

## Problema de redes de transporte multimodal: uma abordagem utilizando a teoria dos conjuntos *fuzzy*

### Juliana Verga Shirabayashi

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Universidade Estadual de Campinas  
Av. Albert Einstein, 400 - Caixa Postal 6101 - CEP:13083-852 - Campinas - SP - Brasil  
Depto de Engenharia Agrícola - Universidade Estadual de Maringá  
Rodovia PR 482, Km 45, Cidade Gaúcha - PR - Brasil  
juverga@dt.fee.unicamp.br, jvshirabayashi@uem.br

### Akebo Yamakami

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Universidade Estadual de Campinas  
Av. Albert Einstein, 400 - Caixa Postal 6101 - CEP:13083-852 - Campinas - SP - Brasil  
akebo@dt.fee.unicamp.br

### Ricardo Coelho Silva

Instituto de Ciência e Tecnologia - Universidade Federal de São Paulo  
Rua Talim, 330, - CEP:12231-280 - São José dos Campos- SP - Brasil  
ricardo.coelho@unifesp.br

### Wesley Vagner Inês Shirabayashi

Depto de Matemática - Universidade Estadual de Maringá  
Av. Colombo, 5790, cep 87020-900, Jd. Universitário - Maringá - PR - Brasil  
wvshirabayashi@uem.br

### RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal no qual os custos dos arcos são números *fuzzy* dependentes do fluxo. O problema foi modelado através de grafos, onde cada modo de transporte considerado é representado por um subgrafo e o grafo total é a união de todos os subgrafos. O problema foi formulado como um problema de programação não linear e o objetivo é desenvolver um algoritmo que apresente um conjunto de soluções Pareto ótimas trabalhando com o problema na forma *fuzzy*, durante todo procedimento de resolução.

**PALAVRAS-CHAVE.** Transporte Multimodal *Fuzzy*. Programação Matemática *Fuzzy*. Grafos.

### ABSTRACT

This work presents an approach to solve multimodal transport network problems with uncertain costs and dependents on the flow in the edges. In this work, the modelling of this problem is based on graph theory are presented, where each transport mode is represented by a subgraph and the whole graph is the union of all subgraphs. Besides, its mathematical formulation describes nonlinear conditions and the goal is to develop an algorithm that reaches a set of Pareto solutions dealing with the problem in fuzzy form during all solution procedure.

**KEYWORDS.** Fuzzy Multimodal Transport. Fuzzy Mathematical Programming. Graphs.

## 1 Introdução

Um dos fatores que afetam a qualidade de vida em uma área metropolitana é o sistema de transporte local. Redes de transporte urbanas são cada vez mais caracterizadas por congestionamentos e seus impactos correspondentes na acessibilidade individual, na poluição do ar e no desenvolvimento de atividades econômicas urbanas (Lozano, 2001). Um fato que ocorre na maioria das cidades é que o local de trabalho das pessoas, muitas vezes, é longe de sua casa, o que faz com que utilizem mais de um meio de transporte para se deslocar de sua residência até o local de trabalho.

Redes de transporte podem ser consideradas multimodais pois geralmente contêm vários modos de transportes, tais como: ônibus, metrô, trem, dentre outros. Dessa forma, os usuários podem utilizar vários modos de transportes em uma viagem e geralmente não estão dispostos a trocar muitas vezes de meio de transporte. Vários parâmetros são considerados pelos usuários ao usar diferentes meios de transporte, como por exemplo: o número de mudanças de modo, o percurso da viagem, tempo de percurso, que devem ser os mais curtos possíveis (Lozano, 2001). Isto nos leva ao problema de caminho mínimo, para o qual existem diversos algoritmos. Porém, considerando uma rede multimodal e seus parâmetros associados, tais algoritmos se tornam insuficientes para orientar os usuários corretamente. Várias extensões tem sido propostas para suprir tais deficiências (Bieli (2006), Miller (1995)).

Quanto a formulação, a teoria de grafos é comumente usada neste caso. Ela fornece uma modelagem consistente do problema de redes de transporte multimodal e de muitos outros problemas, facilitando a implementação de algoritmos que auxiliam na obtenção da sua solução (Ahuja, 1993).

O problema de redes de transporte multimodal pode ser resolvido através de algoritmos clássicos de otimização, fluxo em redes e caminho mínimo. No entanto metaheurísticas também tem sido utilizadas amplamente na solução de problemas de redes de transporte. A teoria dos conjuntos *fuzzy* também tem se mostrado promissora na solução de problemas de caminho mínimo, alocação de veículos, problemas de transporte em ambiente com incertezas, embora as pesquisas envolvendo tal teoria sejam relativamente recentes.

O objetivo deste trabalho é tratar o problema de redes de transporte multimodal considerando incertezas nos custos, isto é, os custos dos arcos são números *fuzzy*. A modelagem do problema é feita utilizando a teoria de grafos e o método de resolução do problema é baseado em algoritmos de caminhos mínimos *fuzzy* e carregamento incremental de fluxo.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos uma breve revisão bibliográfica; na Seção 3 apresentamos a formulação matemática do problema; na Seção 4 apresentamos a metodologia de solução; na Seção 5 apresentamos os testes computacionais, e por fim, na Seção 6 apresentamos as conclusões e trabalhos futuros.

## 2 Breve Revisão Bibliográfica

O problema de redes de transporte multimodal tem sido estudado por vários autores que propõem diferentes abordagens, geralmente baseadas no conceito de teoria de grafos: grafos hierárquicos (Bieli (2006), Xin-Bo (2009)), hipergrafos (Lozano, 2002), dentre outros.

Abordagens utilizando métodos clássicos são muito utilizadas na solução de problemas de redes de transporte, como por exemplo, variantes de algoritmos clássicos, como o algoritmo de Dijkstra (Dijkstra, 1959), algoritmo de Floyd (Ahuja, 1993), algoritmos de  $k$ -caminhos mínimos (Ahuja, 1993), dentre outros.

Modesti & Sciomachen (1998) apresentam uma abordagem baseada no problema de caminho mínimo clássico para encontrar caminhos mínimos multiobjetivo em redes de transporte multimodal com objetivo de minimizar o custo total de viagem e o desconforto dos usuários associados com os caminhos utilizados.

Alguns autores (Bieli (2006), Lozano (2001)) focam na minimização do custo total de viagem levando em conta a sequência dos modos de transporte usados, de forma que o conjunto solução

apresenta os chamados caminhos viáveis. Um caminho é viável se sua sequência de modos é factível com respeito a um conjunto de restrições. Lozano & Storchi (2002) estendem seu algoritmo para obter hipercaminhos viáveis.

A utilização do sistema de informações geográficas (GIS) é frequentemente encontrada em trabalhos que buscam soluções para o problema de caminho mínimo em redes de transporte (Bieli (2006), Miller (1995), Mouncif (2006)).

Outras abordagens usam heurísticas, algoritmos evolutivos e redes neurais artificiais (RNAs) para tratar o problema de redes de transporte multimodal. Abbaspour & Samadzadegan (2010) propõem um algoritmo evolutivo onde os cromossomos tem tamanhos variáveis para resolver o problema de caminho mínimo multimodal dependente de tempo. Qu & Chen (2008) usa um método híbrido de tomada de decisão multicritério combinando processo hierárquico analítico *fuzzy* (AHP) e redes neurais artificiais (RNAs). Esta abordagem é usada para encontrar o melhor caminho de determinada origem a determinado destino.

Heid et al (2010) apresentam uma abordagem híbrida para resolver o problema de transporte multimodal dependente de tempo. A abordagem proposta é baseado no algoritmo de Dijkstra e Otimização por colônia de formigas.

Yu & Lu (2011) propõem um algoritmo genético para resolver o problema de planejamento de rotas multimodais. Um método de avaliação multicritério usando um vetor  $p$ -dimensional para representar múltiplos critérios é adotado na função *fitness* para seleção de soluções ótimas.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* também tem sido utilizada na modelagem e solução de problemas de redes de transporte multimodal. Golnarkar et al (2010) propõem uma solução para o problema de caminho ótimo em redes de transporte multimodal no qual os custos dos arcos são números discretos *fuzzy*. O algoritmo proposto é baseado no algoritmo clássico de  $k$ -caminhos mínimos *fuzzy*.

Ramazani et al (2011) apresentam um algoritmo para o problema de atribuição de tráfego o qual assumem que a percepção do motorista em relação ao tempo de viagem afeta a escolha de rotas. A teoria dos conjuntos *fuzzy* é usada para definir o tempo de viagem “percebido” pelos usuários. Um equilíbrio *fuzzy* é sugerido para predição de fluxo em redes. Também, um algoritmo de atribuição de tráfego incremental *fuzzy* (FITA) é desenvolvido. Em um outro trabalho de Ramazani (2010), é proposto um método para resolver o problema de caminho mínimo em processos de escolha de rotas quando cada tempo de viagem nos arcos é um número *fuzzy*, chamado tempo de viagem percebido (PTT). O algoritmo resolve o problema de caminho mínimo *fuzzy* (FSPA) para motoristas na presença de incerteza sobre o tempo de viagem durante a rota. Para redes congestionadas, o método é capaz de encontrar os caminhos mínimos em termos do tempo de viagem percebido e grau de saturação (congestionamento) ao longo das rotas.

No trabalho de Ghatee & Hashemi (2008), o problema de fluxo de custo mínimo *fuzzy* (PFCM) é estudado. As incertezas podem estar na oferta ou demanda dos nós e também no custo ou na capacidade dos arcos da rede. No caso da oferta/demanda essas incertezas podem surgir devido a dados estatísticos incompletos ou simulações. Os autores apresentam três modelos: PFCM com custos *fuzzy*, PFCM com oferta/demanda *fuzzy* e uma combinação dos dois casos. Para o último modelo, os autores apresentam um método exato e métodos heurísticos. Por fim, é feita uma aplicação dos modelos desenvolvidos no problema de planejamento de redes de ônibus.

O trabalho de Brito et al (2010) lida com o problema de roteamento de veículos onde o tempo de viagem é *fuzzy*. O problema de roteamento de veículos com custos *fuzzy* na função objetivo e o problema de roteamento de veículos com janela de tempo e restrições *fuzzy* são formulados. Algoritmos híbridos heurísticos para resolver estes problemas são apresentados e analisados.

Os trabalhos citados acima, em sua grande maioria, lidam com o problema de caminho mínimo clássico em redes de transporte usando diferentes abordagens para encontrá-lo. Alguns trabalhos, lidam com o problema de caminhos mínimos *fuzzy* e com a distribuição de fluxo na rede. Neste trabalho lidamos com o problema de redes de transporte multimodal considerando

incertezas nos custos, isto é, os custos dos arcos são números *fuzzy*, e lidamos também com a distribuição de fluxo na rede. As principais diferenças deste trabalho em relação aos da literatura são: o tratamento de informações incertas, a modelagem do problema e a abordagem utilizada para resolvê-lo.

### 3 Formulação Matemática

Sistemas de transporte urbano geralmente apresentam topologias complexas e restrições, consequentemente modelá-los é uma tarefa difícil (Lozano, 2001).

A modelagem do problema foi feita utilizando subgrafos por modos interligados, ou seja, cada modo de transporte considerado é representado por um subgrafo e há interligações entre os subgrafos. O grafo total é a união de todos os subgrafos.

Neste caso um nó representa um lugar onde o usuário inicia uma viagem ou onde escolhe entre continuar com o modo corrente ou mudar de modo, um arco é uma conexão entre dois nós. Temos dois tipos de arcos nesta modelagem: arcos de transporte e arcos de transferência. Os arcos de transporte conectam dois nós no mesmo modo e os arcos de transferência conectam um modo ao outro.

Seja  $G = (N, A)$  um grafo onde  $N$  é o conjunto de nós e  $A$  é o conjunto de arcos e seja  $M$  o conjunto dos modos de transporte considerados, isto é,  $M = \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_k\}$ . Cada arco é representado por  $(i, j)$  onde  $i, j \in N$ . Aqui  $G$  é representado por:

$$G = G_{M_1} \cup G_{M_2} \cup \dots \cup G_{M_k}$$

onde:  $G_{M_1} = (N_{M_1}, A_{M_1})$ ,  $G_{M_2} = (N_{M_2}, A_{M_2})$ ,  $\dots$ ,  $G_{M_k} = (N_k, A_k)$

A mudança entre um modo e outro é representada por arcos de transferência, que chamaremos de  $T$ . Dai temos que:

$$A = A_{M_1} \cup A_{M_2} \cup \dots \cup A_{M_k} \cup T$$

Vamos considerar que quando o usuário começa a viagem no modo  $M_1$  ou  $M_2$  ele não muda de modo (é o que acontece, em geral, aqui no Brasil). Se  $M_1 =$  carro e  $M_2 =$  moto.

Existem diferentes formas de descrever um problema de redes de transporte multimodal e nesse trabalho foi escolhido o modelo em que o custo nos arcos depende do fluxo nos mesmos. Assim, a formulação desse tipo de problema tem uma função objetivo não-linear. Visto que o tempo de viagem é incerto, podemos formular o problema de redes de transporte multimodal com custos *fuzzy* na função objetivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{w \in W} \sum_{(i,j) \in A} \tilde{t}_{ij}(x_{ij}) x_{ij}^w \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij}^w - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji}^w = b_i^w, \forall i \in N, \forall w \in W \\ \sum_{w \in W} x_{ij}^w \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A, \\ x_{ij} = \sum_{w \in W} x_{ij}^w \\ x_{ij}^w \geq 0, \forall (i,j) \in A, w \in W. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

onde:

- $W$  é o conjunto de todos os pares origem-destino;
- $w$  é um par origem-destino (O-D);
- $x_{ij}^w$  é o fluxo de passageiros no arco  $(i, j)$  para o par  $w$ ;
- $b_i^w$  é a oferta ou demanda do par  $w$ ;

- $\tilde{t}_{ij}(x_{ij})$  é o tempo de viagem *fuzzy* para percorrer o arco  $(i, j)$  dependente do fluxo  $(x_{ij})$  no arco;
- $u_{ij}$  é a capacidade do arco  $(i, j)$ .

Para modelar o tempo de viagem em cada modo, utilizamos a forma *fuzzy* da função custo de viagem B.P.R. (*Bureau of Public Roads*) que foi proposta em 1964 pelo *Bureau of Public Roads*. A forma geral dessa função, considerando o parâmetro  $t_0$  sendo *fuzzy* é:

$$\tilde{t}_{ij}(x_{ij}) = \tilde{t}_0 \left[ 1 + \rho \left( \frac{x_{ij}}{u_{ij}} \right)^\lambda \right]. \quad (2)$$

onde:

- $\tilde{t}_{ij}$  é o tempo de viagem *fuzzy* no arco  $(i, j)$ ;
- $\tilde{t}_0$  é o tempo de viagem *fuzzy* com fluxo livre;
- $u_{ij}$  é a capacidade do arco  $(i, j)$ ;
- $x_{ij}$  é o fluxo no arco  $(i, j)$ ;
- $\rho$  e  $\lambda$  são os parâmetros do modelo, que usualmente são  $\rho = 0.15$  e  $\lambda = 4$ .

Na literatura, existem vários modelos de funções tempo de viagem desenvolvidos para a utilização em planejamento de transportes onde o tempo de viagem é calculado em função do fluxo de tráfego e neste trabalho, optamos por usar a função B.P.R.. Os parâmetros desta função podem variar de acordo com o tipo de estrada e de acordo com a abordagem do problema; no nosso caso consideramos os valores usuais dos parâmetros, por já serem usados com frequência em problemas de redes de transporte e problemas correlatos.

Sem perda de generalidade, os custos (tempos de viagem) são números triangulares *fuzzy*, escritos na forma:  $(m, \alpha, \beta)$  onde  $m$  é o valor modal,  $\alpha$  é o espalhamento à esquerda e  $\beta$  é o espalhamento à direita. Os valores  $(m - \alpha)$  e  $(m + \beta)$  são chamados de limitante inferior e superior, respectivamente.

Quanto às restrições descritas na Equação 1, a primeira restrição garante que o grafo esteja balanceado, ou seja, a quantidade de fluxo que entra no nó menos a quantidade de fluxo que sai do nó é igual a oferta ou demanda do nó para cada par origem-destino considerado; a segunda restrição garante que o fluxo em cada arco não excede sua capacidade, a terceira restrição é relacionada com o fluxo total em cada arco, e por fim, a quarta restrição garante a não negatividade do fluxo.

Neste trabalho não consideramos a frequência das linhas de ônibus e de metrô. O tempo de espera, quando há transferências modais está incluso no custo das mesmas.

## 4 Metodologia de Solução

Uma abordagem pouco encontrada nos trabalhos da literatura relacionados com este problema foi o tratamento de informações incertas. Geralmente, problemas reais têm associados parâmetros que são incertos, tais como: custo e tempo. Ao trabalhar com parâmetros incertos, uma informação deixa de ser representada por um único valor e passa a ser representada por um conjunto. Assim, o uso da teoria dos conjuntos clássica torna-se inviável devido à sua ineficiência no tratamento de informações incertas. No entanto, essas incertezas podem ser estudadas e modeladas de forma mais robusta utilizando a teoria dos conjuntos *fuzzy* (Verga, 2009).

O algoritmo proposto é um algoritmo de carregamento incremental de fluxo. Tal algoritmo foi escolhido por sua simplicidade e eficiência e é uma proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal com incertezas nos custos da função objetivo. A seguir, temos os passos do algoritmo, bem como uma explicação detalhada do mesmo.

- Passo 0 (Inicialização): Determine  $N$  (número de incrementos). Seja  $n$  o número de iterações, então  $n = 1$ .
- Passo 1: Encontrar os caminhos mínimos não-dominados para cada par de nós origem-destino de todos os modos de transporte considerados;
- Passo 2: Ordenar todos os caminhos  $p_k$ :  

$$\mu_{cam} = Poss\{p_k \text{ ser o melhor caminho}\} = \mu_{custo}, \text{ onde:}$$
  - $\mu_{custo} = Poss\{p_k \text{ ser mínimo}\};$
- Passo 3: Envio de fluxo incrementalmente:
  1. Seja  $N$  o número de incrementos e  $b$  o fluxo a transitar pela rede. Enviar fluxo para o primeiro caminho ordenado incrementalmente  $\left(\frac{b}{N}\right)$ , respeitando a capacidade de cada arco do caminho;
  2. Atualizar os custos nos arcos através da função  $\tilde{t}_{ij}(x_{ij}) = \tilde{t}_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x_{ij}}{u_{ij}}\right)^\lambda\right]$ .
- Passo 4: Critério de parada.
  1. Se  $n \leq N$  e existir fluxo a transitar ir para o Passo 1 e  $n = n + 1$ .
  2. Senão  $\Rightarrow$  fim.

Segue abaixo uma explicação detalhada do algoritmo proposto.

Para encontrar o conjunto de todos os caminhos não-dominados para cada par de nós origem-destino de todos os modos considerados, utilizamos o algoritmo proposto por Hernandes (2007). Tal algoritmo é baseado no algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman (Bellman, 1958). Trata-se de um algoritmo iterativo, tendo como critério de parada o número de iterações ou a não alteração dos custos de todos os caminhos encontrados na iteração anterior com relação à iteração atual. Desta forma, são encontrados todos os caminhos não-dominados entre os nós origem e destino de todos os modos considerados, aplicando a relação de Okada e Soper (Okada e Soper, 2000) para descartar os caminhos dominados.

A relação de Okada & Soper (2000) é definida a seguir.

Sejam  $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$  e  $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$  dois números *fuzzy* triangulares, então  $\tilde{a} \prec \tilde{b}$  ( $\tilde{a}$  domina  $\tilde{b}$ ) se e somente se  $m_1 \leq m_2$ ,  $(m_1 - \alpha_1) \leq (m_2 - \alpha_2)$ ,  $(m_1 + \beta_1) \leq (m_2 + \beta_2)$  e  $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ .

Para fazer a ordenação dos caminhos:

- Calcular  $\mu_{custo}$  para cada caminho, ou seja, verificar através da medida de possibilidade de Dubois & Prade (Dubois & Prade, 1980), qual a possibilidade de cada caminho ter o custo menor do que todos os demais;
- Calcular a pertinência de cada caminho:  $\mu_{cam} = \mu_{custo}$ ;
- Colocar os caminhos em ordem decrescente de acordo com  $\mu_{cam}$ . Se houver empate, usar o valor modal dos custos dos caminhos: escolher aquele com menor custo. Se ainda empatar, assumir a ordem que aparece.

Para enviar fluxo incrementalmente pelos caminhos de acordo com a ordenação feita:

- Seja  $N$  o número de incrementos, isto é quantas vezes iremos enviar o fluxo pela rede e  $b$  o fluxo disponível. A quantidade de fluxo a ser enviada em cada iteração é  $\frac{b}{N}$ .
- Verificar se existe oferta no nó origem do melhor caminho, caso não haja, ir para o próximo melhor caminho com oferta;

Finalmente:

- Atualizar a matriz de fluxo;
- Atualizar os custos nos arcos de acordo com o fluxo atribuído no passo anterior através da Função 2.
- Verificar o critério de parada.

## 5 Testes Computacionais

Nesta seção, apresentamos dois exemplos para ilustrar o algoritmo proposto, implementado em MATLAB 7.0.1 e executado em uma plataforma Intel I3 e 6 Gb de RAM.

### 5.1 Exemplo 1

A Figura 1 ilustra a modelagem proposta nas seções anteriores. Consideramos três modos de transporte: carro, ônibus e metrô. Os nós de cor branca representam o modo carro, os nós de cor cinza escuro representam o modo ônibus e os nós de cor cinza claro representam o modo metrô. A demanda para a origem O e destino 20 é 30. ‘O’ representa a origem da viagem dos usuários, que neste caso, pode ser feita usando o ônibus, metrô ou carro. O nó 20 representa o destino dos usuários, que na prática pode ser o local de trabalho, local de lazer, local de estudos, dentre outros. Os arcos tracejados representam as transferências modais, que nesse caso, são permitidas apenas entre os modos ônibus e metrô.

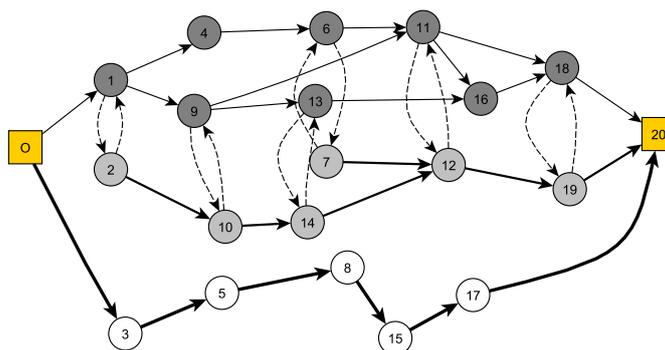


Figura 1: Rede Multimodal

Os arcos, as capacidades e o tempo de viagem a fluxo livre *fuzzy* ( $\tilde{t}_0$ ) estão definidos nas Tabelas 1 e 2.

O tempo de viagem a fluxo livre *fuzzy* ( $\tilde{t}_0$ ), está escrito na forma  $(m, \alpha, \beta)$ .

Tabela 1: Dados da Rede Multimodal da Figura 1

Arco	Origem → Destino	$\tilde{t}_0$	Capacidades
1	O → 3	(5, 1, 1)	10
2	3 → 5	(7, 1, 1)	12
3	5 → 8	(9, 1, 1)	11
4	8 → 15	(20, 1, 1)	13
5	15 → 17	(2, 1, 1)	10
6	17 → 20	(6, 1, 1)	12
7	O → 1	(15, 1, 1)	40
8	1 → 4	(10, 1, 1)	10
9	1 → 9	(10, 1, 1)	7
10	4 → 6	(12, 1, 1)	12
11	9 → 11	(8, 1, 1)	10
12	9 → 13	(7, 1, 1)	15

Tabela 2: Dados da Rede Multimodal da Figura 1

Arco	Origem → Destino	$t_0$	Capacidades
13	8 → 13	(12, 1, 1)	12
14	11 → 16	(10, 1, 1)	15
15	11 → 18	(11, 1, 1)	20
16	13 → 16	(13, 1, 1)	12
17	16 → 18	(3, 1, 1)	22
18	18 → 20	(5, 1, 1)	40
19	2 → 10	(10, 1, 1)	15
20	10 → 14	(5, 1, 1)	18
21	7 → 12	(7, 1, 1)	20
22	14 → 12	(2, 1, 1)	17
23	12 → 19	(12, 1, 1)	18
24	19 → 20	(4, 1, 1)	20
25	1 → 2	(3, 1, 1)	50
26	2 → 1	(3, 1, 1)	50
27	6 → 7	(2, 1, 1)	50
28	7 → 6	(2, 1, 1)	50
29	9 → 10	(2, 1, 1)	50
30	10 → 9	(2, 1, 1)	50
31	11 → 12	(3, 1, 1)	50
32	12 → 11	(3, 1, 1)	50
33	13 → 14	(2, 1, 1)	50
34	14 → 13	(2, 1, 1)	50
35	18 → 19	(1, 0.5, 0.5)	50
36	19 → 18	(1, 0.5, 0.5)	50

O algoritmo atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos ( $N = 6$ ). O tempo de processamento foi de 0.2 segundos.

O envio de fluxo ocorreu segundo a Tabela 3. As pertinências dos caminhos na última iteração ( $\mu_{cam}$ ) também estão na Tabela 3. Como descrito na Seção 4,  $\mu_{cam}$  é a possibilidade de cada caminho ter o custo menor que todos os demais, e é usada para ordenar os caminhos antes do envio de fluxo.

Tabela 3: Envio de fluxo

caminho	$\mu_{cam}$	fluxo enviado	custo atualizado
O → 1 → 9 → 11 → 18 → 20	1	5	(50.9537, 5.1977, 5.1977)
O → 3 → 5 → 8 → 15 → 17 → 20	1	10	(52.9629, 6.5996, 6.5996)
O → 1 → 9 → 11 → 18 → 19 → 20	1	2	(51.9537, 5.6977, 5.6977)
O → 1 → 2 → 10 → 14 → 12 → 19 → 20	0	13	(52.9752, 7.2751, 7.2751)

Quanto aos caminhos utilizados para o envio de fluxo, temos que os caminhos O → 1 → 9 → 11 → 18 → 20 (ônibus) e O → 3 → 5 → 8 → 15 → 17 → 20 (carro) não apresentam transferências modais. Os caminhos O → 1 → 9 → 11 → 18 → 19 → 20 e O → 1 → 2 → 10 → 14 → 12 → 19 → 20 apresentam uma transferência modal.

Considerando os custos *crisp*, encontramos os seguintes caminhos:

- O → 1 → 9 → 11 → 18 → 20.
- O → 3 → 5 → 8 → 15 → 17 → 20.

O exemplo acima foi baseado no exemplo encontrado no trabalho de Lozano & Storchi (2001), onde os autores resolvem o problema de caminho mínimo viável em redes de transporte multimodal, permitindo mudanças entre os modos privados e públicos e com custos fixos nos arcos. No intuito de verificar a eficiência da abordagem proposta nesse trabalho, o exemplo publicado em Lozano & Storchi (2001) teve que ser adaptado. A primeira adaptação está em

não permitir mudanças entre os modos privado e público, enquanto que a segunda é que o custo depende do fluxo que passa naquele arco. Assim, realizar uma comparação direta dos resultados obtidos pela simulação descrita em Lozano & Storchi (2001) e o resultado obtido por nossa abordagem não é possível. No entanto, para efeito de informação, quando não há transferências modais, o algoritmo proposto pelos autores em Lozano & Storchi (2001) encontra o seguinte caminho:  $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 20$ . Quando uma transferência modal é admitida pelo usuário, tem-se o seguinte caminho:  $O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ . Para duas transferências modais, tem-se o seguinte caminho:  $O \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ . Vale ressaltar que devido às adaptações feitas, a rede de transporte ficou diferente da apresentada em Lozano & Storchi (2001).

## 5.2 Exemplo 2

Neste exemplo, também consideramos três modos de transporte: carro, ônibus e metrô. Os nós de cor branca representam o modo carro, os nós de cor cinza escuro representam o modo ônibus e os nós de cor cinza claro representam o modo metrô.

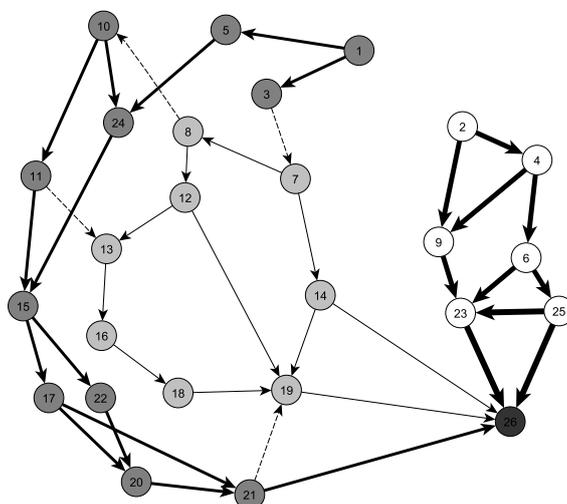


Figura 2: Rede multimodal com três modos

Consideramos os nós 1 (modo ônibus) e 2 (modo carro) como nós origem e o nó 26 como nó destino, sendo que a rede multimodal da Figura 2 contém 26 nós e 39 arcos. A demanda para a origem 1 e destino 26 é 20 e a demanda para a origem 2 e destino 26 é 15.

Os arcos, as capacidades e o tempo de viagem a fluxo livre *fuzzy* ( $\tilde{t}_0$ ) estão definidos nas Tabelas 4 e 5.

Tabela 4: Dados da Rede Multimodal da Figura 2

Arco	Origem → Destino	$\tilde{t}_0$	Capacidades
1	2 → 4	(8, 1, 2)	10
2	2 → 9	(5, 1, 2)	10
3	4 → 9	(7, 1, 2)	10
4	4 → 6	(7, 1, 2)	5
5	6 → 23	(17, 1, 2)	10
6	6 → 25	(7, 1, 2)	12
7	9 → 23	(15, 1, 2)	15
8	25 → 23	(6, 1, 2)	15
9	23 → 26	(5, 1, 2)	12
10	25 → 26	(5, 1, 2)	10
11	1 → 3	(5, 1, 2)	10
12	1 → 5	(6, 1, 2)	10

Tabela 5: Dados da Rede Multimodal da Figura 2

Arco	Origem → Destino	$\tilde{t}_0$	Capacidades
13	5 → 24	(8, 1, 2)	15
14	10 → 24	(7, 1, 2)	15
15	24 → 15	(5, 1, 2)	30
16	10 → 11	(7, 1, 2)	10
17	11 → 15	(4, 1, 2)	20
18	15 → 17	(5, 1, 2)	10
19	15 → 22	(7, 1, 2)	12
20	17 → 20	(7, 1, 2)	14
21	17 → 21	(5, 1, 2)	10
22	22 → 20	(7, 1, 2)	10
23	20 → 21	(4, 1, 2)	20
24	21 → 26	(6, 1, 2)	15
25	7 → 8	(5, 1, 2)	20
26	8 → 12	(7, 1, 2)	10
27	12 → 19	(20, 1, 2)	10
28	12 → 13	(7, 1, 2)	15
29	13 → 16	(17, 1, 2)	30
30	16 → 18	(7, 1, 2)	10
31	18 → 19	(7, 1, 2)	12
32	14 → 19	(5, 1, 2)	12
33	19 → 26	(7, 1, 2)	10
34	14 → 26	(15, 1, 2)	18
35	3 → 7	(12, 1, 2)	20
36	7 → 14	(6, 1, 2)	40
37	8 → 11	(17, 1, 2)	30
38	11 → 13	(20, 1, 2)	20
39	21 → 19	(16, 1, 2)	50

O algoritmo atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos ( $N = 5$ ). O tempo de processamento foi de 0.3280 segundos.

O envio de fluxo ocorreu segundo a Tabela 6. As pertinências dos caminhos na última iteração ( $\mu_{cam}$ ) também estão na Tabela 6.

Tabela 6: Envio de fluxo

caminho	$\mu_{cam}$	fluxo enviado	custo atualizado
2 → 9 → 23 → 26	1	10	(26.5561, 3.2519, 6.5040)
2 → 4 → 6 → 25 → 26	0.8053	5	(28.2035, 4.1733, 8.3464)
1 → 3 → 7 → 14 → 26	0.1477	10	(39.9977, 4.1743, 8.3485)
1 → 5 → 24 → 15 → 17 → 21 → 26	0.0298	10	(37.8241, 6.5111, 13.0222)

Considerando os custos *crisp*, encontramos os seguintes caminhos:

- 1 → 5 → 24 → 15 → 17 → 21 → 26;
- 2 → 9 → 23 → 26.

Quanto aos caminhos utilizados para o envio de fluxo tendo como origem o nó 1 e destino o nó 26, temos que o caminho 1 → 3 → 7 → 14 → 26 apresentou uma transferência modal entre os nós 3 e 7. O caminho 1 → 5 → 24 → 15 → 17 → 21 → 26 não apresentou transferências modais. Já os caminhos utilizados para o envio de fluxo tendo como origem o nó 2 e destino o nó 26 não apresentam transferências modais pois são referentes ao modo carro.

Assim como no Exemplo 1, fizemos adaptações no exemplo encontrado no trabalho de Mouncef et al (2006), onde os autores resolvem o problema de caminho mínimo multimodal clássico, permitindo mudanças entre os modos privados e públicos e com custos fixos nos arcos. Para efeito de informação, quando uma mudança modal é admitida pelo usuário, o algoritmo

proposto por Mouncif et al (2006) encontra o seguinte caminho:  $O \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow D$ . Para duas transferências modais, tem-se o seguinte caminho:  $O \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 23 \rightarrow 21 \rightarrow D$ . Novamente, devido às alterações feitas, a rede adaptada ficou diferente da rede apresentada em Mouncif et al (2006).

Por fim, em ambos os exemplos apresentados, ao utilizar a teoria *fuzzy*, fornecemos mais alternativas para os usuários realizarem suas viagens. Ao considerar custos *crisp*, encontramos apenas dois caminhos tanto no Exemplo 1 quanto no Exemplo 2. Em termos de distribuição de fluxo, tais caminhos não conseguiriam atender toda a demanda das respectivas redes, ocasionando congestionamentos nas mesmas.

## 6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Problemas de redes de transporte têm sido extensamente estudados e aplicados nas soluções de problemas reais. Procurar a melhor forma de distribuir recursos de transporte de bens, serviços e pessoas é uma parte primordial no planejamento das organizações, seja em qual nível for. Uma vez que a complexidade de tais problemas consome uma grande quantidade de recursos computacionais e, na maioria dos casos, os mesmos não podem ser resolvidos usando ferramentas determinísticas que forneçam resultados exatos, a busca por outras formas de resolução é de suma importância.

Neste trabalho apresentamos uma abordagem para a resolução do problema de redes de transporte multimodal *fuzzy* que aborda incertezas nos custos dos arcos. O uso da teoria *fuzzy* para tratar as incertezas nos custos torna o algoritmo mais aderente a realidade e promissor para a resolução do problema apresentado, pois resolvemos o problema na forma *fuzzy*, que é mais interessante do que transformá-lo na forma clássica para resolvê-lo.

No caso em que a capacidade dos arcos são *fuzzy*, podemos proceder da seguinte maneira:

1. Calculamos a possibilidade de determinado caminho ser mínimo usando a Teoria de possibilidade (Dubois & Prade (1980));
2. Calculamos a possibilidade do fluxo passar nos arcos de determinado caminho, fazemos a intersecção dessas possibilidades e tomamos o mínimo.
3. Fazemos a intersecção entre a possibilidade do caminho ser mínimo e o mínimo da intersecção da possibilidade do fluxo passar nos arcos de determinado caminho e tomamos o máximo, enviando fluxo pelo caminho correspondente.

O algoritmo proposto está sendo testado em problemas maiores a fim de comprovar a eficiência e acurácia do mesmo, que, como foi apresentado neste trabalho, é simples e mostrou-se eficiente nos exemplos aqui apresentado.

## Referências

- Abbaspour, R. A., Samadzadegan, F.** (2010), An evolutionary solution for multimodal shortest path problem in metropolises. *Computer Science and Information Systems*, 7(4), 1-24.
- Ahuja, T. L., Magnanti, R. K.**, Network Flows. Prentice Hall, Philadelphia, PA, USA, 1993.
- Ammar, E. E., Youness, E. A.** (2005), Study on multiobjective transportation problem with fuzzy numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 166, 241-253.
- Bellman, R. E.** (1958), On a routing problem. *Quarterly Applied Mathematics*, 16, 87-90.
- Brito, J., Martínez, F. J., Moreno, J. A., Verdegay, J. L.** (2010), Fuzzy approach for vehicle routing problems with fuzzy travel time. *International Conference Fuzzy Systems*, Barcelona, Espanha.
- Bieli, M., Boumakoul, A., Mouncif, H.** (2006), Object modeling and path computation for multimodal travel systems, *European Journal Operational Research*, 175, 1705-1730.
- Bureau of Public Roads, Traffic assignment manual, Technical Report, U.S. Department of Commerce, 1964.

**Dijkstra, E. W.** (1959), A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1, 269-271.

**Dubois, D., Prade, H.**, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, INC, New York, 1980.

**Ghatee, M., Hashemi, S. M.** (2008), Generalized minimal cost flow problem in fuzzy nature: An application in bus network planning problem. *Applied Mathematical Modelling*, 32, 2490-2508.

**Heid, A., Galvez-Fernandez, C., Habbas, Z., Khadraoui, D.** (2010), Solving time-dependent multimodal transport problems using a transfer graph model. *Computer & Industrial Engineering*, In Press.

**Golnarkar, A., Alesheikh, A. A., Malek, M. R.** (2010), Solving best path on multimodal transportation networks with fuzzy costs. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 7(3), 1-13.

**Hernandes, F.**, *Algoritmos para Problemas de Grafos com Incertezas*. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação - UNICAMP, Fevereiro, 2007.

**Lozano, A., Storchi, G.** (2001), Shortest viable path algorithm in multimodal networks, *Transportation Research*, 35, 225-241.

**Lozano, A., Storchi, G.** (2002), Shortest viable hyperpath in multimodal networks, *Transportation Research - Part B*, 36, 853-874.

**Miller, H. J., Storm, J. D., Bowen, M.** (1995), GIS design for multimodal networks analysis em "GIS/LIS 95 Annual Conference and Exposition Proceedings of GIS/LIS", Nashville, EUA, 750-759.

**Modesti, P., Sciomachen, A.** (1998), A utility measure for finding multiobjective shortest paths in urban multimodal transportations networks, *European Journal of Operational Research*, 111, 495-508.

**Mouncif, H., Boulmakoul, A., Chala, M.** (2006), Integrating GIS-technology for modeling origin-destination trip in multimodal transportation networks, *The International Arab Journal of Information Technology*, 3, 256-263.

**Mouncif, H., Rida, M., Boulmakoul, A.** (2011), An efficient multimodal path computation integrated within location based service for transportation networks system (Multimodal path computation within LBS). *Journal of Applied Sciences*, 11(1), 1-15.

**Okada, S., Soper, T.** (2000), A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths. *Fuzzy Sets and Systems*, 109, 129-140.

**Qu, L., Chen, Y.** (2008), A hybrid MCDM method for route selection of multimodal transportation network. *Lecture Notes in Computer Science*, 5263, 374-383.

**Ramazani, H., Shafahi, Y., Seyedabrishami, S. E.** (2010), A shortest path problem in an urban transportation network based on driver perceived travel time. *Scientia Iranica A*, 17(4), 285-296.

**Ramazani, H., Shafahi, Y., Seyedabrishami, S. E.** (2011), A fuzzy traffic assignment algorithm based on driver perceived travel time of network links. *Scientia Iranica A*, 18(2), 190-197.

**Verga, J.**, *Algoritmo para resolução do problema de fluxo multiproduto fuzzy*, Dissertação de Mestrado, FEEC- UNICAMP, 2009.

**Xin-Bo, W., Gui-Jun, Z., Zhen, H., Hai-Feng, G., Li, Y.** (2009), Modeling and implementing research of multimodal transportation network. *The 1st International Conference on Information Science and Engineering*, Nanjing, China, 2100-2103.

**Yu, H., Lu, F.** (2011), A Multimodal route planning approach with an improved genetic algorithm. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 38(2), 343-348.