Um método proximal para problemas de otimização multiobjetivo quase-convexa

Hellena Christina Fernandes Apolinário
Universidade Federal do Tocantins
Coordenação de Ciência da Computação, ALC NO 14 (109 Norte) AV.NS.15 S/N
CEP 77001-090, Palmas -TO, Brasil
hellenato@cos.ufrj.br

Kely Diana Villacorta Villacorta
Universidade Federal da Paraíba - Campus I
Departamento de Computação Científica - Centro de Informática, Castelo Branco
CEP: 58051-900, João Pessoa - PB, Brasil
kelydvv@ci.ufpb.br

Paulo Roberto Oliveira
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia de Sistemas e Computação, Caixa Postal 68511
CEP 21945-970, Rio de Janeiro - RJ, Brasil
poliveir@cos.ufrj.br

Resumo

Neste trabalho propomos um método de ponto proximal com regularização quadrática, com o objetivo de encontrar soluções Pareto fraco de problemas de otimização multiobjetivo irrestrito, aplicado à funções $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciáveis e quase-convexas. Estabelecemos a boa definição da sequência gerada pelo método. Quando a sequência dos parâmetros de regularização é limitada, provamos a convergência para um ponto Pareto crítico. E quando a sequência dos parâmetros converge a zero, obtemos a convergência para uma solução Pareto fraco.

Palavras-chave: Programação Multiobjetivo. Funções quase-convexas. Método proximal. Fejér convergência. Solução Pareto fraco. Ponto Pareto crítico.

Área principal: Programação matemática.

Abstract

In this paper we propose a proximal point method with quadratic regularization, with the goal of finding weak Pareto solutions of multiobjective unconstrained optimization problems, applied to continuously differentiable and quasiconvex functions $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. We have established a good definition of the sequence generated by the method. When the sequence of regularization parameters is limited, we prove convergence to a Pareto critical point. And when the sequence of parameters converges to zero, we obtain convergence to a weak Pareto solution.

Keywords: Multiobjective programming. Quasiconvex functions. Proximal method. Fejér convergence. Weak Pareto solution. Pareto critical point.

Main area: Mathematical programming.

1 Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de otimização multiobjetivo irrestrito:

$$\min\{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial quase-convexa e continuamente diferenciável. As funções quase-convexas podem ser caracterizadas em termos da convexidade de seus conjuntos de nível. Esta classe de funções, que contém a classe das funções convexas, tem sido o ponto de partida para muitas pesquisas em convexidade generalizada (ver por exemplo Crouzeix (1998), Crouzeix e Ferlan (1982), Martinez-Legaz (1988), Penot e Volle (1987)). Estas funções possuem um grande domínio de aplicações em vários campos das ciências e engenharias como: Teoria da produção, Teoria da utilidade, Teoria do controle e Teoria de aproximação.

O método de ponto proximal que foi introduzido por Martinet (1970) e posteriormente desenvolvido e amplamente estudado por Rockafellar (1976), originalmente foi proposto no contexto do problema de encontrar zeros de operadores monótonos maximais. Quando este operador é o subdiferencial de funções convexas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, os zeros deste operador, são as soluções do problema de otimização convexa do tipo: $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. O clássico método de ponto proximal para resolver problemas de otimização escalar convexa gera uma sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, a partir de um processo iterativo iniciando com um ponto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, arbitrário, e $x^{k+1} \in \text{argmin}\{f(x) + \lambda_k\|x - x^k\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n\}$, onde $\lambda_k > 0, \forall\ k \in \mathbb{N}$, é um parâmetro de regularização. Vários trabalhos na literatura analisa a convergência da sequência gerada por este método, no caso em que a função objetivo é convexa (Ferreira e Oliveira(2002), Guler (1991), Teboulle (1992), Alber et al. (1997), Guler (1992)). No caso em que a função não é convexa, citamos (Fukushima (1981) e Mine, Cunha et al.(2010), Kaplan e Tichatschke,(1998), Souza et al. (2010), Quiroz e Oliveira (2012)).

Quando a função a minimizar é uma função vetorial $F : X \longrightarrow Y$, onde X é um espaço real de Hilbert, e Y um espaço real de Banach contendo um cone fechado, pontudo e convexo C com interior não vazio, e a ordem em Y é a ordem parcial induzida pelo cone C, o problema de minimização pertence a uma classe chamada de otimização vetorial. Em particular, quando $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, e o cone $C = \mathbb{R}^m_+$, o problema de minimização pertence a uma classe de problemas chamada de otimização multiobjetivo. Recentemente, alguns trabalhos estenderam o método de ponto proximal para otimização vetorial, dos quais inclui, Bonnel et al.(2005), Villacorta e Oliveira (2011), Huang e Yang (2004), Gregório e Oliveira (2010), Ceng e Yao (2007), Cheng et al.(2011). No entanto, é importante observar que os trabalhos existentes na literatura estenderam o método de ponto proximal para otimização vetorial, aplicado à funções vetoriais convexas.

O nosso objetivo é propor um método de ponto proximal de valor escalar, em otimização multiobjetivo quase-convexa, para encontrar soluções Pareto fracas para o problema (1), o qual é baseado no trabalho do Bonnel et al. (2005), ao considerarmos a norma ao quadrado como regularização.

Para podermos comparar elementos no $\mathbb{R}^m$, consideramos a ordem parcial, $\preceq$, induzida pelo cone $\mathbb{R}^m_+$: dados $y, y' \in \mathbb{R}^n$, $y \preceq y'$ se, e somente se, $y' - y \in \mathbb{R}^m_+$, com associada relação $\prec$, dada por, $y \prec y'$ se, e somente se, $y' - y$ pertence ao interior do cone $\mathbb{R}^m_+$, denotado por $\mathbb{R}^m_{++}$. O nosso objetivo é encontrar soluções para o problema (1) com respeito à ordem parcial $\prec$, porém, em geral, não existe um ponto em $\mathbb{R}^n$ que minimize simultaneamente todas as funções objetivo de F, desta forma o conceito de otimalidade usual para o caso escalar, deve ser substituído pelo conceito de otimalidade de Pareto. Em particular, buscamos soluções Pareto fracas para o problema (1), isto significa um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que não existe $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $F(x) \prec F(x^*)$. Por outro lado, sob condições menos restritivas, buscamos também pontos Pareto críticos para o problema (1), isto significa um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, existe $i_0 = i_0(v) \in \{1, ..., m\}$ com $\langle \nabla F_{i_0}(x^*), v\rangle \geq 0$.

Para estes objetivos, propomos um método de ponto proximal de valor escalar, o qual gera uma sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que sob a condição da sequência dos parâmetros de regularização,

$\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ser limitada, provamos que a sequência gerada pelo método converge para um ponto Pareto crítico, e sob a condição de que a sequência dos parâmetros de regularização converge a zero, provamos que a sequência gerada converge para uma solução Pareto fraca do problema (1). Além das hipótese citadas, para estabelecermos os resultados de convergência, utilizamos a seguinte hipótese: (H_1) O conjunto $\left(F(x^0)-\mathbb{R}^m_+\right)\cap F(\mathbb{R}^n)$ é $\mathbb{R}^m_+ -$ *completo*, isto é, para toda sequência $\{a_k\}\subset\mathbb{R}^n$, com $a_0=x^0$, tal que $F(a_{k+1})\preceq F(a_k)\ \forall\ k\in\mathbb{N}$, $\exists\ a\in\mathbb{R}^n$ tal que $F(a)\preceq F(a_k)$, $\forall\ k\in\mathbb{N}$. Esta hipótese foi utilizada em alguns trabalhos da literatura, tais como, Bonnel et al.(2005), Villacorta e Oliveira (2011), e Ceng e Yao (2007).

Este trabalho tem a seguinte disposição: na Seção 2 relembramos alguns conceitos e resultados básicos sobre otimização multiobjetivo, escalarização, teoria do subdiferencial e funções quase-convexas, na Seção 3 apresentamos nosso método de ponto proximal com regularização quadrática para funções quase-convexas, estabelecemos a boa definição do método e mostramos que a sequência gerada é Fejér convergente, na Seção 4 mostramos a convergência da sequência e por fim, na Seção 5, apresentamos as considerações finais.

2 Preliminares

Nesta seção, apresentamos conceitos e resultados básicos que são de fundamental importância para o desenvolvimento do nosso trabalho. Estes fatos podem ser encontrados em alguns livros de Análise Variacional, tais como, Hadjisavvas (2005), Mordukhovich (2006) e, Rockafellar e Wets (1998).

Dada uma função $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, denotaremos por dom $(f)=\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)<+\infty\}$, o *dominio efetivo* de f. Se dom $(f)\neq\emptyset$, a função é dita própria. Quando $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x)=+\infty$, f é dita coerciva. Denotaremos por argmin $\{f(x): x\in\mathbb{R}^n\}$ o conjunto dos minimizadores da função f e por inf f, o valor ótimo do problema min $\{f(x): x\in\mathbb{R}^n\}$. E por fim, a função f é *semicontínua inferior* se para cada $x\in\mathbb{R}^n$ temos que toda sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k=x$ implica que $f(x)\leq\liminf\limits_{k\to+\infty} f(x_k)$.
O próximo resultado garante que o conjunto dos minimizadores de uma função, sob algumas hipóteses, é não vazio.

Proposição 2.0.1 (Rockafellar e Wets (1998)-Teorema 1.9) *Seja* $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *uma função semicontínua inferior, coerciva e própria. Então o valor* $\inf f$ *é finito e o conjunto* argmin $\{f(x): x\in\mathbb{R}^n\}$ *é não vazio e compacto.*

Definição 2.0.1 *Seja $D\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto e $\bar{x}\in D$. O cone normal no ponto $\bar{x}$ em relação ao conjunto D é dado por* $\mathcal{N}_D(\bar{x})=\{d\in\mathbb{R}^n:\langle\ d\ ,\ x-\bar{x}\rangle\leq 0,\forall\ x\in D\}$.

2.1 Otimização Multiobjetivo

Neste trabalho consideramos o espaço Euclideano $\mathbb{R}^m$ e o cone $\mathbb{R}^m_+=\{y\in\mathbb{R}^m: y_i\geq 0,\forall\ i=1,...,m\}$, o qual define uma ordem parcial $\preceq$ em $\mathbb{R}^m$. Para $y,y'\in\mathbb{R}^m$, $y\ \preceq\ y'$ se e somente se $y'\ -\ y\in\mathbb{R}^m_+$, isto significa que $y_i\leq\ y'_i$ para todo $i=1,2,...,m$, com associada relação de ordem estrita $\prec$ induzida pelo interior deste cone, $\mathbb{R}^m_{++}=\{y\in\mathbb{R}^m: y_i>0,\forall\ i=1,...,m\}$, dada por $y\ \prec\ y'$, se e somente se $y'\ -\ y\in\mathbb{R}^m_{++}$, isto significa que $y_i<\ y'_i$ para todo $i=1,2,...,m$. Esta ordem parcial estabelece uma classe de problemas conhecida na literatura como Otimização Multiobjetivo. A teoria sobre Otimização Multiobjetivo utilizada no decorrer deste trabalho pode ser encontrada em (Miettinen (1999)).

Considere o problema de otimização multiobjetivo irrestrito:

$$\min\{G(x): x\in\mathbb{R}^n\} \tag{2}$$

onde $G:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$, com $G=(G_1,G_2,...,G_m)^T$.

Definição 2.1.1 (Miettinen (1999), Definição 2.2.1) *Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é uma solução Pareto para o problema* (2)*, se não existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_i(x) \leq G_i(x^*)$, para todo $i \in \{1, ..., m\}$ e $G_j(x) < G_j(x^*)$, para algum $j \in \{1, ..., m\}$.*

Definição 2.1.2 (Miettinen (1999), Definição 2.5.1) *Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é uma solução Pareto fraca para o problema* (2)*, se não existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_i(x) < G_i(x^*)$, para todo $i \in \{1, ..., m\}$.*

Denotaremos por $\operatorname{argmin}\{G(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ e por $\operatorname{argmin}_w \{G(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ o conjunto das soluções Pareto e Pareto fraca do problema (2), respectivamente.

No que segue, assumimos que a função G é continuamente diferenciável. Para $x \in \mathbb{R}^n$, o jacobiano de G em x, denotado por $JG(x)$, é uma matriz de ordem $m \times n$ cujas entradas são definidas por $(JG(x))_{i,j} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x)$. Podemos representá-lo por,

$$JG(x) := (\nabla G_1(x), \nabla G_2(x), ..., \nabla G_m(x)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

E a imagem do jacobiano de G em x denotaremos por,

$$Im\,(JG\,(x)) := \{JG\,(x)\,v = (\langle \nabla G_1(x), v\rangle, \langle \nabla G_2(x), v\rangle, ..., \langle \nabla G_m(x), v\rangle) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Uma condição necessária, mas, em geral, não suficiente, de otimalidade de primeira ordem para o problema (2) (ver, por exemplo, Luc (1989)), de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, é

$$Im\,(JG\,(x)) \cap \left(-\mathbb{R}^m_{++}\right) = \emptyset. \tag{3}$$

Ou, equivalentemente, $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$, existe $i_0 = i_0(v) \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$\langle \nabla G_{i_0}(x), v\rangle \geq 0.$$

Observe que a condição (3) generaliza para otimização multiobjetivo, a clássica condição, "gradiente igual a zero", para o caso de valor real.

A partir da condição (3), temos a definição a seguir.

Definição 2.1.3 *Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz* (3) *é chamado um ponto Pareto crítico.*

Segue da definição anterior, que se um ponto x não é Pareto crítico, então existe uma direção $v \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$JG\,(x)\,v \in \left(-\mathbb{R}^m_{++}\right),$$

isto é, $\langle \nabla G_i(x), v\rangle < 0,\ \forall\ i \in \{1, ..., m\}$. Como G é continuamente diferenciável,

$$\lim_{t \to 0} \frac{G_i(x + tv) - G_i(x)}{t} = \langle \nabla G_i(x), v\rangle < 0,\ \forall\ i \in \{1, ..., m\},\ \text{ver Rockafellar e Wets (1998).}$$

Isto implica dizer que, v é uma *direção de descida*, para a função G_i, isto é, $\exists\ t_0 > 0$, tal que

$$G_i(x + tv) < G_i(x), \forall\ t \in (0, t_0], \forall\ i \in \{1, ..., m\}.$$

Portanto, v é uma *direção de descida* para G em x, (ver Fliege e Svaiter (2000), Fliege et al. (2009), Graña Drummond e Svaiter (2005)), isto é, $\exists\ t_0 > 0$ tal que

$$G(x + tv) \prec G(x),\ \forall\ t \in (0, t_0].$$

2.2 Escalarização

A escalarização é uma importante técnica na otimização multiobjetivo, pois permite transformar o problema de otimização multiobjetivo original em um problema de otimização escalar, ou em uma família de problemas escalares, e dessa maneira podemos utilizar os resultados existentes na literatura relacionados à otimização escalar.

Definição 2.2.1 (Luc (1989), Definição 2.1) *Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma* **representação escalar estrita** *de uma função vetorial $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ quando dados $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$:*

$$F(x) \preceq F(\bar{x}) \Longrightarrow f(x) \leq f(\bar{x}) \quad e \quad F(x) \prec F(\bar{x}) \Longrightarrow f(x) < f(\bar{x}).$$

Além disso, dizemos que f é uma **representação escalar fraca** *de F se*

$$F(x) \prec F(\bar{x}) \Longrightarrow f(x) < f(\bar{x}).$$

É fácil observar que toda representação escalar estrita também é uma representação escalar fraca. O seguinte resultado propõe uma forma de obter uma representação escalar estrita para funções $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Proposição 2.2.1 (Luc (1989)-Proposição 2.3) *Considere a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma representação escalar estrita de F se, e somente se, f é uma composição de F com uma função estritamente crescente $g : F(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.2.1 *Seja a aplicação $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. A função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \langle F(x), z\rangle$, com $z \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$ e fixo, é uma representação escalar estrita de F.*

Proposição 2.2.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma representação escalar fraca da aplicação $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\operatorname{argmin}\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ o conjunto dos minimizadores de f. Então temos a inclusão:*

$$\operatorname{argmin}\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \operatorname{argmin}_w\{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

2.3 Teoria de Subdiferencial

A seguir vamos abordar algumas definições e resultados que versam sobre o cálculo subdiferencial.

Definição 2.3.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria. Para cada $x \in \operatorname{dom} f$, o conjunto dos subgradientes regulares, também chamado de subdiferencial de Fréchet, de f em x, denotado por $\hat{\partial} f(x)$, é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle + o(\|y - x\|), \text{ onde } \lim_{y \to x} \frac{o(\|y-x\|)}{\|y-x\|} = 0.$$

Se $x \notin \operatorname{dom} f$, então $\hat{\partial} f(x) = \emptyset$.

Definição 2.3.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria. O subdiferencial limite de f em $x \in \mathbb{R}^n$, denotado por $\partial f(x)$, é definido por*

$$\partial f(x) := \Big\{x^* \in R^n : \exists x_n \to x, \quad f(x_n) \to f(x), \quad x_n^* \in \hat{\partial} f(x_n) \to x^*\Big\}.$$

Proposição 2.3.1 (Rockafellar e Wets (1998)-Teorema 8.6) *Para uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e um ponto $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, os conjuntos $\partial f(\bar{x})$ e $\hat{\partial} f(\bar{x})$ são fechados, com $\hat{\partial} f(\bar{x})$ convexo e $\hat{\partial} f(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$.*

Proposição 2.3.2 (Rockafellar e Wets (1998)-Teorema 10.1) *Se uma função própria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tem um mínimo local em $\bar{x}$, então $0 \in \hat{\partial} f(\bar{x})$ e portanto $0 \in \partial f(\bar{x})$.*

Observação 2.3.1 *Seja $C \subset R^n$. Se $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possui um mínimo local em $\bar{x} \in C$, então $0 \in \partial(f + \delta_C)(\bar{x})$, onde δ_C é a função indicadora do conjunto C, definida como $\delta_C(x) = 0$ se $x \in C$ e $\delta_C(x) = +\infty$ caso contrário.*

Proposição 2.3.3 *As seguintes propriedades são verdadeiras:*

(i) Se f é diferenciável em $\bar{x}$ então $\hat{\partial} f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$, e portanto $\nabla f(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x})$;

(ii) Se f é continuamente diferenciável em uma vizinhança de x, então $\hat{\partial} f(x) = \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$;

(iii) Se $g = f + h$ com f finita em $\bar{x}$ e h continuamente diferenciável em uma vizinhança de $\bar{x}$ então $\hat{\partial} g(\bar{x}) = \hat{\partial} f(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})$ e $\partial g(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})$.

Prova: Ver Exercício 8.8, pp 304, em Rockafellar e Wets (1998) . ■

2.4 Funções Quase-Convexas

Nesta seção apresentamos o conceito e a caracterização de funções quase-convexas, bem como de suas subclasses, e em seguida definimos funções multiobjetivo quase-convexa. Esta teoria pode ser encontrada em Bazaraa et al. (2006), Mangasarian (1969), e suas referências.

Definição 2.4.1 (Mangasarian (1969), Capítulo 9, Definição 1) *Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita* **quase-convexa** *se, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max \{f(x), f(y)\}, \qquad \forall\ \lambda \in [0, 1] \tag{4}$$

Quando esta desigualdade é estrita, a função f é dita estritamente quase-convexa.

Uma função quase-convexa pode ser caracterizada pela convexidade dos seus conjuntos de nível. Este resultado é dado no teorema a seguir.

Teorema 2.4.1 *Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é quase-convexa se, e somente se,*

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$$

é convexo para cada número real α.

Prova: Ver Teorema 3.5.2 em Bazaraa et al. (2006). ■

Teorema 2.4.2 (Mangasarian (1969), Capítulo 9, Teorema 4) *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Então f é quase-convexa se, e somente se, a seguinte afirmação é satisfeita:*

$$\textit{se } f(x) \leq f(y) \textit{ então } \langle \nabla f(y), x - y\rangle \leq 0.$$

A seguir definiremos quase-convexidade para funções multiobjetivo.

Definição 2.4.2 (Luc (1989), Corolário 6.6) *Seja $F = (F_1, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, então F é $\mathbb{R}^m_+$ - quase-convexa se, e somente se, cada função componente de F, $F_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, é quase-convexa.*

Observação 2.4.1 (Huang e Yang (2004)) *Considere o problema de otimização multiobjetivo*

$$(P) \quad \min\{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\},$$

onde $F = (F_1, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. *Ao substituirmos a aplicação* $F(x) = (F_1(x), ...F_2(x))$ *por* $e^{F(x)} = (e^{F_1(x)}, ..., e^{F_m(x)})$, *obtemos o seguinte problema de otimização multiobjetivo*

$$(P') \quad \min\left\{(e^{F_1(x)}, ..., e^{F_m(x)}) : x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

É fácil observar que os problemas (P) *e* (P') *possuem o mesmo conjunto de soluções Pareto fracas. Com esta observação, podemos supor sem perda de generalidade, que* $\forall\ \bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, $\langle F(x), \bar{z}\rangle > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$. *Além disto, temos que a função* $e^{F(x)}$ *também é* $\mathbb{R}^m_+$ *- quase-convexa,* **(ver Bazaraa (2006) Exercício** [3.56]**)**, *logo os problemas (P) e (P') são quase-convexos..*

3 Método Proximal Quase-convexo (MPQC)

Nesta seção estabelecemos um algoritmo de ponto proximal de valor escalar para encontrar soluções Pareto fracas para o problema (1). Mostramos que a sequência gerada pelo algoritmo está bem definida, e que esta sequência é Fejér convergente. Além disto, sob as hipóteses de que a sequência dos parâmetros de regularização é limitada, obtemos convergência a pontos Pareto críticos, e quando esta sequência de parâmetros converge a zero, obtemos convergência para soluções Pareto fracas.

Considere a função vetorial $F_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $F_k(x) = F(x) + \frac{\alpha_k}{2}\|x - x^k\|^2 e_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m_{++}$ e $\|e_k\| = 1$. Tome qualquer $z_k \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ e defina a função escalar $\varphi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_k(x) = \langle F_k(x), z_k\rangle = \langle F(x), z_k\rangle + \frac{\alpha_k}{2}\langle e_k, z_k\rangle \left\|x - x^k\right\|^2$. Visto que $z_k \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, φ_k é uma representação escalar estrita de F_k, e portanto, uma representação escalar fraca de F_k.
Assim, o objetivo é encontrar soluções ótimas para o problema:

$$\begin{array}{c} \min \varphi_k(x) \\ x \in \Omega_k \end{array} \tag{5}$$

onde $\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \preceq F(x^k)\right\}$.

Pois, pela Proposição 2.2.2, temos a inclusão:

$$\operatorname{argmin}\{\varphi_k(x) : x \in \Omega_k\} \subseteq \operatorname{argmin}_w\{F_k(x) : x \in \Omega_k\}. \tag{6}$$

3.1 O Método PQC

Este método gera uma sequência $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ pela seguinte recursão:

1. Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$
2. Dado x^k, encontrar x^{k+1} tal que

$$x^{k+1} \in \operatorname{argmin}\left\{\varphi_k(x) = \langle F(x), z_k\rangle + \frac{\alpha_k}{2}\langle e_k, z_k\rangle \left\|x - x^k\right\|^2 : x \in \Omega_k\right\}$$

onde $\alpha_k > 0$, $\{e_k\} \subset \mathbb{R}^m_{++}$, $\|e_k\| = 1$, $\{z_k\} \subset \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, $\|z_k\| = 1$ e $\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \preceq F(x^k)\right\}$.

A suposição (H_1), a seguir, está relacionada com a função F e a iteração inicial x^0. Esta suposição é citada em vários trabalhos da literatura , os quais inclui Bonnel et al. (2005), Ceng e Yao (2007) e, Villacorta e Oliveira (2011).

(H_1) O conjunto $\left(F(x^0) - \mathbb{R}^m_+\right) \cap F(\mathbb{R}^n)$ é $\mathbb{R}^m_+$*−completo*, isto é, para toda sequência $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$, com $a_0 = x^0$, tal que $F(a_{k+1}) \preceq F(a_k)\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, $\exists\ a \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(a) \preceq F(a_k)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.1.1 *Como a aplicação* F *é contínua e* $\mathbb{R}^m_+$ *-quase-convexa, então o conjunto* Ω_k *é fechado.*

3.2 Existência das Iterações

Proposição 3.2.1 *(Existência das iterações)*
Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função $\mathbb{R}^m_+$-quase-convexa e continuamente diferenciável. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\text{argmin}\{\varphi_k(x) : x \in \Omega_k\}$ é não vazio.

Prova: Pela observação 2.4.1, podemos supor, sem perda de generalidade, que para cada $z \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, a função $\langle F(.), z\rangle$ é limitada inferiormente. Observe que a função norma, $\|.\|$, é uma função coerciva em $\mathbb{R}^n$. Visto que $\langle e_k, z_k\rangle > 0$ e Ω_k é um conjunto fechado, $\varphi^k(x)$ é coerciva em Ω_k. Sendo F continuamente diferenciável, $\varphi_k(x)$ é também continuamente diferenciável. Pela Proposição 2.0.1, concluímos que o conjunto $\text{argmin}\{\varphi_k(x) : x \in \Omega_k\}$ é não vazio e compacto, e desta forma o mínimo é atingido. Portanto, existe $x^{k+1} \in \text{argmin}\{\varphi_k(x) : x \in \Omega_k\}$. ■

3.3 Fejér convergência

Definição 3.3.1 (Schott (1995), Definição 2.1) *Uma sequência $\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ é dita Fejér convergente em um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, com respeito à distância Euclidiana, se*

$$\left\|y^{k+1} - u\right\| \le \left\|y^k - u\right\|, \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, u \in U.$$

Lema 3.3.1 *Se $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é Fejér convergente em $U \neq \emptyset$, então:*

(i) $\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

(ii) Se um ponto de acumulação, y, de $\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, pertence a U então $\lim\limits_{k\to+\infty} y^k = y$.

Prova: Ver Teorema 2.7 em Schott (1995). ■

Em seguida, para obter o nosso próximo resultado, precisamos definir o seguinte conjunto:

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \preceq F\left(x^k\right) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\right\}$$

Como a sequência gerada pelo método PQC, $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, satisfaz, $F(x^{k+1}) \preceq F(x^k)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, pela hipótese (H_1) temos que o conjunto E é não vazio.

O próximo resultado caracteriza em E, uma função vetorial quase-convexa e diferenciável.

Proposição 3.3.1 *Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função $\mathbb{R}^m_+$-quase-convexa, diferenciável e $x \in E$. Então $\left\langle \nabla F_i(x^k), x - x^k\right\rangle \le 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ e $\forall\, i \in \{1, ..., m\}$.*

Prova: Como F é $\mathbb{R}^m_+$-quase-convexa, então cada função componente, F_i, $i = 1, ..., m$, é quase-convexa. Então o resultado segue pela caracterização de funções escalares diferenciáveis quase-convexa (cf. Mangasarian (1969)). ■

Proposição 3.3.2 *(Fejér convergência) Seja $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo método PQC. Então a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é Fejér convergente em E.*

Prova:
Observe que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\|x^k - x\right\|^2 = \left\|x^k - x^{k+1} + x^{k+1} - x\right\|^2 = \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 + \left\|x^{k+1} - x\right\|^2 + 2\left\langle x^k - x^{k+1}, x^{k+1} - x\right\rangle. \quad (7)$$

Desde que x^{k+1} resolve o problema (5), segue que x^{k+1} satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem, isto é

$$0 \in \partial\left(\varphi_k + \delta_{\Omega_k}\right)(x^{k+1}),$$

onde δ_{Ω_k} denota a função indicadora do conjunto Ω_k.
A função φ_k é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$, logo, em uma vizinhança de x^{k+1}. Além disto, desde que Ω_k é fechado, $x_{k+1} \in \Omega_k$, logo $\delta_{\Omega_k}(x^{k+1}) = 0$, e portanto finita. Então pela Proposição 2.3.3, item (iii), temos que, em uma vizinhança de x^{k+1}

$$\partial \left(\varphi_k + \delta_{\Omega_k}\right)(x^{k+1}) = \partial\varphi_k(x^{k+1}) + \partial\delta_{\Omega_k}(x^{k+1})$$

Por φ_k ser continuamente diferenciável, então pela Proposição 2.3.3, item (ii), $\partial\varphi_k(x^{k+1}) = \nabla\left(\langle F(.), z_k\rangle\right)(x^{k+1}) + \alpha_k \langle e_k, z_k\rangle \left(x^{k+1} - x^k\right)$. Pela observação 3.1.1, Ω_k é convexo, segue que $\partial\delta_{\Omega_k}(x^{k+1}) = \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$, onde $\mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$ denota o cone normal no ponto x^{k+1}, em relação ao conjunto Ω_k. Temos que

$$0 \in \nabla\left(\langle F(.), z_k\rangle\right)(x^{k+1}) + \alpha_k \langle e_k, z_k\rangle \left(x^{k+1} - x^k\right) + \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$$

Assim, existe $\nu_k \in \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$ tal que:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x^{k+1})(z_k)_i + \alpha_k \langle e_k, z_k\rangle \left(x^{k+1} - x^k\right) + \nu_k \tag{8}$$

Desde que $\beta_k = \alpha_k \langle e_k, z_k\rangle > 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, de (8) temos,

$$x^k - x^{k+1} = \frac{1}{\beta_k}\sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x^{k+1})(z_k)_i + \frac{1}{\beta_k}\nu_k \tag{9}$$

Agora escolha $x^* \in E$. Pela definição de E, $x^* \in \Omega_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Combinando (7), com $x = x^*$, e (9), obtemos:

$$\begin{aligned} \left\|x^k - x^*\right\|^2 &= \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 + \left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 + \frac{2}{\beta_k}\left\langle \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x^{k+1})(z_k)_i + \nu_k\ ,\ x^{k+1} - x^* \right\rangle \\ &\geq \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 + \left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

A última desigualdade segue pela Definição 2.0.1 e Proposição 3.3.1. Portanto, a sequência $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é Fejér convergente em E, e pelo Lema 3.3.1, $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

Pelo fato da sequência $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ser Fejér convergente em E, então a sequência $\left\{\left\|x^k - x\right\|\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente de termos não negativos, e portanto convergente. Assim, da desigualdade em (10) demonstramos a proposição a seguir.

Proposição 3.3.3 *Seja* $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência gerada pelo método PQC, então* $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|x^{k+1} - x^k\right\| = 0$.

Proposição 3.3.4 *Todo ponto de acumulação da sequência* $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$*, gerada pelo método PQC, pertence ao conjunto* E*.*

Prova: Seja $\left\{x^{j_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{j_k} = \widehat{x}$. Sendo F contínua, então a função $\langle F(.), z\rangle$ é contínua para todo $z \in \mathbb{R}^m$, em particular, para todo $z \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$, e $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\langle F(x^{j_k}), z\right\rangle = \langle F(\widehat{x}), z\rangle$. Por outro lado, como $x^{k+1} \in \Omega_k$, temos que $F(x^{k+1}) \preceq F(x^k)$ e desde que $z \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$, temos que $\left\langle F(x^{k+1}), z\right\rangle \leq \left\langle F(x^k), z\right\rangle$. Além disto, pela Observação 2.4.1, podemos supor, que a função $\langle F(.), z\rangle$ é limitada inferiormente, para cada $z \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$. Logo a sequência, $\left\{\left\langle F(x^k), z\right\rangle\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente e limitada inferiormente, e portanto convergente, então $\lim\limits_{k\to+\infty} \langle F(x^k), z\rangle = \langle F(\widehat{x}), z\rangle = inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\langle F(x^k), z\rangle\right\} \leq \langle F(x^k), z\rangle$. Logo, $\left\langle F(x^k) - F(\widehat{x}), z\right\rangle \geq 0, \forall\ k \in \mathbb{N}, \forall\ z \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$. Desta última desigualdade, observa-se que $F(x^k) - F(\widehat{x}) \in \mathbb{R}^m_+$, isto é, $F(\widehat{x}) \preceq F(x^k), \forall\ k \in \mathbb{N}$. Pois caso contrário, se $F(x^k) - F(\widehat{x}) \notin \mathbb{R}^m_+$, então $\exists\ r \in \{1, ..., m\}$ tal que $F_r(x^k) - F_r(\widehat{x}) < 0$, e ao considerarmos $z = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$, onde a componente igual a 1 encontra-se na $r-$ésima posição, então $\left\langle F(x^k) - F(\widehat{x}), z\right\rangle = F_r(x^k) - F_r(\widehat{x}) < 0$, o que nos leva a uma contradição. ■

4 Análise de convergência

Nesta seção mostramos dois importantes resultados sobre a convergência da sequência. Para o primeiro resultado de convergência, supomos que a sequência dos parâmetros de regularização, $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, satisfaz a seguinte hipótese: (H_2) $0 < \alpha_k < \widetilde{\alpha}$, para algum $\widetilde{\alpha} > 0$ e $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.0.1 *(Convergência para Pareto crítico) Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função $\mathbb{R}^m_+$-quase-convexa e continuamente diferenciável. Se a sequência dos parâmetros,$\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, satisfaz a hipótese (H_2), então a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, gerada pelo método PQC, converge para um ponto Pareto crítico do problema multiobjetivo* (1).

Prova: Considere $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo método PQC. Visto que esta sequência é Fejér convergente em E, então pela Proposição 3.3.4 e Lema 3.3.1, concluímos que a sequência toda converge. Assim, considere $\widehat{x} \in E$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^k = \widehat{x}$. Desde que x^{k+1} resolve o problema (5), segue que x^{k+1} satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem, e portanto existe $\nu_k \in \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$ tal que

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x^{k+1})(z_k)_i + \alpha_k \langle e_k, z_k\rangle \left(x^{k+1} - x^k\right) + \nu_k \tag{11}$$

onde $\mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$ é o cone normal no ponto x^{k+1} em relação ao conjunto Ω_k. Visto que $\nu_k \in \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1})$ então

$$\left\langle \nu_k\ ,\ x - x^{k+1}\right\rangle \leq\ 0,\ \forall\ x \in \Omega_k \tag{12}$$

Tome $\bar{x} \in E$. Por definição $E \subset \Omega_k, \forall\ k \in \mathbb{N}$, logo $\bar{x} \in \Omega_k$,$\forall\ k \in \mathbb{N}$. Combinando (12) com $x = \bar{x}$ e (11), temos que:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x^{k+1})(z_k)_i, \bar{x} - x^{k+1} \right\rangle + \alpha_k \langle e_k, z_k\rangle \left\langle x^{k+1} - x^k, \bar{x} - x^{k+1}\right\rangle \geq 0$$

Pela Proposição 3.3.3, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|x^{k+1} - x^k\right\| = 0$. As sequências $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas. E a sequência $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz a hipótese (H_3). Utilizando a desigualdade de Cauchy Schwartz, obtemos: $\left|\alpha_k \langle e_k, z_k\rangle \left\langle x^{k+1} - x^k, \bar{x} - x^{k+1}\right\rangle\right| \to 0$ quando $k \to +\infty$. Visto que a sequência $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\exists$ $\{z^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to+\infty} z^{k_j} = \bar{z}$, com $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$, e por F ser continuamente diferenciável, da desigualdade em (13), para qualquer $\bar{x} \in E$, obtemos :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(\widehat{x})\bar{z}_i\ ,\ \bar{x} - \widehat{x} \right\rangle \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla F_i(\widehat{x})\bar{z}_i\ ,\ \bar{x} - \widehat{x}\rangle \geq 0 \tag{13}$$

Sem perda de generalidade, considere o conjunto $J = \{i \in I : \bar{z}_i > 0\}$, onde $I = \{1, ..., m\}$. Portanto, de (13), existe $i_0 \in J$ tal que

$$\langle \nabla F_{i_0}(\widehat{x})\ ,\ \bar{x} - \widehat{x}\rangle \geq 0,\ \forall\ \bar{x} \in E. \tag{14}$$

Mostraremos agora que $\widehat{x}$ é ponto Pareto crítico em $\mathbb{R}^n$.
Suponha por contradição que $\widehat{x}$ não é um ponto Pareto crítico em $\mathbb{R}^n$, então existe uma direção $v \in \mathbb{R}^n$ tal que : $JF(\widehat{x})v \in -\mathbb{R}^m_{++}$, isto é,

$$\langle \nabla F_i(\widehat{x}), v\rangle < 0, \forall\ i \in \{1, ..., m\} \tag{15}$$

Logo v é uma direção de descida para a função multiobjetivo F , e portanto, $\exists\ \epsilon > 0$ tal que

$$F(x + \lambda v) \prec F(x),\ \forall\ \lambda \in (0, \epsilon]. \tag{16}$$

Como $\widehat{x} \in E$, então por (16) concluímos que $\widehat{x} + \lambda v \in E$. Assim, de (14) com $\bar{x} = \widehat{x} + \lambda v$, obtemos: $\langle \nabla F_{i_0}(\widehat{x})\ ,\ \widehat{x} + \lambda v - \widehat{x}\rangle = \langle \nabla F_{i_0}(\widehat{x})\ ,\ \lambda v\rangle = \lambda \langle \nabla F_{i_0}(\widehat{x})\ ,\ v\rangle \geq 0.$

Como $\lambda > 0$, concluímos que $\langle \nabla F_{i_0}(\widehat{x})\ ,\ v\rangle \geq 0$, contradizendo (15). Logo $\widehat{x}$ é ponto Pareto crítico para o Problema (1). ∎

Para o segundo resultado de convergência, supomos que a sequência dos parâmetros de regularização, $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, satisfaz a seguinte hipótese: $(H_3)\ \lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = 0$.

Teorema 4.0.2 *(Convergência para Pareto Fraca) Se a sequência dos parâmetros,$\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, satisfaz a hipótese (H_3), então a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, gerada pelo método PQC, converge para uma solução Pareto fraca do problema multiobjetivo (1).*

Prova: Seja $x^{k+1} \in \operatorname{argmin}\{\varphi_k(x) : x \in \Omega_k\}, k \in \mathbb{N}$, isto implica que $\forall\, x \in \Omega_k$, $\varphi_k\left(x^{k+1}\right) \leq \varphi_k(x)$, ou seja

$$\left\langle F(x^{k+1}), z_k\right\rangle + \frac{\alpha_k}{2}\left\langle e_k, z_k\right\rangle \left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 \leq \left\langle F(x), z_k\right\rangle + \frac{\alpha_k}{2}\left\langle e_k, z_k\right\rangle \left\|x - x^k\right\|^2. \tag{17}$$

Visto que a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é Fejér convergente em E, então pela Proposição 3.3.4 e Lema 3.3.1, concluímos que a sequência toda converge. Assim, considere $x^* \in E$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^k = x^*$. Além disto, considere uma sequência $\{z_k\} \subset \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$ com $\|z_k\| = 1$. Como $\{z_k\}$ é limitada, então existe uma subsequência,$\{z^{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{l\to+\infty} z^{k_l} = \bar{z}$, com $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$. Daí, a desigualdade em (17), $\forall\, x \in E$ torna-se:

$$\left\langle F(x^{k_l+1}), z_{k_l}\right\rangle + \frac{\alpha_{k_l}}{2}\left\langle e_{k_l}, z_{k_l}\right\rangle \left\|x^{k_l+1} - x^{k_l}\right\|^2 \leq \left\langle F(x), z_{k_l}\right\rangle + \frac{\alpha_{k_l}}{2}\left\langle e_{k_l}, z_{k_l}\right\rangle \left\|x - x^{k_l}\right\|^2. \tag{18}$$

Pela Proposição 3.3.3, $\lim\limits_{l\to+\infty} \left\|x^{k_l+1} - x^{k_l}\right\| = 0$. Como $\{x^k\}_{l\in\mathbb{N}}$ é convergente, existe uma constante M tal que $\left\|x - x^{k_l}\right\| \leq M$. Pelo fato das sequências $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ serem limitadas, e a sequência $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazer a hipótese (H_3), utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, concluímos que $|\frac{\alpha_{k_l}}{2}\left\langle e_{k_l}, z_{k_l}\right\rangle \left\|x^{k_{l+1}} - x^{k_l}\right\|^2| \to 0$ e $|\frac{\alpha_{k_l}}{2}\left\langle e_{k_l}, z_{k_l}\right\rangle \left\|x - x^{k_l}\right\|^2| \to 0$ quando $l \to +\infty$. Portanto, pela continuidade da F, de (18), obtemos que

$$\langle F(x^*), \bar{z}\rangle \leq \langle F(x), \bar{z}\rangle, \forall\, x \in E \tag{19}$$

Logo $x^* \in \operatorname{argmin}\{\langle F(x), \bar{z}\rangle : x \in E\}$. Como $\langle F(.), \bar{z}\rangle$ é uma representação escalar estrita da F, e portanto uma representação escalar fraca, então pela Proposição 2.2.2 temos que $x^* \in \operatorname{argmin}_w \{F(x) : x \in E\}$.

Provaremos a seguir que $x^* \in \operatorname{argmin}_w \{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Suponha por contradição que $x^* \notin \operatorname{argmin}_w \{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, então $\exists\ \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(\widetilde{x}) \prec F(x^*) \tag{20}$$

Logo, para $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{0\}$, segue-se

$$\langle F(\widetilde{x}), \bar{z}\rangle < \langle F(x^*), \bar{z}\rangle \tag{21}$$

Por outro lado, pela Proposição 3.3.4, temos que $x^* \in E$, logo de (20) temos que $F(\widetilde{x}) \prec F(x^k)\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, isto é, $\widetilde{x} \in E$. Logo de (19) e (21) chegamos a uma contradição. ∎

5 Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos um método de ponto proximal de valor escalar, com regularização quadrática, para funções multiobjetivo quase-convexa e continuamente diferenciáeis. A boa definição do método foi provada, e garantimos que a sequência gerada é Fejér convergente. Sob a hipótese de que os parâmetros de regularização são limitados, mostramos a convergência para um ponto Pareto crítico, e considerando estes parâmetros tendendo a zero, mostramos convergência para uma solução Pareto fraca.

Referências

[1] **Alber, Y.I., Burachik R.S. e Iusem, A.N.** (1997), A proximal point method for nonsmooth convex optimization problems in Banach spaces, *Abstr. Appl. Anal*, 2(1-2), 97-120.
[2] **Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. e Shetty, C.M.**, *Nonlinear Programming:Theory and Algorithms.* 3 ed.,John Wiley and Sons, Inc., New York, (2006).
[3] **Bonnel, H., Iusem, A.N. e Svaiter, B.F.** (2005) Proximal methods in vector optimization, *SIAM Journal on Optimization*, 15(4), 953-970.
[4] **Ceng, L. e Yao, J.** (2007), Approximate proximal methods in vector optimization. *European Journal of Operational Research*, 183, 1-19.
[5] **Cheng., Z., Huang, X. X. e Yang, X. Q.** (2011), Generalized proximal point algorithms for multiobjective optimization, *Applicable Analysis: An International Journal*, 90(6), 935-949.
[6] **Crouzeix, J.-P.**, Some properties of Dini derivatives of quasiconvex and pseudoconvex functions, em Gianessi, F. et al. (eds), *New Trends in Mathematical Programming*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 41–57, (1998).
[7] **Crouzeix, J.-P. e Ferland, J.A.** (1982), Criteria for quasi-convexity and pseudo-convexity: Relationships and comparison, *Mathematical Programming*, 23, 193–205.
[8] **Cunha, F.G.M., Cruz Neto, J.X. e Oliveira, P.R.** (2010), A proximal point algorithm with a φ-divergence for quasiconvex programming, *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 59(5), 777-792.
[9] **Ferreira, O.P. e Oliveira, P.R.** (2002), Proximal Point Algorithm on Riemannian Manifolds, *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 51(2), 257-270.
[10] **Fliege, J. e Svaiter, B.F.** (2000), Steepest descent methods for multicriteria optimization, *Mathematical Methods of Operations Research*, 51 (3), pp. 479-494, .
[11] **Fliege, J., Granã Drummond, L.M. e Svaiter, B.F.** (2009) Newton's Method for Multiobjective Optimization, *SIAM Journal on Optimization*, 20(2), 602-626.
[12] **Fukushima, M. e Mine, H.** (1981), A generalized proximal point algorithm for certain non-convex minimization, *Int. J. Systems Sci.* 12(8), 989-1000.
[13] **Granã Drummond, L.M. e Svaiter, B.F.** (2005), A steepest descent method for vector optimization, *Journal of Computational and Applied. Mathematics.*, 175(2), pp. 395-414.
[14] **Gregório, R. e Oliveira, P.R.** (2010), A Logarithmic-quadratic proximal point scalarization method for multiobjective programming, *Journal of Global Optimization*, 49(2), 361-378.
[15] **Güler, O.** (1991), On the Convergence of the Proximal Point Algorithm for Convex Minimization, *SIAM J. Control and Optimization*, 29(2), 403-419.
[16] **Güler, O.** (1992), New proximal point proximal algorithms for convex minimization, *SIAM Journal Control and Optimization*, 2(4), 649–664.
[17] **Hadjisavvas, N., Komlosi, S. e Shaible, S.**, *Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Nonconvex Optimization and its Applications 76, Springer-Verlag, New York, (2005).
[18] **Huang, X.X. e Yang, X.Q.** (2004), Duality for multiobjective optimization via non- linear Lagrangian functions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 120(1),111-127.
[19] **Kaplan, A. e Tichatschke, R.** (1998), Proximal point methods and nonconvex optimization, *Journal of Global Optimization* 13, 389-406.
[20] **Luc, T.D.**, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer, Berlin, (1989).
[21] **Mangasarian, O.L.**, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, (1969).
[22] **Martinet, B.** (1970), Regularization d'inequations variationelles par approximations sucessives, *Révue Française d'informatique et Recherche Opérationelle*, 4, 154-159
[23] **Martinez-Legaz, J.E.** (1988), Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods, *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 19(5), 603–652.
[24] **Miettinen, K.M.**, *Nonlinear multiobjective optimization.* Kluwer Academic Publishers, Boston, (1999).
[25] **Mordukhovich, B. S.**, *Variational analysis and generalized differentiation I: Basic theory*, Grundlehren Series[Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 330, Springer-Verlag, Berlin, (2006).
[26] **Penot, J.-P. e Volle, M.** (1987), Dualité de Fenchel et quasiconvexité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Serie I 304, 371–374,).
[27] **Quiroz, E.A.P. e Oliveira, P.R.** (2012), An extension of proximal methods for quasiconvex minimization on the nonnegative orthant, *European Journal of Operational Research* 216, 26–32.
[28] **Quiroz, E.A.P. e Oliveira, P.R.** (2012), Proximal point method for minimizing quasiconvex locally Lipschitz functions on Hadamard manifolds, *Nonlinear Analysis* 75, 5924–5932.
[29] **Quiroz, E.A.P. e Oliveira, P.R.** (2012), Full convergence of the proximal point method for quasiconvex functions on Hadamard manifolds, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 18(02), 483-500.
[30] **Rockafellar, R.T.** (1976), Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 14(5), 877-898.
[31] **Rockafellar, R.T.** (1976), Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming,*Math. Oper. Res.*, 1(2), 97-116.
[32] **Rockafellar, R.T. e Wets, R.J-B.**, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.
[33] **Schott, D.** (1995), Basic properties of Fejer monotone sequences, *Rostocker Mathematische Kolloquium*, 49, 57-74.
[34] **Souza, S.S., Oliveira, P.R., Cruz Neto, J.X. e Soubeyran, A.** (2010), A proximal method with separable distance for quasiconvex minimization over the nonnegative orthant, *European Journal of Operational Research*, 201, 365-376.
[35] **Teboulle, M.** (1992), Entropic Proximal Mappings with Applications to Nonlinear Programming, *Mathematics of Operation Research*, 17, 670-690.
[36] **Villacorta, K.D.V. e Oliveira, P.R.** (2011), An interior proximal method in vector optimization, *European Journal of Operational Research*, 214, 485-492.