

## SOBRE A CONECTIVIDADE ALGÉBRICA EM UMA SUBCLASSE DAS ÁRVORES DE TIPO II

**Claudia M. Justel**

**Stanley Rodrigues**

**Thiago de Paula Vasconcelos**

Instituto Militar de Engenharia - IME

Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha - RJ

cjustel@ime.eb.br, sstanleyy@gmail.com,

thiagodpvasconcelos@hotmail.com

### RESUMO

Neste trabalho é realizado um estudo da conectividade algébrica numa subclasse das árvores de Tipo II. Em 1975, Fiedler classificou as árvores em dois tipos, a partir dos autovetores associados com a conectividade algébrica, o segundo menor autovalor da matriz laplaciana da árvore. Propomos a definição de uma subclasse das árvores de Tipo II, as árvores de Tipo II simétricas. Serão analisadas algumas propriedades e realizado um estudo experimental em árvores desta subclasse com número limitado de vértices.

**PALAVRAS CHAVE.** Teoria Espectral de Grafos, conectividade algébrica, árvores de Tipo I e II.

**Área Principal** (Teoria e Algoritmos em Grafos)

### ABSTRACT

In this work are considered a subclass of the trees of Type II, defined by Fiedler in 1975. Any tree  $T$  can be classified in two Types (I or II), according some properties of the eigenvectors associated to the algebraic connectivity of  $T$ , the second smallest eigenvalue of the Laplacian matrix of  $T$ . We define the symmetric trees of Type II, a subclass of the trees of Type II. Some properties of this subclass are presented and some experimental results about the algebraic connectivity of them are included.

**KEYWORDS.** Spectral Graph Theory, algebraic connectivity, trees of Type I and II

**Main Area** (Theory and Algorithms in Graphs)

## 1. Introdução

A conectividade algébrica de um grafo  $G$ ,  $a(G)$  é um parâmetro espectral que traz informação sobre a conexão que existe nele [ABREU, 2007] e é igual ao segundo menor autovalor da matriz laplaciana  $L(G)$ . Além de ser um invariante que determina uma característica global de um grafo, o valor da conectividade algébrica é mais preciso do que as medidas de conectividade de vértices e de arestas, o que é um importante motivador de trabalhos que a investigam. Neste trabalho estamos interessados em analisar o que acontece quando um vértice de grau um é acrescentado num tipo de grafo particular, uma árvore. Existem trabalhos na literatura que analisam o valor que possui a conectividade algébrica de um grafo e o comparam com o valor da conectividade algébrica do grafo após a inserção de um vértice de grau um.

Em [GRONE & MERRIS, 1987] é apresentado um primeiro estudo sobre árvores que quando adicionado um vértice de grau um em uma situação muito particular, não altera o valor da conectividade algébrica. Recentemente, em (LEE, 2012), é analisada uma subfamília de árvores e o seu comportamento quando é adicionado um vértice de grau um. Em [ALBUQUERQUE, 2012] são analisados grafos em geral para os quais a conectividade algébrica não muda antes e depois de inserir um único vértice de grau um ( $a(G) - a(G - v) = 0$ ).

Neste trabalho estudaremos uma subclasse das árvores definidas por Fiedler como árvores de Tipo II. Em 1975 Fiedler classificou as árvores em dois Tipos: I e II. Essa classificação é baseada nos componentes de qualquer vetor associado com a conectividade algébrica da árvore. Existem famílias de árvores de Tipo I (classe complementar das árvores de Tipo II) para as quais acrescentar um vértice de grau um não altera o valor da conectividade algébrica ( $a(T+v) - a(T) = 0$ ) [LEE, 2012]. Consideramos aqui todas as árvores de Tipo II com número de vértices limitado entre 4 e 10, e determinamos via experimentos, um subconjunto dessas árvores as quais não permitem adição de vértice de grau um sem alterar o valor da conectividade algébrica. Esse subconjunto é formado por árvores de Tipo II simétricas com número de vértices limitado. Propomos então a identificação de uma família de árvores de Tipo II, as árvores de Tipo II simétricas e concluímos o trabalho com algumas perguntas ao respeito dessas árvores. As próximas seções estão organizadas da maneira seguinte. Na Seção 2 são apresentados conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho. A Seção 3 introduz os conceitos de árvores de Tipo I e II. Na Seção 4 são estabelecidos os resultados que permitem calcular o valor da conectividade algébrica das árvores de Tipo II utilizando matrizes associadas à matriz laplaciana da árvore. A definição de árvore de Tipo II simétrica é introduzida na Seção 5, assim como algumas propriedades das mesmas. E a Seção 6 descreve os experimentos realizados ao introduzir um único vértice de grau um numa árvore de Tipo II simétrica ao respeito da alteração da conectividade algébrica. Finalmente, são apresentadas as conclusões do trabalho e a bibliografia.

## 2. Conceitos básicos

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples e não direcionado de ordem  $n$ . A **matriz laplaciana** do grafo  $G$  é definida por  $L(G) = D(G) - A(G)$ , onde  $A(G)$  é a matriz de adjacência, e  $D(G)$  é a matriz diagonal dos graus dos vértices. Considerando que, para  $n \geq 2$ , denotamos por  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 = a(G) \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$  os autovalores de  $L(G)$ . Define-se **conectividade algébrica** como o segundo menor autovalor da matriz  $L(G)$ ,  $a(G) = \lambda_2(G)$ . Para todo autovalor  $\lambda$  de matriz  $L(G)$  existe vetor  $x \neq 0$ , chamado autovetor associado a  $\lambda$ , tal que  $L(G)x = \lambda x$ . A matriz  $L(G)$  é simétrica, portanto existem  $n$  autovalores correspondentes (considerando repetição dos mesmos). Além disso, existe uma base ortogonal do espaço  $\mathfrak{R}^n$  formado por autovetores da matriz  $L(G)$ . Os autovetores associados com  $a(G)$  são denominados **vetores de Fiedler**. Denotemos por  $\xi(G)$  o conjunto dos autovetores de  $L(G)$  correspondentes a  $a(G)$ . Em 1975, Fiedler [FIEDLER, 1975] provou que se  $G$  é conexo, então  $a(G) > 0$ . Seja  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  um autovetor em  $\xi(G)$ . Como o vetor com todos os componentes iguais a um denotado e é autovetor de  $L(G)$  associado

ao autovalor  $\lambda_1 = 0$ , então qualquer vetor  $\mathbf{w} \in \xi(G)$  deve ser ortogonal ao vetor  $\mathbf{e}$ . Logo temos  $\mathbf{e}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n w_i = 0$ . Define-se a função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n$ . Os componentes de um vetor de Fiedler  $\mathbf{w} \in \xi(G)$  são chamados de **valores característicos** de  $G$ . O **valor de Perron** de uma matriz  $M$  de dimensão  $n \times n$  é o maior autovalor desta matriz, e será denotado por  $\rho(M)$ . Denotamos por  $J$  uma matriz de dimensão  $n \times n$  cujos componentes são todos iguais a 1.

### 3. Classificação de árvores: Tipo I e II

Uma **árvore** é um grafo acíclico e conexo. Uma **folha** (também denominada vértice pendente) é um vértice de grau um. Uma propriedade importante das árvores com pelo menos dois vértices é que contém pelo menos duas folhas. A **excentricidade de um vértice** num grafo é igual ao valor da maior distância desde esse vértice até qualquer outro vértice do grafo. O **centro de um grafo**  $G$ , denotado por  $Centro(G)$  é o conjunto de vértices de excentricidade mínima. Toda árvore com pelo menos 3 vértices possui centro de cardinalidade igual a 1 ou 2. Estes e outros conceitos em grafos podem ser achados em [SZWARCFITER, 1986].

Restringindo nossa atenção às árvores, devemos introduzir dois conceitos extraídos de [FIEDLER, 1975] e [GRONE & MERRIS, 1987].

**Teorema 3.1** [Teorema 3.14 [FIEDLER, 1975]] *Seja  $T$  uma árvore e  $f(v_i) = y_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , seus valores característicos. Então, dois casos podem ocorrer:*

- Caso I. Todos os valores de  $w_i$  são diferentes de zero. Então  $T$  contém exatamente uma aresta  $(p, q)$  tal que  $w_p > 0$  e  $w_q < 0$ . Os valores característicos dos vértices ao longo de qualquer caminho em  $T$  que inicie em  $p$  e que não contenha  $q$  serão crescentes; os valores característicos dos vértices ao longo de qualquer caminho que inicie em  $q$  e não contenha  $p$  serão decrescentes. Os vértices  $p$  e  $q$  são chamados vértices característicos.*
- Caso II. O conjunto  $N_0 = \{i \in N | w_i = 0\}$  é não vazio. Então o grafo  $T_0$  induzido por  $N_0$  em  $T$  é conexo e há exatamente um vértice  $j \in N_0$  possuindo ao menos um vizinho que não pertence a  $N_0$ . Os valores característicos ao longo de qualquer caminho em  $T$  partindo de  $j$  podem crescer, decrescer ou não variar. O vértice  $j$  é chamado de vértice característico.*

Se supomos que  $T = (V, E)$  é uma árvore e  $f \in \xi(T)$ . Um vértice  $v \in V$  é um **vértice característico** de  $T$  se  $v = j$  na parte II do Teorema 3.1, ou  $v \in \{p, q\}$  dado na parte I do Teorema 3.1.

Em [GRONE & MERRIS, 1987] foi utilizada a classificação dos vértices característicos de uma árvore, para denominar dois tipos de árvores específicos. Essa definição é apresentada a seguir.

**Definição 3.2** [Definição 1 [GRONE & MERRIS, 1987]] *Seja  $T$  uma árvore. Denotamos por  $F(T)$  o conjunto de vértices característicos de  $T$ . Se  $|F(T)| = 1$ , então  $T$  é uma **árvore de Tipo I**. Por outro lado, se  $|F(T)| = 2$  então  $T$  é uma **árvore de Tipo II**.*

No apêndice do livro de [CVETKOVIC et al., 1980] são exibidas 200 árvores com número de vértices  $2 \leq n \leq 10$ . Observamos que existem 44 das 200 árvores não isomorfas com número de vértices  $2 \leq n \leq 10$  que são de Tipo I. Dessas 44 árvores de Tipo I, existem uma única árvore com  $n = 3$ , uma única árvore com  $n = 4$ , duas árvores com  $n = 5$ , duas árvores com  $n = 6$ , seis árvores com  $n = 7$ , cinco árvores com  $n = 8$ , 12 árvores com  $n = 9$  e quinze árvores com  $n = 10$ . As restantes 156 árvores com  $2 \leq n \leq 10$  são de Tipo II.

#### 4. Conectividade algébrica das árvores de Tipo II

O artigo [KIRKLAND et al., 1996] traz um estudo bem detalhado das árvores de Tipo I e II, e associa a conectividade algébrica de árvores com o valor de Perron de uma matriz obtida a partir da matriz laplaciana.

Dada uma árvore  $T$  e um vértice  $v$  de  $T$ , um **ramo de  $T$  em  $v$**  é qualquer um dos componentes conexos de  $T - v$ .

**Proposição 4.1** [Proposição 1 [KIRKLAND et al., 1996]] *Seja  $T$  uma árvore, e  $L_v$  a submatriz principal da matriz laplaciana  $L(T)$ , obtida eliminando a linha e a coluna correspondente ao vértice  $v$ . A entrada  $(L_v^{-1})_{p,q}$  é igual ao número de arestas de  $T$  que estão em ambos os caminhos, do vértice  $p$  até o  $v$ , como do vértice  $q$  até o vértice  $v$ .*

Como em qualquer árvore existe um único caminho entre qualquer par de vértices, o elemento  $(L_v^{-1})_{p,q} \geq 0$  é estritamente positivo se e somente se os vértices  $p$  e  $q$  pertencem ao mesmo ramo de  $T$  em  $v$ . Portanto, existe uma permutação das linhas e colunas da matriz  $L_v^{-1}$  que é uma matriz diagonal por blocos, com número de blocos igual ao grau do vértice  $v$ , e cada bloco é uma matriz positiva que corresponde a um único ramo de  $T$  em  $v$ . Denotaremos a cada bloco diagonal por **matriz bottleneck do ramo de  $T$  em  $v$** . Como o raio espectral de uma matriz positiva é um autovalor da mesma, o raio espectral de  $L_v^{-1}$ , denotado por  $\rho(L_v^{-1})$ , é igual ao valor do maior autovalor de algum das matrizes bottleneck dos ramos de  $T$  no vértice  $v$ .

**Teorema 4.2** [Teorema 1, [KIRKLAND et al., 1996]]: *Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices, e com pesos nas arestas, cuja matriz Laplaciana é denotada por  $L(T)$ . Supor que  $i$  e  $j$  são dois vértices adjacentes em  $T$ . Então  $T$  é árvore de Tipo II com vértices característicos  $i$  e  $j$  se, e somente se a seguinte condição for verificada:*

*Existe  $0 < \gamma < 1$  tal que  $\rho(M_1 - \gamma(\frac{1}{\theta})J) = \rho(M_2 - (1 - \gamma)(\frac{1}{\theta})J)$ , onde  $\theta$  é o peso da aresta  $(i, j)$ ,  $M_1$  é a matriz bottleneck para o ramo em  $j$  contendo  $i$  e  $M_2$  é a matriz bottleneck para o ramo em  $i$  contendo  $j$ .*

*Além disso, caso essa condição seja satisfeita, a conectividade algébrica da árvore  $T$ ,  $a(T)$ , verifica  $\frac{1}{a(T)} = \rho(M_1 - \gamma(\frac{1}{\theta})J) = \rho(M_2 - (1 - \gamma)(\frac{1}{\theta})J)$ .*

No caso do nosso trabalho com árvores sem pesos nas arestas,  $\theta = 1$ . Na prova deste último Teorema é descrito o valor do parâmetro  $\gamma$  em função de dois componentes de um vetor de Fiedler associado com a conectividade algébrica da árvore.

#### 5. Árvore de Tipo II simétrica: Definição e Propriedades

Dentre as árvores de Tipo II, podemos destacar um subconjunto de árvores que possuem simetria ao respeito da aresta formada pelos vértices característicos. A seguir introduzimos a definição de árvore de Tipo II simétrica.

**Definição 5.1** *Seja  $T$  uma árvore de Tipo II e  $p, q$  os vértices característicos em  $T$ . Sejam  $B_1$  o ramo de  $T$  em  $p$  que contém  $q$  e  $B_2$  o ramo de  $T$  em  $q$  que contém  $p$ . Se  $B_1$  e  $B_2$  são grafos isomorfos, então  $T$  é uma **árvore de Tipo II simétrica**.*

A árvore 2.38 da Tabela 2 do Apêndice do livro de [CVETKOVIC et al., 1980] verifica a definição de árvore de Tipo II simétrica. A Figura 1 mostra essa árvore, denotada por  $T_{2.38}$  cujos vértices característicos são  $p = 4$  e  $q = 5$ . Outros exemplos de árvores de Tipo II simétricas são:

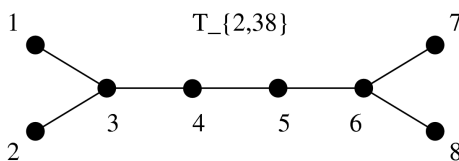


Figura 1:  $T_{2,38}$  Árvore de Tipo II simétrica

- Os caminhos  $P_n$  com  $n$  par.
- As árvores de diâmetro 3,  $T(k, k, 3)$ ,  $n = 2k + 2$  definidas em [GRONE & MERRIS, 1990] e [FALLAT & KIRKLAND 1998].
- Os caterpillars de diâmetro  $d$  ímpar  $C(p)$ ,  $p \in \mathbb{Z}^{d-1}$ ,  $p_j = p_{d-j} \geq 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, \frac{d-1}{2}$  definidos em [ROJO et al, 2010].

**Proposição 5.2** Se  $T = (V(T), E(T))$  uma árvore de Tipo II simétrica, então  $|V(T)|$  é par.

**Prova:** Pela definição de árvore de Tipo II simétrica, com vértices característicos  $p, q$  onde  $B_1$  é o ramo de  $T$  em  $p$  que contém  $q$  e  $B_2$  é o ramo de  $T$  em  $q$  que contém  $p$ , podemos concluir que  $T - p = B_1 \cup B_2 - p$  (ou  $T - q = B_1 - q \cup B_2$ ). Logo  $|V(T)| = |B_1| + |B_2|$ . Além disso, como  $w$  é vetor de Fiedler, deve ser ortogonal ao vetor  $e$  e portanto  $\sum_{i=1}^n w_i = 0$ . Assim temos que  $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i \in V(B_1)} w_i + \sum_{i \in V(B_2)} w_i = 0$  e a Proposição 5.2 é verdadeira.  $\square$

**Proposição 5.3** Se  $T$  uma árvore de Tipo II simétrica com pelo menos 4 vértices e  $p, q$  os vértices característicos, então  $\text{Centro}(T) = \{p, q\}$ .

**Prova:** Por indução no número de vértices da árvore  $T$ . A proposição é válida se  $n = |V(T)| = 4$ . Supor que a proposição vale para árvores com número de vértices menor ou igual que  $n$ , e  $n > 3$ . Seja  $T$  uma árvore de Tipo II simétrica com  $n + 1$  vértices. Seja  $\text{Folhas}(T)$  o conjunto de todas as folhas em  $T$ . Sabemos que  $|\text{Folhas}(T)| \geq 2$ . Sejam  $p, q$  os vértices característicos de  $T$ . E sejam  $B_1, B_2$  os ramos de  $T$  em  $p$  contendo  $q$ , e de  $T$  em  $q$  contendo  $p$ , respectivamente. Como  $T$  é uma árvore de Tipo II simétrica temos que  $B_1$  e  $B_2$  são isomorfos. Ao eliminar todas as folhas de  $T$  em cada um dos ramos, teremos  $B'_1$  e  $B'_2$ . A árvore  $T - \text{Folhas}(T)$  possui  $n' = n - |\text{Folhas}(T)| \leq n - 1$  vértices. Além disso,  $T - \text{Folhas}(T)$  é uma árvore de Tipo II simétrica com vértices característicos  $p$  e  $q$ , pois  $B'_1$  e  $B'_2$  são os ramos de  $T - \text{Folhas}(T)$  em  $p$  contendo  $q$ , e de  $T - \text{Folhas}(T)$  em  $q$  contendo  $p$ , respectivamente. Logo vale a hipótese indutiva, ou seja  $\text{Centro}(T - \text{Folhas}(T)) = \{p, q\}$ . Como  $\text{Centro}(T - \text{Folhas}(T)) = \text{Centro}(T)$ , podemos concluir que a Proposição 5.3 é válida.  $\square$

**Proposição 5.4** Seja  $T$  uma árvore de Tipo II simétrica para a qual  $w$  é um vetor de Fiedler,  $p$  e  $q$  são os vértices característicos da árvore,  $B_1$  é o ramo de  $T$  em  $p$  que contém  $q$  e  $B_2$  o ramo de  $T$  em  $q$  que contém  $p$ . Então  $\sum_{i \in V(B_1)} w_i = -\sum_{i \in V(B_2)} w_i$ .

A prova da Proposição 5.4 é imediata da definição de árvore de Tipo II simétrica. Ilustramos o resultado da Proposição 5.4 com a árvore  $T_{2,38}$ . Como  $w = (0, 42674; 0, 42674; 0, 34720; 0, 12340; -0, 12340, -0, 34720; -0, 42674; -0, 42674)$ , temos  $\sum_{i \in V(B_1)} w_i = 0, 42674 + 0, 42674 + 0, 34720 = -\sum_{i \in V(B_2)} w_i = -0, 34720 - 0, 42674 - 0, 42674$ .

**Proposição 5.5** Seja  $T$  uma árvore de Tipo II simétrica para a qual  $w$  é um vetor de Fiedler,  $p$  e  $q$  são os vértices característicos da árvore,  $M_1$  e  $M_2$  são a matriz bottleneck do ramo de  $T$  em  $p$  contendo  $q$  e a matriz bottleneck do ramo de  $T$  em  $q$  contendo  $p$ , respectivamente. Seja  $w = \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  após uma reordenação dos vértices da árvore segundo os ramos  $B_1$  e  $B_2$ . Se  $\alpha$  igual à primeira entrada do vetor  $v_2$  e  $\beta$  é igual a última entrada do vetor  $-v_1$ . Então  $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{2}$ .

A prova da Proposição 5.5 é imediata da definição de árvore de Tipo II simétrica. Ilustramos o resultado da Proposição 5.5 com a árvore  $T_{2,38}$  cuja laplaciana é dada por:

$$L(T_{2,38}) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Neste caso temos  $a(T_{2,38}) = 0,18639$  e o vetor de Fiedler  $w = (0,42674; 0,42674; 0,34720; 0,12340; -0,12340, -0,34720; -0,42674; -0,42674)$ . Portanto, os vértices  $p = 4$  e  $q = 5$  são vértices característicos de  $T_{2,38}$  e  $T_{2,38}$  é uma árvore de Tipo II.

As matrizes *bottleneck* correspondentes para cada um dos dois ramos são  $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

e  $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ . Reordenando os componentes do vetor de Fiedler  $w$  segundo os a

numeração dos vértices dada na Figura 1, temos  $\begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ , onde  $-v_1 = \begin{bmatrix} 0,42674 \\ 0,42674 \\ 0,34720 \\ 0,12340 \end{bmatrix}$  e  $v_2 =$

$\begin{bmatrix} 0,12340 \\ 0,34720 \\ 0,42674 \\ 0,42674 \end{bmatrix}$ . Seja  $\alpha = 0,12340$  a primeira entrada do vetor  $v_2$ ,  $\beta = 0,12340$  a última entrada do vetor  $v_1$  e  $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 0,5$ . Então:

$$\rho(M_1 - \gamma ee^T) = \rho(M_2 - (1 - \gamma)ee^T)$$

$$\rho(M_1 - 0,5ee^T) = \rho(M_2 - (1 - 0,5)ee^T)$$

$$5,36499 = 5,36499.$$

Como temos  $\frac{1}{a(T)} = \rho(M_1 - \gamma ee^T)$ , podemos concluir que  $a(T) = 0,18639$ . Logo,  $T_{2,38}$  verifica a Propriedade 4. Observamos que o comportamento de  $-v_1$  e  $v_2$  é semelhante para todas as árvores de Tipo II simétricas, obtendo  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

A partir das definições e propriedades anteriores propomos a seguinte pergunta: “A recíproca da Proposição 2 é verdadeira?”

Ou seja, é verdade que toda árvore de Tipo II com vetor de Fiedler  $w$  tal que  $\sum_{i \in V(B_1)} w_i = -\sum_{i \in V(B_2)} w_i$  é uma árvore de Tipo II simétrica?

A árvore de Tipo II mostrada na Figura 2 com  $n = 20$  vértices possui vértices característicos  $p$  e  $q$ . Os ramos  $B_1$  e  $B_2$  não são isomorfos (os componentes do vetor de Fiedler  $w$  coloridos em azul e vermelho mostram os vértices em cada ramo). Os valores  $\sum_{i \in V(B_1)} w_i = -2,06995$  e  $-\sum_{B_2} w_i = 2,06998$  coincidem até a quarta casa decimal.

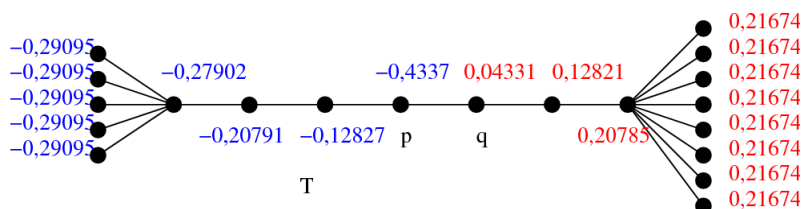


Figura 2:  $T$  Árvore de Tipo II não simétrica

A árvore da Figura 2 nos induz a pensar que pode existir uma árvore de Tipo II não simétrica para a qual  $\sum_{i \in V(B_1)} w_i = -\sum_{B_2} w_i$ . Propomos então a seguinte definição, para enunciar uma conjectura.

**Definição 5.6** *Seja  $T$  uma árvore de Tipo II,  $w$  um vetor de Fiedler e  $p$  e  $q$  os vértices característicos em  $T$ . Sejam  $B_1$  o ramo de  $T$  em  $p$  que contém  $q$  e  $B_2$  o ramo de  $T$  em  $q$  que contém  $p$ . Se  $\sum_{i \in V(B_1)} w_i = -\sum_{i \in V(B_2)} w_i$ , então  $T$  é uma **árvore de Tipo II algebricamente simétrica**.*

**Conjectura 1** *As definições 5.1 e 5.6 não são equivalentes.*

## 6. Experimentos com árvores de Tipo II simétricas com até 10 vértices

A Tabela 1 a seguir, contém todas as árvores de Tipo II simétricas com número de vértices entre 4 e 10, com os respectivos valores de conectividade algébrica e Tipo. A notação para cada árvore foi definida segundo a Tabela 2 do Apêndice do livro de [CVETKOVIC et al., 1980].

Para investigar o que acontece com o valor da conectividade algébrica quando um vértice de grau um é inserido numa árvore de Tipo II simétrica, realizamos o experimento a seguir. Consideramos todas as árvores da Tabela 1 e inserimos um vértice de grau um em cada uma das posições que determinaram árvores não isomorfas. Todos os valores calculados para cada árvore são exibidos no Apêndice, nas Tabelas 2 e 3 (onde incluímos  $T$ ,  $a(T)$ , vetor de Fiedler  $w$  e o Tipo de cada árvore considerada). O software NewGraph [STEVANOVICH, 2003] foi utilizado para calcular  $a(T)$  e  $w$ . Por exemplo, para a árvore 2.4 formada por 4 vértices é possível inserir um único vértice de grau um em duas posições exatamente (árvores 2.4 I e 2.4 II na Tabela 2).

Em todos os casos analisados, o valor da conectividade algébrica após a inserção de um vértice de grau um, muda. Em particular, observamos que em todas as árvores analisadas que correspondem a um caminho com número par de vértices, ao inserir um vértice de grau um de maneira que a árvore resultante seja um caminho com número ímpar de vértices, muda o tipo de árvore e também o valor da conectividade algébrica. A partir dos experimentos realizados com árvores entre 4 e 10 vértices, propomos a seguinte conjectura:

Tabela 1: Árvores de Tipo II simétricas com  $4 \leq n \leq 10$

$T$	$n$	$a(T)$	Tipo
2.4	4	0,58579	2
2.10	6	0,43485	2
2.13	6	0,26795	2
2.28	8	0,35425	2
2.38	8	0,18639	2
2.42	8	0,25088	2
2.47	8	0,15224	2
2.101	10	0,29844	2
2.123	10	0,14423	2
2.130	10	0,23305	2
2.149	10	0,17918	2
2.176	10	0,10878	2
2.184	10	0,12772	2
2.186	10	0,14867	2
2.192	10	0,20871	2
2.200	10	0,09789	2

**Conjectura 2** Seja  $T = (V(T), E(T))$  uma árvore de Tipo II simétrica. Seja  $v \notin V(T)$  um vértice de grau um em  $T + v = (V(T) \cup \{v\}, E(T + v))$ . Se  $T + v$  é uma árvore de Tipo II, então  $a(T + v) \neq a(T)$ .

## 7. Conclusão e Trabalhos futuros

A contribuição principal deste trabalho foi introduzir a definição de uma família das árvores de Tipo II definidas por Fiedler em 1975, denominadas de árvore de Tipo II simétricas. Algumas propriedades destas árvores foram mostradas. Foram realizados experimentos com estas árvores inserindo um único vértice de grau um, com o objetivo de analisar o comportamento da conectividade algébrica antes e depois da inserção. Os experimentos consideram árvores de Tipo II simétricas com número de vértices limitado ( $4 \leq n \leq 10$ ). Duas conjecturas foram propostas. Uma delas considerando as definições de árvores de Tipo II simétricas e árvores de Tipo II algébricamente simétricas. A segunda conjectura considera a inserção de um único vértice de grau um em árvores de Tipo II simétricas. Propomos continuar o trabalho tanto na parte experimental quanto na parte teórica com o intuito de responder se as conjecturas propostas são válidas.

## 8. Agradecimentos

Os autores agradecem às agências de fomento, CNPq (305516/2010-8), Programa CAPES-Demanda Social e Projeto Institucional PIBITI-CNPq.

## Referências

- ABREU, N.M.M.** *Old and new results on algebraic connectivity of graphs* Linear Algebra and its Applications, 423: 53-73. 2007.
- ALBUQUERQUE, M.B.de** *Perturbações em grafos e seus efeitos sobre a conectividade algébrica* Dissertação de mestrado, CEFET/RJ, Programa de Pós-graduação em Tecnologia, 2012.
- CVETKOVIC, DOOB, SACHS** Spectra of Graphs: Theory and Applications. Academic Press. 1980.
- FALLAT, KIRKLAND** *Extremizing algebraic connectivity subject to graph theoretic constraints.* Electronic Journal of Linear Algebra, 3:48-74. 1998.



**FIEDLER, M.** *A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory.* Czechoslovak Mathematical Journal, 25(4):619-633. 1975.

**GRONE, R., MERRIS, R.** *Characteristic vertices of trees.* Linear and Multilinear Algebra, 22:115-131. 1987.

**GRONE, R., MERRIS, R.** *Ordering trees by algebraic connectivity.* Graphs and Combinatorics, 6:229-237. 1990.

**KIRKLAND, S., NEUMANN, M. e SHADER, B. L.** *Characteristic vertices of wheighted trees via perron values.* Linear and Multilinear Algebra, 40:311-325. 1996.

**LEE, L.** *Novos resultados sobre conectividade de árvores* Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ Programa de Engenharia de Produção 2012.

**ROJO, O., MEDINA, L., ABREU, N.M.M, JUSTEL, C.** *Extremal algebraic connectivities of certain caterpillar classes and symmetric caterpillars.* Electronic Journal of Linear Algebra 20:136-157. 2010

**STEVANOVICH, D., BRANKOV, V., CVETKOVIC, D., SIMIC, S.** *NewGraph* www.mi.sanu.ac.rs/newgraph/

**SZWARCFITER, J.L.** *Grafos e algoritmos computacionais.* Rio de Janeiro: Campus, 2ed. 1986.

### A. Apêndices

Tabela 2: Valores de conectividade algébrica para a árvores obtidas de árvore de Tipo II simétrica pela inserção de um único vértice de grau um.

$T$	$n$	$a(T)$	$w$	Tipo
2.4	4	0,58579	0,65328; 0,27060; -0,27060; -0,65328	2
2.4 I	5	0,38197	0,37175; 0,00000; -0,37175; -0,60150; 0,60150	1
2.4 II	5	0,51881	-0,41932; -0,20177; 0,33800; 0,70242; -0,41932	2
2.10	6	0,43485	-0,46471; -0,46471; -0,26096; 0,26096; 0,46471; 0,46471	2
2.10 I	7	0,32172	-0,39687; -0,11934; -0,08095; 0,29941; 0,44142; 0,44142; -0,58511	2
2.10 II	7	0,39832	0,35604; 0,35604; 0,21422; -0,29656; -0,49289; -0,49289; 0,35604	2
2.13	6	0,26795	-0,55768; -0,40825; -0,14943; 0,14943; 0,40825; 0,55768	2
2.13 I	7	0,19806	0,41791; 0,23192; 0,00000; -0,23192; -0,41791; -0,52112; 0,52112	1
2.13 II	7	0,22538	0,41368; 0,32045; 0,06176; -0,21085; -0,43594; -0,56278; 0,41368	2
2.13 III	7	0,26032	0,49433; 0,36565; 0,14177; -0,16890; -0,43561; -0,58891; 0,19167	2
2.28	8	0,35425	-0,38253; -0,38253; -0,38253; -0,24702; 0,24702; 0,38253; 0,38253; 0,38253	2
2.28 I	9	0,28247	-0,38382; -0,17324; -0,17324; -0,12430; 0,26820; 0,37378; 0,37378; 0,37378; -0,53492	2
2.28 II	9	0,32718	-0,31557; -0,31557; -0,31557; -0,21233; 0,27014; 0,40150; 0,40150; 0,40150; -0,31557	2
2.38	8	0,18639	0,42674; 0,42674; 0,34720; 0,12340; -0,12340; -0,34720; -0,42674; -0,42674	2
2.38 I	9	0,15381	0,37096; 0,29127; 0,24647; 0,03927; -0,17397; -0,36045; -0,42597; -0,42597; 0,43839	2
2.38 II	9	0,16492	-0,34836; -0,34836; -0,29090; -0,07057; 0,16140; 0,36676; 0,43919; 0,43919; -0,34836	2
2.38 III	9	0,18304	0,39704; 0,39704; 0,32436; 0,11964; -0,13379; -0,36273; -0,44400; -0,44400; 0,14644	2
2.42	8	0,25088	0,52285; 0,39167; 0,21657; 0,16224; -0,16224; -0,21657; -0,39167; -0,52285	2
2.42 I	9	0,18623	0,43810; 0,25626; 0,03279; 0,02668; -0,21396; -0,26293; -0,36580; -0,44951; 0,53836	2
2.42 II	9	0,21179	-0,42090; -0,33176; -0,10558; -0,08322; 0,20531; 0,26048; 0,39519; 0,50137; -0,42090	2
2.42 III	9	0,2427	0,46411; 0,35147; 0,20273; 0,15352; -0,18008; -0,23780; -0,41227; -0,54440; 0,20273	2
2.42 IV	9	0,23107	0,36080; 0,27743; 0,27743; 0,12995; -0,19502; -0,25362; -0,41633; -0,54143; 0,36080	2
2.47	8	0,15224	0,49039; 0,41573; 0,27779; 0,09755; -0,09755; -0,27779; -0,41573; -0,49039	2
2.47 I	9	0,12601	0,40825; 0,30301; 0,16123; 0,00000; -0,16123; -0,30301; -0,40825; -0,46424; 0,46424	1
2.47 II	9	0,12888	-0,39567; -0,34468; -0,19827; -0,02632; 0,14903; 0,30518; 0,42199; 0,48442; -0,39567	2
2.47 II	9	0,14402	-0,41428; -0,35611; -0,24793; -0,06444; 0,12810; 0,30266; 0,43471; 0,50572; -0,28843	2
2.47 IV	9	0,15057	0,46403; 0,39416; 0,26494; 0,09583; -0,10470; -0,28946; -0,43064; -0,50697; 0,11282	2

Tabela 3: Valores de conectividade algébrica para a árvores obtidas de árvore de Tipo II simétrica pela inserção de um único vértice de grau um.(CONTINUAÇÃO)

$T$	$n$	$a(T)$	$w$	Tipo
2.101	10	0,29844	,33362; ,33362; ,33362; ,33362; ,23406; -,23406; -,33362; -,33362; -,33362; -,33362	2
2.101 I	11	0,2514	,35835; ,19759; ,19759; ,19759; ,14792; -,24872; -,33225; -,33225; -,33225; -,33225; ,47869	2
2.101 II	11	0,27881	-,28680; -,28680; -,28680; -,28680; -,20683; ,25064; ,34754; ,34754; ,34754; ,34754; -,28680	2
2.123	10	0,14423	,36169; ,36169; ,36169; ,30952; ,10838; -,10838; -,30952; -,36169; -,36169; -,36169	2
2.123 I	11	0,1254	-,33257; -,27805; -,27805; -,24319; -,05357; ,14276; ,32120; ,36725; ,36725; ,36725; -,38026	2
2.123 II	11	0,13097	,30926; ,30926; ,30926; ,26876; ,07154; -,13505; -,32395; -,37278; -,37278; -,37278; ,30926	2
2.123 III	11	0,1423	-,34336; -,34336; -,34336; -,29450; -,10600; ,11516; ,31994; ,37302; ,37302; ,37302; -,12359	2
2.130	10	0,23304	,48299; ,37044; ,17156; ,22368; ,22368; -,17156; -,22368; -,22368; -,37044; -,48299	2
2.130 I	11	0,17638	-,44363; -,27038; -,04944; -,06002; -,06002; ,20140; ,24453; ,24453; ,33045; ,40122; -,53863	2
2.130 II	11	0,19894	,41521; ,33261; ,10124; ,12638; ,12638; -,20055; -,25035; -,25035; -,36284; -,45294; ,41521	2
2.130 III	11	0,22478	,43018; ,33348; ,16182; ,20875; ,20875; -,18698; -,24119; -,24119; -,38532; -,4970; ,20875	2
2.130 IV	11	0,21477	-,35036; -,27511; -,14078; -,27511; -,17929; ,19662; ,25040; ,25040; ,38424; ,48934; -,35036	2
2.149	10	0,17918	-,41374; -,41374; -,33961; -,15898; -,13049; ,13049; ,15898; ,33961; ,41374; ,41374	2
2.149 I	11	0,14819	-,37920; -,30175; -,25703; -,06112; -,05206; ,16968; ,19920; ,33676; ,39534; ,39534; -,44517	2
2.149 II	11	0,15878	,35151; ,35151; ,29569; ,09666; ,08131; -,16133; -,19179; -,34791; -,41358; -,41358; ,35151	2
2.149 III	11	0,17562	-,38493; -,38493; -,31733; -,15333; -,12640; ,14058; ,17053; ,35293; ,42811; ,42811; -,15333	2
2.149 IV	11	0,17252	,35380; ,35380; ,29277; ,19416; ,12018; -,14711; -,17778; -,35835; -,43306; -,43306; ,23464	2
2.176	10	0,10878	,39736; ,39736; ,35414; ,22916; ,07926; -,07926; -,22916; -,35414; -,39736; -,39736	2
2.176 I	10	0,9299	-,35346; -,31351; -,28435; -,15965; -,02011; ,12131; ,25144; ,35820; ,39492; ,39492; -,38970	2
2.176 II	10	0,09653	,33808; ,33808; ,30548; ,17822; ,03377; -,11394; -,25065; -,36320; ,40196; ,40196; ,33808	2
2.176 III	10	0,10302	-,35419; -,35419; -,31770; -,21199; -,06010; ,09798; ,24597; ,36862; ,41096; ,41096; -,23634	2
2.176 IV	10	0,10802	-,38327; -,38327; -,34187; -,22213; -,07840; ,08329; ,23599; ,36319; ,40718; ,40718; -,08790	2
2.184	10	0,12772	-,42740; -,37281; -,31023; -,27060; -,09421; ,09421; ,27060; ,31023; ,37281; ,42740	2
2.184 I	10	0,10585	,38466; ,29840; ,20194; ,18056; ,02223; -,13846; -,28449; -,31817; -,36673; -,41014; ,43020	2
2.184 II	10	0,11125	-,36651; -,32573; -,23398; -,20795; -,04100; ,13051; ,28750; ,32349; ,37652; ,42365; -,36651	2
2.184 III	10	0,11482	-,33805; -,29923; -,29923; -,22606; -,05375; ,12473; ,28889; ,32636; ,38240; ,43200; -,33805	2
2.184 IV	10	0,11849	,36884; ,32513; ,27555; ,24290; ,06659; -,11762; -,28789; -,32658; -,38534; -,43714; ,27555	2
2.184 V	10	0,12645	-,40832; -,35669; -,29758; -,25995; -,09271; ,09967; ,27945; ,31990; ,38344; ,43894; -,10614	2
2.186	10	0,14867	,48036; ,40895; ,27674; ,12144; ,10339; -,10339; -,12144; -,27674; -,40895; -,48036	2
2.186 I	11	0,11723	-,42329; -,31746; -,17441; -,01236; -,01091; ,15531; ,17594; ,28270; ,37695; ,42701; -,47950	2
2.186 II	11	0,12555	-,40654; -,35550; -,20879; -,04101; -,03586; ,14671; ,16778; ,28981; ,39652; ,45345; -,40654	2
2.186 III	11	0,13698	-,41640; -,35936; -,25310; -,08342; -,07200; ,13040; ,15109; ,29423; ,41776; ,48407; -,29327	2
2.186 IV	11	0,14561	-,43327; -,37018; -,25319; -,14524; -,09934; ,11488; ,13445; ,29279; ,42807; ,50103; -,16999	2
2.186 V	11	0,14684	,45423; ,38753; ,26392; ,11904; ,10156; -,11068; -,12973; -,28761; -,42232; -,49500; ,11904	2
2.192	10	0,20871	-,38200; -,30227; -,38200; -,30227; -,15945; ,15945; ,30227; ,38200; ,30227; ,38200	2
2.192 I	11	0,16835	,42291; ,26611; ,12326; ,10251; ,06450; -,18597; -,29555; -,35538; -,29555; -,35538; ,50852	2
2.192 II	11	0,1856	-,37484; -,30528; -,22920; -,18666; -,10948; ,18382; ,31341; ,38483; ,31341; ,38483; -,37484	2
2.192 III	11	0,20246	-,34894; -,27830; -,34894; -,27830; -,15130; ,17172; ,31585; ,39603; ,31585; ,39603; -,18971	2
2.200	10	0,09789	-,44171; -,39847; -,31623; -,20303; -,06996; ,06996; ,20303; ,31623; ,39847; ,44171	2
2.200 I	11	0,08101	,38787; ,32225; ,23053; ,12013; ,00000; -,12013; -,23053; -,32225; -,38787; -,42206; ,42206	1
2.200 II	11	0,08418	,37555; ,34394; ,25176; ,13839; ,01338; -,11276; -,22941; -,32675; -,39659; -,43304; ,37555	2
2.200 III	11	0,08874	,37876; ,34515; ,28091; ,16438; ,03326; -,10080; -,22593; -,33100; -,40670; -,44630; ,30826	2
2.200 IV	11	0,09377	,39791; ,36060; ,28948; ,19121; ,05523; -,08593; -,21903; -,33160; -,41307; -,45581; ,21100	2
2.200 V	11	0,09736	-,42782; -,38616; -,30691; -,19778; -,06939; ,07324; ,20874; ,32391; ,40755; ,45151; -,07688	2