

AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA SOB INCERTEZA POR MEIO DA PROGRAMAÇÃO POR METAS, ANÁLISE POR ENVOLTÓRIA DE DADOS E TEORIA FUZZY: APLICAÇÃO EM MINIFÁBRICAS DO SEGMENTO DE AUTOPEÇAS

Aneirson Francisco da Silva - aneirson@gmail.com

Fernando Augusto Silva Marins - fmarins@feg.unesp.br

Marcos Vinícius Brandão Santos- brandao_vbs@hotmail.com

Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá - UNESP

Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333 – 12516-410 – Guaratinguetá - SP

Renata Ferraz Gomes- renataferraz8@hotmail.com

Centro Universitário de Itajubá – FEPI, Itajubá – Rua Doutor Antônio Braga Filho, 687 -

Bairro Varginha - Itajubá - Minas Gerais - CEP 37.501-002 - Tel. (35) 3629.8400

Rafael de Carvalho Miranda- mirandaprod@yahoo.com.br

Instituto de Engenharia de Produção e Gestão - UNIFEI

Av. BPS, 1303, bairro Pinheirinho, Itajubá - MG

Telefone: (35) 3629 - 1101 Fax: (35) 3622 - 3596

RESUMO

O mercado mundial de peças para automóveis é tipicamente caracterizado pela presença marcante de fornecedores globais que são continuamente pressionados a reduzir os custos, a aumentar a produtividade e a competitividade. Neste contexto, este artigo propõe novos modelos, denominados FGPDEA, que combinam a Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) a Teoria Fuzzy e a Programação por Metas (*Goal Programming* - GP) visando aumentar a discriminação entre as Unidades Tomadoras de Decisão (*Decision Making Units* – DMUs) num ambiente sob incerteza. Foi feita uma aplicação real dos modelos FGPDEA para avaliar a eficiência de sete minifábricas do segmento de autopeças. Os resultados obtidos mostraram-se aderentes à realidade estudada, identificando de forma confiável quais minifábricas são eficientes, e quais delas são mais sensíveis ao efeito da incerteza.

Palavras chaves: Eficiência, Programação por Metas, Análise por Envoltória de Dados, Teoria Fuzzy, Segmento de Autopeças.

ABSTRACT

The global market for automotive parts is typically characterized by the strong presence of global suppliers. These are continually pressured to reduce costs, increase productivity and competitiveness. In this context, this paper describes new FGPDEA models that combine Data Envelopment Analysis (DEA) and Fuzzy Goal Programming thereby aiming to increase the discrimination among Decision Making Units (DMUs) in an environment under uncertainty. It was made a real application of these FGPDEA models to evaluate the efficiency of seven mini-factories (DMUs) of auto parts segment. The results obtained in this real problem were adherent to reality studied and allowed identify efficient mini-factories, and which ones were more sensitive to the effect of uncertainty.

KEYWORDS: *Efficiency, Goal Programming, Data Envelopment Analysis, Fuzzy Theory, Auto Parts Segment.*

1. Introdução

O segmento de autopeças vem enfrentando grandes desafios, pois as montadoras devem buscar continuamente atender padrões cada vez mais altos de qualidade mantendo preços competitivos. Segundo Cook & Seiford (2009) procedimentos para medir eficiência é um assunto de interesse para as organizações produtivas. Neste cenário, as técnicas de Pesquisa Operacional (PO), como a Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) proposta por Charnes *et al.* (1978), podem auxiliar na avaliação da eficiência das iniciativas das empresas no sentido de se destacarem no mercado.

A DEA permite, entre outras funcionalidades, comparar em termos da sua eficiência entidades similares, denominadas Unidades Tomadoras de Decisão (*Decision Making Units* - DMUs), que têm os mesmos recursos (*inputs* ou entradas) e oferecem produtos (*outputs* ou saídas) similares. Com modelos da DEA a avaliação da eficiência das DMUs é realizada por meio da identificação de uma fronteira de eficiência (com relações saída/entrada = 100%) onde se localizarão as DMUs consideradas eficientes. Assim, numa empresa industrial ou de serviços, a DEA permite que sejam evidenciadas quais são as operações ineficientes e proporciona subsídios aos gestores na difícil atividade de tomada de decisão vinculada à redução dos recursos produtivos e aumentos dos níveis de produção (KAO & LIN, 2012).

Corroborando com estas afirmações, para Kao & Liu (2000) medir a eficiência das DMUs em ambientes industriais e de serviços é uma tarefa árdua, pois usualmente estão envolvidas variáveis econômicas complexas, como taxas de juros, tributação, nível de emprego, demanda, dentre outras. Já Wen *et al.* (2011) comentam que nos modelos clássicos de DEA assume-se que as entradas e saídas são estimadas de forma exata, ou seja, o analista considera que não há erros (incerteza) nestes valores. De acordo com Hatami-Marbini *et al.* (2011) podem ser imprecisas as estimações dos valores de entradas e saídas em problemas reais gerando valores de eficiência com baixa confiabilidade.

Neste contexto, Wen *et al.* (2011) e Wen e You (2007) também comentam que as DMUs podem ser classificadas em duas classes, eficientes e ineficientes, e que a incorporação da incerteza como um erro de medição deveria ser inserida nas entradas e saídas de modo a tornar os cálculos das eficiências das DMUs mais confiáveis do ponto de vista prático. Conforme Cooper *et al.* (2006) as variáveis de entrada e de saída para cada DMU devem atender alguns critérios como:

- As variáveis e DMUs devem ser escolhidas de modo a representar o interesse dos gestores;
- Há dados numéricos positivos para as variáveis de entrada e de saída, sendo que se deve preferir um uso menor do número de variáveis de entradas comparado ao das variáveis de saídas;
- Recomenda-se aplicar os modelos clássicos CCR e BCC quando o número de DMUs é igual ou maior a três vezes a soma do número de variáveis de Entrada e de Saída.

Quando o terceiro critério não é satisfeito os modelos clássicos de DEA - CCR (Retorno Constante de Escala) de Charnes *et al.* (1978) e DEA – BCC (Retorno Variável de Escala) de Banker *et al.* (1984) não proporcionam uma boa discriminação das DMUs quanto à eficiência.

Em estudos recentes têm-se estudado a combinação da lógica *Fuzzy* com os modelos DEA, para tentar tratar o efeito da incerteza nas entradas e saídas e tornando o cálculo das eficiências mais confiável. Nesta linha, pode-se citar: Kao & Lin (2012), Hatami-Marbini *et al.* (2011), Wen *et al.* (2011), Wen & You (2007), Lertworasirikul *et al.* (2002), Entani *et al.* (2002), Cooper *et al.* (2001), Guo & Tanaka (2001), Kao & Liu (2000) e Cooper *et al.* (1999). Numa linha de pesquisa recente, Bal *et al.* (2010) propuseram modelos conhecidos como GPDEA que agregam os conceitos da Programação por Metas (*Goal Programming* – GP), proposta por Charnes & Cooper (1962), nos modelos DEA para melhorar a sua capacidade de discriminação das DMUs. Porém, cabe mencionar que os modelos GPDEA não consideram a ocorrência da incerteza na análise da eficiência. Para mais detalhes sobre aplicações de modelos de Programação Por Metas recomenda-se a leitura do trabalho de Silva *et al.* (2013).

Este trabalho teve como objetivo geral propor extensões dos modelos GPDEA que possam tratar a ocorrência de incerteza que usualmente está presente em aplicações reais e, para tanto, foram incorporados nos modelos GPDEA alguns elementos da Teoria *Fuzzy* (ZADEH, 1973 e ZADEH, 1978). Estes modelos são aqui denominados modelos FGPDEA-CCR e FGPDEA-BCC e, como objetivo específico neste trabalho, foram aplicados para avaliar a eficiência de sete minifábricas de uma empresa do segmento de autopeças num cenário sob incerteza, o que permitiu a validação dos

modelos propostos. Este artigo está estruturado como se segue. Na seção 2 estão conceitos e modelos da Programação por Metas, da DEA e da Teoria Fuzzy que foram úteis no desenvolvimento dos modelos aqui propostos. Na seção 3 está a descrição do problema e do método de pesquisa adotado. Na seção seguinte estão os modelos FGPDEA-CCR e FGPDEA-BCC propostos, aplicados na determinação da eficiência de minifábricas do setor de autopeças, assim como os resultados obtidos e suas análises. Finalmente, na seção 5 estão as considerações finais do trabalho seguidas das referências bibliográficas.

2. Modelos GPDEA e modelos Fuzzy DEA

Nesta seção são apresentados os modelos da DEA, da GP e da Teoria Fuzzy que foram úteis para a formulação dos modelos FGPDEA-CCR e FGPDEA-BCC que são o foco deste trabalho.

A DEA permite, entre outros aspectos relevantes, a identificação das DMUs que sejam referência (*benchmarking*) para as demais analisadas. A sua origem se deve a Charnes *et al.* (1978) que desenvolveram um modelo a fim de se obter uma nova medida de eficiência para avaliar programas públicos. Os pesos para variável de entrada e saída do modelo geral da DEA podem ser obtidos a partir da solução do modelo proposto por Charnes *et al.* (1978) dado por (1) – (4):

$$E_j = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{ij}} \quad (1)$$

S.a:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (3)$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

sendo a DMU_0 a DMU sob avaliação; w_o é a eficiência relativa da DMU_0 ; y_{r0} e x_{i0} são os dados de saídas e entradas para a DMU_0 ; d_o é a variável de desvio para a DMU_0 ; j o índice da DMU, $j=1, \dots, n$; r é o índice da saída, com $r = 1, \dots, s$; i é o índice da entrada, $i = 1, \dots, m$; y_{rj} é o valor da r -ésima saída para a j -ésima DMU; x_{ij} é o valor da i -ésima entrada para a j -ésima DMU; u_r é o peso associado à r -ésima saída; e v_i é o peso associado à i -ésima entrada.

Observe-se que: se $E_j = 1$, a DMU_0 é eficiente quando comparada às demais unidades consideradas no modelo e se $E_j < 1$, a DMU_0 é ineficiente. A abordagem da GP original considera que os gestores devem associar metas (valores alvos ou *goals*) aos objetivos $f_i(x)$ e decidir qual é a penalização mais adequada para as variáveis de desvio associadas à obtenção de valores acima (d_i^+) ou abaixo (d_i^-) do valor alvo estabelecido. Uma aplicação interessante da GP foi idealizada por Bal *et al.* (2010), criando a GPDEA, no sentido de melhorar o desempenho de modelos DEA na tarefa de melhor discriminar as DMUs eficientes. Os modelos GPDEA evitam a ponderação excessiva que ocorre quando se aplicam os modelos clássicos da DEA em cenários onde estes têm baixo poder de discriminação das DMUs. O modelo GPDEA de Bal *et al.* (2010) é derivado de um modelo DEA multiobjetivo proposto por Li e Reeves (1999) e descrito pelas expressões (5) – (11):

$$\min d_o \left(\text{ou } \max \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} \right) \quad (5)$$

$$\min M$$

$$\min \sum_{j=1}^n d_j$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$M - d_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (9)$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

$$d_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

sendo d_j é a variável de desvio para a DMU_j ; $M = \max \{d_j\}$ é o valor máximo de variação das variáveis de desvio. Os demais parâmetros e variáveis já foram definidos anteriormente.

Bal *et al.* (2010) associaram metas às três funções objetivos do modelo (5) – (11) e desenvolveram os modelos GPDEA-CCR (Retorno Constante de Escala) e GPDEA-BCC (Retorno Variável de Escala) que estão expressos, respectivamente, por (12) – (20) e (21) – (29):

$$\min \left(d_1^- + d_1^+ + d_2^+ + \sum_j d_{3j}^- + \sum_j d_j \right) \quad (12)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + d_1^- - d_1^+ = 1 \quad (13)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + d_2^- - d_2^+ = 1 \quad (14)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (17)$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

$$d_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

$$d_i \geq 0, \quad d_{3j}^-, d_{3j}^+ \geq 0. \quad (20)$$

GPDEA-BCC

$$\min \left(d_1^- + d_1^+ + d_2^+ + \sum_j d_{3j}^- + \sum_j d_j \right) \quad (21)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + d_1^- - d_1^+ = 1 \quad (22)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + c_0 + d_2^- - d_2^+ = 1 \quad (23)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + c_0 + d_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (26)$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (27)$$

$$d_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

$$d_i \geq 0, \quad d_{3j}^-, d_{3j}^+ \geq 0. \quad (29)$$

sendo d_1^- , d_1^+ as variáveis de desvio indesejáveis para a meta que restringe a soma ponderada das entradas ao valor de 1 (100%); d_2^+ a variável de desvio indesejável para a meta que restringe a soma ponderada das saídas a ser menor ou igual a 1 (100%); d_2^- a variável de desvio desejável para a meta que restringe a soma ponderada das saídas a ser menor ou igual a 1 (100%); d_{3j}^- a variável de desvio indesejável, da DMU j , para a meta que tem M como o desvio máximo; d_{3j}^+ as variáveis de desvio desejável, da DMU j , para a meta que tem M como o desvio máximo; d_j a variável de desvio indesejável, da DMU j , com relação ao desvio máximo M ; M é o desvio máximo, e c_0 é variável irrestrita de sinal que determina o retorno variável de escala.

A Teoria *Fuzzy* vem sendo usada como técnica para modelar a incerteza nos modelos DEA, tendo como base os modelos da Programação Linear *Fuzzy*. Nesta linha, conhecida como DEA *Fuzzy*, Lertworasirikul *et al.* (2003) estabeleceram o modelo DEA-CCR com coeficientes *fuzzy* (modelo FCCR) que pode ser expresso por (30) - (34):

$$\tilde{E}_j = \text{Max} \quad \sum_{r \in R} u_r \tilde{y}_{r0} \quad (30)$$

s.a

$$\sum_{i \in I} \tilde{x}_{i0} v_i = 1 \quad (31)$$

$$\sum_{r \in R} u_r \tilde{Y}_{rj} - \sum_{i \in I} v_i \tilde{X}_{ij} \leq 0, \quad \forall j \in J \quad (32)$$

$$u_r \geq 0, \quad \forall r \in R \quad (33)$$

$$v_i \geq 0, \quad \forall i \in I \quad (34)$$

sendo DMU_0 a DMU que está sob análise, \tilde{x}_{i0} são as variáveis *fuzzy* do *i*-ésima entrada da DMU_0 ; \tilde{y}_{r0} são as variáveis *fuzzy* da *r*-ésima saída da DMU_0 , \tilde{X}_{ij} é a matriz das variáveis *fuzzy* da *i*-ésima entrada da *j*-ésima DMU; \tilde{Y}_{rj} é a matriz das variáveis *fuzzy* da *r*-ésima saída da *j*-ésima DMU.

Para se obter a formulação do Modelo BCC basta inserir de forma aditiva a variável auxiliar c_o (irrestrita) na função objetivo (30) e na restrição (31). Ainda segundo Lertworasirikul *et al.*(2003), diferentemente do que ocorre nos modelos DEA tradicionais, o valor da função objetivo (30) poderá ter um valor acima de 1, devido às restrições *Fuzzy* (GARCIA *et al.*, 2009). Hatami-Marbini *et al.*(2011) elencaram as principais abordagens para tratar os modelos *Fuzzy* DEA: Abordagem pela tolerância (*The tolerance approach*); Abordagem baseada em nível- α (*The α -level based approach*); Abordagem pelo ranking *fuzzy* (*The fuzzy ranking approach*) e a Abordagem pela possibilidade (*The possibility approach*).

Neste artigo foi adotada a abordagem baseada no nível- α que, conforme Hatami-Marbini *et al.* (2011), é o modelo mais popular de *Fuzzy* DEA com muitas publicações associadas (KAO & LIU, 2000). O valor de $\alpha \in [0, 1]$ permite a geração de cenários, ou seja, diferentes valores de eficiência respeitando-se a faixa de variação determinada pela função de pertinência. Nestes modelos, têm-se \tilde{X}_{ij} e \tilde{Y}_{rj} - que são, respectivamente, os parâmetros *fuzzy* da *i*-ésima entrada e *r*-ésima saída da *j*-ésima DMU, eles são aproximadamente conhecidos e podem ser representados por conjuntos *Fuzzy*, por meio de funções de pertinência $\mu_{\tilde{X}_{ij}}$ e $\mu_{\tilde{Y}_{rj}}$. Desta forma, os modelos *Fuzzy* DEA podem ser formulados utilizando $S(\tilde{X}_{ij})$ e $S(\tilde{Y}_{rj})$ - que são os valores destes parâmetros para um determinado cenário S . Com os α -cortes (nível- α) que geram um conjunto de cenários para \tilde{Y}_{rj} e \tilde{X}_{ij} , têm-se, conforme definido em Kao e Liu (2000):

$$(X_{ij})\alpha = \left\{ x_{ij} \in S(\tilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha \right\}, \quad \forall i, j, \quad (35)$$

$$(Y_{rj})\alpha = \left\{ y_{rj} \in S(\tilde{Y}_{rj}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha \right\}, \quad \forall r, j, \quad (36)$$

A DEA *Fuzzy* pode ser transformada em uma família de modelos DEA com diferentes níveis de incerteza: $\{(X_{ij})\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ e $\{(Y_{rj})\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Estes resultados de cada cenário apresentam a faixa de variação da incerteza nos dados de saídas e entradas do modelo DEA (KAO & LIU, 2000; KAUFMANN, 1975; YAGER, 1986, ZADEH, 1973 e ZADEH, 1978), sendo o nível- α definido pelas equações (37) e (38), conforme Kao e Liu (2000):

$$(X_{ij})\alpha = \left[\left\{ \min_{x_{ij}} x_{ij} \in S(\tilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha \right\}, \max_{x_{ij}} \left\{ x_{ij} \in S(\tilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha \right\} \right], \quad (37)$$

$$(Y_{rj})\alpha = \left[\left\{ \min_{y_{rj}} y_{rj} \in S(\tilde{Y}_{rj}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha \right\}, \max_{y_{rj}} \left\{ y_{rj} \in S(\tilde{Y}_{rj}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha \right\} \right], \quad (38)$$

Kao & Liu (2000), baseando-se em Zadeh (1973), Zadeh (1974) e Zimmermann (1991), estabeleceram que a função de pertinência que define a eficiência da DMU j pode ser expressa por:

$$\mu_{\tilde{E}_j}(z) = \sup_{x,y} \min = \left\{ \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}), \forall i, r, j \mid z = E_j(x, y) \right\}, \quad (39)$$

sendo $E_j(x,y)$ obtido por (1)-(4). A abordagem para construção da função de pertinência $\mu_{\tilde{E}_j}$ proposta neste trabalho adotou o nível- α de $\mu_{\tilde{E}_j}$, sendo o valor da eficiência em de cada cenário \tilde{E}_j obtido por (30)-(34). Para detalhes recomenda-se a leitura do trabalho de Kao & Liu (2000), Hatami-Marbini *et al.* (2011) e Kao & Lin (2012).

3. Descrição do problema e do método de pesquisa

A empresa objeto desta aplicação real é uma fornecedora de autopeças que passou por consecutivas experiências de fusões e aquisições e possui hoje 176 fábricas localizadas em diversos países, sendo oito delas recentemente adquiridas. Este trabalho visou avaliar a eficiência de sete minifábricas de uma Unidade Fabril desta empresa localizada na América Latina, considerando a ocorrência de incerteza nos dados. Para tal avaliação foram desenvolvidos os modelos FGPDEA que estão descritos na seção 4. As etapas da pesquisa estão indicadas na Figura 1 e descritas a seguir.

Etapa (a) – Identificação do problema – De comum acordo com os gestores da empresa de autopeças, o problema foi delimitado como sendo o de identificar a eficiência de sete minifábricas do segmento de autopeças de Unidade Fabril específica.

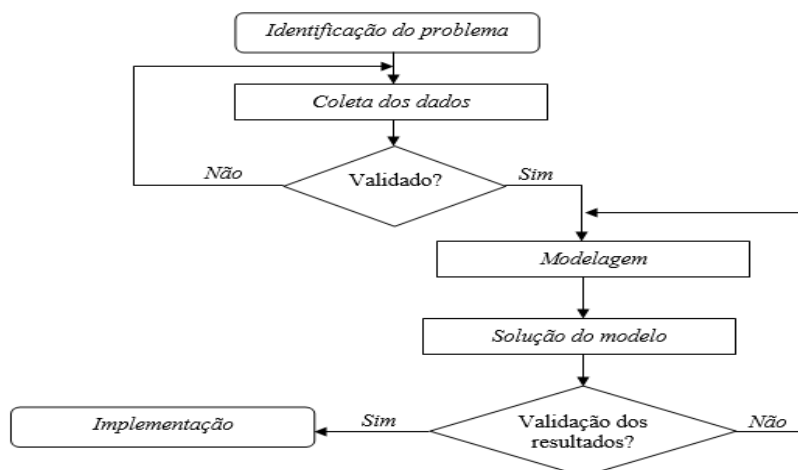


Figura 1. Fases da pesquisa.

Etapa (b) – Coleta de dados – Os dados foram adquiridos no sistema de informações utilizado pela empresa por meio de relatórios gerados nas áreas de contabilidade (faturamento), qualidade e de recursos humanos. O período utilizado para a pesquisa foi entre dezembro de 2011 e dezembro de 2012. As Tabelas 1 e 2 apresentam os dados de entradas e saídas, sendo:

- **DMUs:** MF₁ - minifábrica 1, MF₂ - minifábrica 2, MF₃ - minifábrica 3, MF₄ - minifábrica 4, MF₅ - minifábrica 5, MF₆ - minifábrica 6, MF₇ - minifábrica 7.
- **Saídas:** Y₁ - Produção total de cada minifábrica e Y₂ – *DeliveryPerformance* que se refere a quantidade de produtos efetivamente entregue ao cliente.
- **Entradas:** X₁ - Custo dos produtos; X₂ - Rotatividade da mão de obra em cada minifábrica da empresa, obtida pela razão entre o número de colaboradores que foram desligados pela quantidade de total destes; X₃ – Número de afastamentos por doenças ocupacionais e acidentes de trabalho; X₄ - Reclamações de clientes (tal variável foi incluída como uma entrada, pois afeta a produção); X₅ - Refugo de WIP - *Work-in-Process* em [%].

Neste caso para aplicar os modelos clássicos de DEA (CCR e BCC) seriam necessárias pelo menos 21 DMUs para o atendimento da condição de Cooper *et al.* (2006) relativa ao poder de discriminação das DMUs. Como a condição não foi satisfeita optou-se por desenvolver modelos da GPDEA para tratar este problema. Adicionalmente optou-se pela utilização de funções de pertinência triangular as variáveis de entrada e de saída do modelo DEA, pois, conforme Liang & Wang (1993), elas representam bem a *expertise* humana em julgar adequadamente o comportamento de variáveis comuns em diversos tipos de situações práticas. Corroborando com estes autores, Aouni, Martel e

Hassaine (2009) mostraram diversas aplicações de números triangulares *Fuzzy* que validam e justificam a adoção de tal método em conjunto com os modelos de GP.

Neste sentido, os gestores foram consultados sobre as características das variáveis envolvidas e sugeriram as características descritas abaixo para cada uma delas: para Y_1 e Y_2 sugeriram variações de 100; para X_1 sugeriram variações de 0,1; para X_2 a adoção de desvios de 0,4; para X_3 sugeriram variações de 100; para X_4 sugeriram variações de 1 e para X_5 sugeriram variações de 1%. As sugestões dos gestores geraram as funções de pertinência triangulares para as variáveis de saída e entrada *Fuzzy* conforme Tabelas 1 e 2.

Tabela 1- Funções de pertinência triangulares de saídas *fuzzy* das sete minifábricas.

DMU	Y_1	Y_2
MF-1	(2.410, 2.510, 2.610)	(2.394, 2.494, 2.594)
MF-2	(431, 531, 631)	(407, 507, 607)
MF-3	(492, 592, 692)	(425, 525, 625)
MF-4	(64, 164, 264)	(59, 159, 259)
MF-5	(24, 124, 224)	(24, 124, 224)
MF-6	(1.185, 1.285, 1.385)	(1.185, 1.285, 1.385)
MF-7	(388, 488, 588)	(384, 484, 584)

Etapa (c) – Modelagem - Utilizou-se o software GAMS®(GAMS, 2013)na versão 23.6.5 e o *solver* CPLEX® na versão 12.2.1. A otimização foi feita por um computador com 8GB de RAM processador (Core i7) com 1,2 GHZ, plataforma *Windows* 64 bits. O tempo computacional para otimizar 44 cenários foi de aproximadamente 45 minutos.

Etapa (d) – Solução do modelo – Os resultados estão na seção seguinte.

Etapa (e) – Validação - foi feita com o apoio dos gestores das minifábricas.

Etapa (f) – Implementação - foge no escopo deste trabalho, mas os gestores estão propensos a aplicar os modelos GPDEA em outras situações de seu interesse na empresa.

Segundo Bertrand e Fransoo (2002), esta pesquisa pode ser definida como sendo uma pesquisa aplicada, pois visa proporcionar melhorias para a literatura existente, tendo objetivo empírico descritivo, pois o modelo desenvolvido descreve de forma adequada relações causais que podem existir na realidade, favorecendo a compreensão de processos reais. A forma de abordar o problema é quantitativa, sendo o método de pesquisa a modelagem. Na seção seguinte estão descritos com detalhes os modelos GPDEA desenvolvidos e aplicados para determinar as eficiências das minifábricas da empresa que foi objeto do estudo.

Tabela 2- Funções de pertinência triangulares de entradas *fuzzy* para as sete minifábricas.

DMU	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
MF-1	(0,06, 0,16, 0,26)	(0,02, 0,42, 0,82)	0	(1, 2, 3)	(3,83, 4,83, 5,83)
MF-2	(0,59, 0,69, 0,79)	(0,52, 0,92, 1,32)	(11, 111, 211)	(1, 2, 3)	(10,3, 11,3, 12,3)
MF-3	(0,41, 0,51, 0,61)	(0,14, 0,54, 0,94)	(298, 398, 498)	(3, 4, 5)	(0,23, 1,23, 2,23)
MF-4	(2,21, 2,31, 2,41)	(0,16, 0,56, 0,96)	(94, 194, 294)	(1, 2, 3)	(14,57, 15,47, 16,57)
MF-5	(3,4, 3,50, 3,6)	(0,25, 0,65, 1,05)	(1,337, 1,437, 1,537)	(2, 3, 4)	(5,09, 6,09, 7,09)
MF-6	(0,17, 0,27, 0,37)	(0,1, 0,5, 0,9)	(281, 381, 481)	(1, 2, 3)	(3,55, 4,55, 5,55)
MF-7	(0,39, 0,49, 0,59)	(0,41, 0,81, 1,21)	(206, 306, 406)	(1, 2, 3)	(8,35, 9,35, 10,35)

4. Modelos Fuzzy GPDEA-CCR e Fuzzy GPDEA-BCC

Com base nos modelos desenvolvidos por Bal *et al.* (2010), conforme (12) - (20) e (21) - (29), foram desenvolvidos os modelos *Fuzzy* GPDEA-CCR e *Fuzzy* GPDEA-BCC para aplicação em um problema real de identificação da eficiência de sete minifábricas (DMUs) de uma empresa do segmento de autopeças. Assim, na sequência estão os índices, parâmetros, variáveis auxiliares e de decisão, funções objetivo e restrições dos modelos propostos, considerando-se a DMU_0 como sendo a DMU que está sob análise:

Índices

j é o índice das DMUs, $j \in J$, $J = \{1, 2, \dots, 7\}$;
 r é o índice das saídas, com $r \in R$, $R = \{1, 2\}$;
 i é o índice das entradas, $i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, 5\}$.

Parâmetros

\tilde{Y}_{r0} e \tilde{X}_{i0} são, respectivamente, os valores dos limitantes inferiores nos intervalos de definição da função de pertinência triangular para a r -ésima saída fuzzy e a i -ésima entrada fuzzy para a DMU₀, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{Y}_{r0} e \tilde{X}_{i0} são, respectivamente, os valores dos limitantes superiores nos intervalos de definição da função de pertinência triangular para a r -ésima saída fuzzy e a i -ésima entrada fuzzy para a DMU₀, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{Y}_{rj} é o valor do limitante inferior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da r -ésima saída fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{Y}_{rj} é o valor do limitante superior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da r -ésima saída fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{X}_{ij} é o valor do limitante inferior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da i -ésima entrada fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{X}_{ij} é o valor do limitante superior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da i -ésima entrada fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

α é valor escolhido para a abordagem nível- α , com $\alpha \in [0, 1]$.

ψ_{i0} é o coeficiente de α nas restrições vinculado à i -ésima entrada fuzzy da DMU₀.

ρ_{j0} é coeficiente de α nas restrições vinculado à j -ésima saída fuzzy da DMU₀.

P_{rj} é o coeficiente de α nas restrições vinculado à r -ésima saída fuzzy da DMU j .

ψ_{ij} é o coeficiente de α nas restrições vinculado à i -ésima entrada fuzzy da DMU j .

Variáveis auxiliares

As variáveis auxiliares $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_{3j}^-, d_j$ são os desvios associados às metas atribuídas a cada objetivo, conforme explicado na seção 2.

Variáveis de Decisão

u_r é o peso associado à r -ésima saída.

v_i é o peso associado à i -ésima entrada.

Modelo FUZZY GPDEA-CCR L
 α - Para análise da eficiência das DMUs num cenário pessimista

$$\min \left(d_1^- + d_1^+ + d_2^- + \sum_j d_{3j}^- + \sum_j d_j \right) \quad (36)$$

s.a:

$$\sum_{i \in I} v_i (\tilde{x}_{i0} + \psi_{i0} \cdot \alpha) + d_1^- - d_1^+ = 1 \quad (37)$$

$$\sum_{r \in R} u_r (\tilde{Y}_{r0} - \rho_{r0} \cdot \alpha) + d_2^- - d_2^+ = 1 \quad (38)$$

$$\sum_{r \in R} u_r (\tilde{Y}_{rj} - \rho_{rj} \cdot \alpha) - \sum_{i \in I} v_i (\tilde{x}_{ij} + \psi_{ij} \cdot \alpha) + d_j = 0, \quad \forall j \in J \quad (39)$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0, \forall j \in J \quad (40)$$

$$u_r \geq 0, \forall r \in R \quad (41)$$

$$v_i \geq 0, \forall i \in I \quad (42)$$

$$d_j \geq 0, \forall j \in J \quad (43)$$

$$d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0, d_{3j}^-, d_{3j}^+ \geq 0, \quad (44)$$

FUZZY GPDEA-CCR α^U Para análise da eficiência das DMUs num cenário otimista

$$\min \left(d_1^- + d_1^+ + d_2^- + \sum_j d_{3j}^- + \sum_j d_j \right) \quad (45)$$

s.a:

$$\sum_{i \in I} v_i (\tilde{X}_{io} - \psi_{io} \cdot \alpha) + d_1^- - d_1^+ = 1 \quad (46)$$

$$\sum_{r \in R} u_r (\tilde{y}_{r0} + \rho_{r0} \cdot \alpha) + d_2^- - d_2^+ = 1 \quad (47)$$

$$\sum_{r \in R} u_r (\tilde{y}_{rj} + \rho_{rj} \cdot \alpha) - \sum_{i \in I} v_i (\tilde{X}_{ij} - \psi_{ij} \cdot \alpha) + d_j = 0, \forall j \in J \quad (48)$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0, \forall j \in J \quad (49)$$

$$u_r \geq 0, \forall r \in R \quad (50)$$

$$v_i \geq 0, \forall i \in I \quad (51)$$

$$d_j \geq 0, \forall j \in J \quad (52)$$

$$d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0, d_{3j}^-, d_{3j}^+ \geq 0, \quad (53)$$

Para se obter os modelos FUZZY GPDEA-BCC α^L e FUZZY GPDEA-BCC α^U , basta incluir a variável auxiliar irrestrita c_o de forma aditiva nas equações (38) e (39) e (47) e (48), respectivamente. Observe-se, ainda, que quando $\alpha = 1$ têm-se a formulação dos modelos GPDEA-CCR e GPDEA-BCC desenvolvidos por Bal *et al.*(2010) que são aplicáveis em situações sem incerteza. Estes modelos FGPDEA foram aplicados ao problema de encontrar as eficiências das minifábricas com os dados das Tabelas 1 e 2. A Tabela 3 mostra os resultados (que foram agregados em função da limitação de espaço no artigo) obtidos com a aplicação dos modelos FGPDEA-CCR. Cabe mencionar que, quando o valor de $\alpha = 0$, tem-se um cenário no qual o valor dos parâmetros que estão abaixo da média (dados sem incerteza) serão exatamente o valor do limite inferior da função de pertinência, e o valor dos parâmetros que estão acima da média (dados sem incerteza) serão exatamente os valores do limite superior da função de pertinência. Entretanto, quando $\alpha = 1$, tem-se um cenário sem incerteza, isto é, um cenário no qual os valores dos parâmetros de saída e entrada são formados pelos dados médios da função de pertinência, sendo estes, os valores mais prováveis ou sem incerteza.

Tabela 3 - Cenário global da Eficiência (%) em função da variação do nível- α nos Modelos FGPDEA-CCR

α	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4	DMU 5	DMU 6	DMU 7
0	100,00	20,46	9,92	5,15	1,80	51,24	19,04
0,1	100,00	20,52	10,18	5,43	2,13	51,26	19,11
0,2	100,00	20,57	10,41	5,67	2,40	51,28	19,18
0,3	100,00	20,62	10,60	5,87	2,63	51,30	19,24
0,4	100,00	20,66	10,76	6,03	2,82	51,31	19,29
0,5	100,00	20,69	10,89	6,17	2,97	51,33	19,33
0,6	100,00	20,71	10,99	6,28	3,09	51,34	19,37
0,7	100,00	20,73	11,07	6,36	3,19	51,35	19,39
0,8	100,00	20,74	11,12	6,42	3,25	51,35	19,41
0,9	100,00	20,74	11,14	6,45	3,29	51,36	19,42
1	100,00	20,33	10,53	6,38	3,31	51,52	19,41
Média	100,00	20,62	10,69	6,02	2,81	51,33	19,29
Máximo	100,00	20,74	11,14	6,45	3,31	51,52	19,42
Mínimo	100,00	20,33	9,92	5,15	1,80	51,24	19,04
Amplitude	0,00	0,41	1,22	1,30	1,52	0,29	0,38

Percebe-se pela análise da Tabela 3 que apenas a DMU 1 foi eficiente em todas as otimizações. A DMU 5 obteve a pior eficiência média com apenas 3,31% e a maior amplitude de variação com 1,52%, sendo assim a DMU mais sensível a incerteza. Já a DMU 6 foi a menos sensível a incerteza, apresentando uma amplitude de variação de apenas 0,29%. Também se observa que na aplicação dos modelos FGPDEA-CCR apenas a DMU 1 foi eficiente, tendo as demais DMUs apresentado um alto nível de ineficiência. Neste contexto, apenas a DMU 6 obteve uma eficiência média superior a 50%, atingindo o valor 51,33%. Pelo fato de se analisar diferentes minifábricas que utilizam diferentes tecnologias de fabricação, foram aplicados também os modelos FGPDEA-BCC (com Retorno Variável de Escala) e os resultados estão na Tabela 4.

Tabela 4 - Cenário global da Eficiência (%) em função da variação do nível- α nos Modelos FGPDEA-BCC

α	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4	DMU 5	DMU 6	DMU 7
0	100,00	35,99	16,49	10,64	0,08	65,62	34,84
0,1	100,00	35,99	16,89	10,6	0,02	65,62	34,84
0,2	100,00	35,99	17,24	10,64	0,02	65,62	34,84
0,3	100,00	35,99	17,54	10,64	0,07	65,62	34,84
0,4	100,00	35,99	17,78	10,64	0,02	65,62	34,84
0,5	100,00	84,07	41,09	81,26	53,01	90,33	83,89
0,6	100,00	88,62	43,69	86,52	56,88	93,19	88,48
0,7	100,00	88,62	43,99	86,52	57,17	93,19	88,48
0,8	100,00	88,62	44,20	86,52	57,38	93,19	88,48
0,9	100,00	88,62	44,32	86,52	57,50	93,19	88,48
1	100,00	88,62	44,36	86,52	57,54	93,19	88,48
Média	100,00	64,28	31,60	51,55	30,88	80,40	63,68
Máximo	100,00	88,62	44,36	86,52	57,54	93,19	88,48
Mínimo	100,00	35,99	16,49	10,64	0,02	65,62	34,84
Amplitude	0,00	52,64	27,88	75,88	57,52	27,57	53,65

Consultando-se a Tabela 4, constata-se que os modelos FGPDEA-BCC também indicaram apenas a DMU 1 como sendo eficiente em todas as otimizações variando o nível- α . A DMU 5 também apresentou a pior taxa de eficiência média com um valor de 30,88%, associada a segunda maior

amplitude de variação, com um valor de 57,52%. Já a DMU 4 apresentou a maior sensibilidade à incerteza, com um valor de amplitude de 75,88% e uma eficiência média de 51,55%. Adicionalmente, a aplicação dos modelos FGPDEA-BCC permitiu a observação de que, para os valores de nível- α com $\alpha \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$ houve uma redução no níveis de ineficiências das DMUs 2, 4, 6 e 7, ou seja, elas ficaram mais próximas de serem eficientes. Destaque-se a DMU 6 que apresentou o menor nível de ineficiência com um valor de 65,62% e a maior eficiência média com um valor de 80,40%. As DMUs 3 e 5 apresentaram um cenário muito crítico de ineficiência, com valores médios de eficiência abaixo de 50% sendo, respectivamente, 31,6% e 30,88%.

Tais informações podem servir de alerta para os gestores destas minifábricas, ou seja, eles devem investigar a razão de tal cenário ser tão crítico, identificar os pontos falhos e reforçar os pontos fortes, tendo como objetivo a busca pela eficiência plena. De fato, os modelos FGPDEA-CCR e FGPDEA-BCC apontaram aos gestores os pontos críticos da atual administração das 7 minifábricas e forneceram, também, a identificação das possibilidades de melhorias nas minifábricas ineficientes. Isto poderia ser operacionalizado, por exemplo, com a organização de reuniões que promovam a troca de experiência entre os gestores a partir dos resultados apontados pelos modelos.

4. Conclusões e recomendações para futuras pesquisas

Muitos estudos com modelos DEA tratam casos determinísticos, ou seja, todas as variáveis de entrada e de saída podem ser medidas com precisão e com boa acuracidade, mas os problemas reais são naturalmente incertos ou imprecisos, ou seja, nem sempre se tem a qualidade desejada nas informações disponíveis. A contribuição deste trabalho foi a proposição dos modelos FGPDEA-CCR e FGPDEA-BCC, visando avaliar a eficiência num cenário sob incerteza no qual a condição sugerida por Cooper *et al.* (2006) não é atendida. A nova estrutura algébrica mostrou-se aderente e de fácil implementação computacional e, desta maneira, aumentando a potencialidade de aplicações dos modelos GPDEA. Foi consenso entre os gestores consultados, pertencentes à empresa objeto do estudo, que os modelos FGPDEA permitem uma maior interação entre os gestores e os analistas fazendo com que o desenvolvimento, a otimização e a análise dos resultados dos modelos sejam mais bem aceitos pelo corpo gerencial da empresa, facilitando sua implementação. Destaque-se que, apesar da etapa de implementação fugir do escopo deste trabalho, os gestores já decidiram desenvolver políticas para minimizar as incertezas nas DMUs e desenvolver estratégias visando a melhor alocação dos recursos e aumento da produtividade das minifábricas, tendo como base os resultados dos modelos FGPDEA da seção 4 e como *benchmark* a DMU 1. Como recomendações para futuras pesquisas pretende-se combinar a Teoria dos Jogos da Barganha de NASH (SANTOS *et al.*, 2011) nos modelos GPDEA visando inserir estratégias de negociação entre os clientes e produtores.

Agradecimentos: Ao CNPq, Capes, Fapesp e Fundunesp pelo apoio.

Referências

- Aouni, B.; Martel, J.-M. e Hassaine, A.** Fuzzy Goal Programming Model: An Overview of the Current State-of-the Art. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, v.16, n.5-6, p.149-161, 2009.
- Bal, H; Örkücü, H. H. e Çelebioğlu, S.** Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 37, n.1, p.99-107, 2010.
- Banker, R. D.; Charnes, A. e Cooper, W. W.** Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, v. 30, n.9, p.1078-1092, 1984.
- Bertrand, J. W. M., e Fransoo, J. C.,** Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations and Production Management*, v.22, p.241-264, 2002.
- Cook W. D. e Seiford L. M.** Data Envelopment Analysis (DEA)—Thirty years on. *European Journal of Operational Research*, v.192, 1-17, 2009.
- Cooper, W. W.; Seiford, L. M. e Tone, K.** Introduction to Data Envelopment Analysis and its uses: with DEA-Solver software and references. 1.ed. New York: Springer, 2006.
- Cooper W. W.; Park K. S e Yu G.** IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. *Management Science*, v. 45, 597–607, 1999.
- Charnes, A. e Cooper, W. W.** Programming with linear fractional functional. *Naval Research Logistics Quarterly*, v.9, n.3 e 4, p.181-185, 1962.

- Charnes, A.; Cooper, W.W. e Rhodes, E.** Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, v.2, n.6, p.429-444, 1978.
- Entani, T., Maeda, Y. e Tanaka, H.** Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, vol. 136, 32–45, 2002.
- Garcia, P. A. A. de Melo, P. F. F. e Schirru, R.** Aplicação de um modelo *fuzzy* DEA para priorizar modos de falhas em sistemas nucleares. *Pesquisa Operacional*, v. 29, p.383-402, 2009.
- Guo, P., e Tanaka, H.** Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 119, 149–160, 2001.
- Hatami-Marbini, A; Emrouznejad, A e Tavana, M. A.** Taxonomy and review of the fuzzy data Envelopment Analysis literature: Two decades in the Making. *European Journal of Operational Research*, v. 214, 457-472, 2011.
- Kao, C. e Liu, S. T.** Fuzzy efficiency measures in data envelopments analysis. *Fuzzy sets and systems*, v. 133, 427-437, 2000.
- Kao, C., e Lin, P. H.** Efficiency of parallel production systems with fuzzy data. *Fuzzy sets and systems*, v. 19, 83-98, 2012.
- Kaufmann, A.** Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. vol 1, Academic Press, New York, 1975.
- Li, X-B., Reeves, G. R.** A multiple criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*. v. 115, n.3, p.507-517, 1999.
- Liang, G-S. e Wang, M-J.** Evaluating Human Reliability Using Fuzzy Relation. *Microelectron. Reliab*, v. 33, n.1, p.63-80, 1993.
- Lertworasirikul, S.; Fang, S. C., Joines, J. A. e Nuttle, H. L. W.** Fuzzy data envelopment analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 139, 379–394, 2003.
- Santos, M. A.; Marins, F. A. S. e Salomon, V. A. P.** Utilização da Função Arbitragem de Nash nos Modelos DEA CCR: Uma abordagem na orientação combinada entrada/saída sob a ótica da Teoria dos Jogos de Barganha. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional- SBPO, 2012.
- Silva, A. F, Marins, F. A. S e Montevechi, J. A. B.** Multi-choice mixed integer goal programming optimization for real problems in a sugar and ethanol milling company. *Applied Mathematical Modelling*. v. 37, n.9, 6146-6162.
- Wen, M., Qin, Z. e Kang, R.** Sensitivity and stability analysis in fuzzy data envelopment analysis. *Fuzzy Optimization Decision Making*, v.10, 1-10, 2011.
- Wen, M. e You, C. A.** Fuzzy data envelopment analysis (DEA) model with credibility measure. *Technical Report*, 2007.
- Yager, R. R.** A characterization of the extension principle. *Fuzzy Sets and Systems*, v.18, 205-217. 1986.
- Zadeh, L. A.** Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, v. 1, 28-44, 1973.
- Zadeh, L. A.** Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and System*, v.1, 3-28, 1978.
- Zimmermann, H. J.** Fuzzy Set Theory and Its Applications. 2nd ed., Kluwer-Nijhoff, Boston, 1991.