxação Lagrangiana e CPLEX para a classe CASATA.

## 5 Conclusões

Neste trabalho propôs-se uma reformulação para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas, baseada no problema do caminho mínimo. Propôs-se também, um método de busca de limitantes no qual utiliza-se a relaxação Lagrangiana aplicada às restrições de demanda e, então faz-se o uso da decomposição por período e planta para a obtenção dos limitantes inferiores.

Foram testados um total de 480 exemplares da literatura que foram analisados para os limitantes inferiores obtidos com a relaxação Lagrangiana aplicada a reformulação *MPSP* e estes foram comparados à relaxação linear, limite inferior após os cortes e limite inferior final obtidos pelo pacote CPLEX. Quando comparadas à relaxação linear e limite inferior após os cortes, a relaxação Lagrangiana obteve melhores resultados em todas as classes e para a maioria das configurações de itens e plantas. Já em relação aos limitantes inferiores finais após as ramificações, esta melhoria se restringe aos exemplares com 4 e 6 plantas. Então, pode-se concluir que a relaxação Lagrangiana mostrou-se competitiva para todas as classes, obtendo limitantes inferiores melhores em relação ao CPLEX para a maioria das configurações de itens e plantas.

Como proposta futuras pretende-se fazer novos teste para instâncias mais difíceis de serem resolvidas. Possivelmente a versão atual da heurística de factibilização será melhorada com o objetivo de obter limites superiores de qualidade.

**Agradecimentos**

Esta pesquisa teve o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

# References

[1] Bhatnagar, R., Chandra, P. e Goyal, S. K. (1993), Models for multi-plant coordination, *European Journal of Operational Research*, 67, 141–160.

[2] Eppen, G. D. e Martin, R. K. (1987), Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition, *Operations Research*, 35, 832–848.

[3] Fiorotto, D. J. e Araujo, S. A. (2012), Relaxação lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas: Limitantes inferiores, *TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 13, 13–24.

[4] Fisher, M. L. (1981), An applications oriented guide to lagrangian relaxation. *Interfaces*, 15, 10–21.

[5] Held, M., Wolfe, P. e Crowder, H. P. (1974), Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, 6, 62–88.

[6] Jans, R. (2009), Solving Lot-Sizing Problems on Parallel Identical Machines Using Symmetry-Breaking Constraints, *INFORMS Journal on Computing*, 21, 123–136.

[7] Jans, R. e Degraeve, Z. (2004), Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times, *Operations Research Letters*, 32, 185–195.

[8] Nascimento, M. C., Resende, M. G. e Toledo, F. M. (2010), Grasp heuristic with path-relinking for the multi-plant capacitated lot sizing problem, *European Journal of Operational Research*, 200, 747–754.

[9] Sambasivan, M. e Schmidt, C. P. (2002), A heuristic procedure for solving multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems, *Asia - Pacific Journal of Operational Research*, 19, 87–105.

[10] Sambasivan, M. e Yahya, S. (2005), A lagrangean-based heuristic for multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems with inter-plant transfers, *Computers & Operations Research*, 32, 537–555.

[11] Silva, D. H. e Toledo, F. M. (2012), Dimensionamento de lotes com múltiplas plantas: comparação entre dois modelos, Anais CLAIO/SBPO.

[12] Toledo, F. M. B. e Armentano, V. A. (2006), A Lagrange-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem with parallel machines, *European Journal of Operational Research*, 175, 1070–1083.

[13] Trigeiro, W. W., Thomas, J. e McClain, J. O. (1989), Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, 35, 353–366.

[14] Vanderbeck, F. (1988), Lot-sizing with start-up times, *Management Science*, 44 1409–1425.