

## UMA EFICIENTE HEURÍSTICA BASEADA NA ESTRATÉGIA DE DIVISÃO-E-CONQUISTA PARA O *SCHOOL TIMETABLING PROBLEM*

**Camilo José Bornia Poulsen**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Administração  
camilo.bornia@ufrgs.br

**Denise Lindstrom Bandeira**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Administração  
dlbandeira@ea.ufrgs.br

### RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação de programação inteira para uma variante do *School Timetabling Problem*, considerando a realidade do sistema educacional brasileiro. O objetivo é auxiliar gestores de escolas a alocar, numa grade horária semanal, professores e salas para cada turma de alunos, segundo as exigências curriculares e as restrições de disponibilidade de recursos. Na impossibilidade de resolver o modelo satisfatoriamente através de algum método exato, desenvolveu-se uma heurística baseada na estratégia de divisão-e-conquista. Para validar esta proposição, foram utilizados dados reais de sete escolas brasileiras, esparsas geograficamente, relativos ao ano letivo de 2012. A heurística comprovou ser eficiente para instâncias médias e grandes.

**PALAVRAS-CHAVE.** *School timetabling problem*, Grade horária, Estratégia de divisão-e-conquista.

**Área Principal:** PO na Educação (EDU), Otimização Combinatória (OC).

### ABSTRACT

This paper presents an integer programming formulation for a variant of the *School Timetabling Problem*, considering the reality of the Brazilian educational system. The goal is to assist school managers to allocate teachers and classrooms for each class of students in a weekly timetable, according to the curriculum requirements and the resource availability constraints. Since it was impossible to solve the model satisfactorily through any exact method, we developed a heuristic based on the divide-and-conquer strategy. To validate this proposition, we used actual data from seven Brazilian schools, geographically scattered, relative to 2012 school year. The heuristic has proven to be efficient for medium and large instances.

**KEYWORDS.** *School timetabling problem*, Timetable, Divide-and-conquer strategy.

**Main Area:** OR in Education (EDU), Combinatorial Optimization (OC).

## 1 Introdução

Todo início de ano letivo, administradores de escolas necessitam construir as grades horárias de todas as turmas. Construir grades horárias significa alocar, numa grade horária semanal, professores e salas (salas de aula, laboratórios, quadras esportivas e afins) para cada turma de alunos, segundo as exigências curriculares e as restrições de disponibilidade de cada recurso. Conhecido como *School Timetabling Problem* (STP), de acordo com Cooper e Kingston (1993), o problema básico de construção de grades horárias consiste em atribuir professores, alunos e salas de aula para uma coleção de turmas, de tal forma que nenhum participante é obrigado a comparecer a duas aulas

simultaneamente. Essa tarefa árdua acaba se transformando num grande quebra-cabeça, num pesado processo de tentativa e erro que, na primeira combinação encontrada, dá-se por solucionado, mesmo que a qualidade da solução seja péssima. Uma solução péssima implica alunos e professores prejudicados: uma distribuição de carga horária dissonante dos interesses pedagógicos e maçante para professores e alunos, aulas em dias ou horários indesejados, existência de horários vagos entre aulas e poucos dias livres para professores, dentre outras tantas situações que geram inconformidade (Bornia Poulsen e Bandeira, 2012).

Gotlieb (1962) apresentou a primeira formulação completa para o STP, declarando que o problema consistia em fixar um conjunto de aulas de uma turma num determinado período de tempo, exigindo-se o comparecimento de um único professor. Esta versão clássica do STP, mostrou-se *NP-Complete* por Even, Itai e Shamir (1976). Para Elmohamed, Coddigton e Fox (1997), o *timetabling* (TT) é um problema combinatório de otimização multidimensional, não-euclidiano, multirrestrito e, conseqüentemente, muito difícil de ser resolvido. Alvarez-Valdes, Crespo e Tamarit (2002) apontam que a grande quantidade de entidades envolvidas nesse processo (turmas, professores, salas etc.) resulta num enorme número de variáveis e restrições.

Alvarez-Valdes, Martin e Tamarit (1996) afirmam que o STP varia de país para país, pois cada sistema educacional tem suas características e regras próprias. Isso fica evidente ao se constatar a quantidade de trabalhos que apresentam modelos desenvolvidos especialmente para seus países, como por exemplo: Grécia (Valouxis e Housos, 2003; Beligiannis, Moschopoulos e Likothanassis, 2009), Espanha (Alvarez-Valdes et al., 1996), Itália (Colomi, Dorigo e Maniezzo, 1998), Holanda (Gans, 1981), Austrália (Abramson, 1991), Reino Unido (Wright, 1996), Alemanha (Jacobsen, Bortfeldt e Gehring, 2006), Portugal (Carrasco e Pato, 2004) e Brasil (Santos, Uchoa, Ochi e Maculan, 2012; Bornia Poulsen e Bandeira, 2012).

Para Santos et al. (2012), como o uso de métodos exatos para resolver instâncias reais pode demandar quantidades de tempo muito superiores ao aceitável, o desenvolvimento de heurísticas tem se mostrado uma excelente alternativa prática. Ainda assim, os resultados obtidos dependem fortemente de uma avaliação empírica. Em muitos trabalhos, a qualidade da grade horária proposta é medida pela sua aceitação pela escola, que é muito subjetiva. Idealmente, cada nova heurística deve ser comparada com métodos anteriormente propostos aplicados a instâncias de *benchmark*. Infelizmente, isso ainda não é o caso do STP. Na verdade, cada grupo de autores considera variantes diferentes do problema (por vezes, apenas ligeiramente diferentes), o que dificulta possíveis comparações. Para minimizar este problema, um esforço (Post et al., 2012) está sendo feito para padronizar e publicar conjuntos de dados de referência na WEB (Santos et al., 2012).

Este trabalho apresenta um modelo em programação linear inteira para o STP brasileiro e uma proposta de resolução através de uma heurística baseada na estratégia de divisão-e-conquista. Esta pesquisa está organizada da seguinte forma: na Seção 2, o problema é formalmente definido; na Seção 3, apresenta-se uma proposta de formulação matemática para o problema em *mixed integer programming* (MIP); na Seção 4, a heurística baseada na estratégia de divisão-e-conquista é proposta; na Seção 5, os experimentos e resultados computacionais são apresentados; e, finalmente, a Seção 6 contém as conclusões.

## 2 Definição do problema

O objetivo deste trabalho é oferecer um modelo que permita construir grades horárias, de acordo com as características exigidas pelas escolas brasileiras. Uma solução de STP é viável se todas as aulas forem alocadas de forma que nenhuma das restrições fortes H1–H8, apresentadas a seguir, for violada:

- **H1:** As aulas semanais de cada disciplina devem ser atendidas;
- **H2:** O número máximo de aulas diárias de uma disciplina não deve ser ultrapassado;
- **H3:** Cada turma deve ter aula na sua grade horária semanal;

- **H4:** Um professor não pode ser alocado em um horário em que não está disponível;
- **H5:** Um local de aula não pode ser alocado em um horário em que não está disponível;
- **H6:** Uma turma pode ter apenas uma aula por horário;
- **H7:** Um professor pode ter apenas uma aula por horário;
- **H8:** Um local de aula pode ter apenas uma aula por horário.

A qualidade de uma solução viável depende da satisfação das chamadas restrições fracas. Se uma restrição fraca é violada, uma penalidade é induzida. As três restrições fracas S1–S3 do modelo proposto são as seguintes:

- **S1:** Cada professor deve lecionar no menor número possível de dias;
- **S2:** Cada professor deve ter o menor número possível de janelas (horários vagos dentro de um mesmo turno);
- **S3:** Cada disciplina deve ter o menor número possível de requisições de aulas duplas não atendidas.

### 3 Formulação matemática

Nesta seção, é apresentada uma proposta de formulação matemática para este modelo de STP, baseada na formulação de Santos et al. (2012). Conforme sugestão de Dorneles, Araújo e Buriol (2012), modificou-se essa formulação para simplificar sua apresentação, substituindo cada encontro pré-atribuído entre um professor  $t \in T$  e uma turma  $c \in C$  por uma disciplina  $s \in S$ .

Visando ajustar mais à realidade das escolas brasileiras, o modelo de STP proposto contém alterações adicionais. A formulação de Santos et al. (2012) foi desenvolvida para instâncias de dados que contenham turmas que estejam rigorosamente num mesmo turno, e que tenham disciplinas com limite máximo diário de duas aulas. Caso estes dois critérios não sejam atendidos, a formulação gerará duas distorções não desejadas. A primeira diz respeito ao cálculo do número de janelas. No sistema educacional privado brasileiro, as escolas buscam minimizar o número de janelas, pois a Convenção Coletiva de Trabalho (CCT/RS, 2013), obriga as escolas a remunerar seus professores por esses horários vagos – as chamadas "janelas". No entanto, a legislação considera como janela apenas os horários vagos dentro de um mesmo turno. Portanto, se a formulação de Santos et al. (2012) for empregada em instâncias de dados que possuam turmas em turnos diferentes, o último período do turno será considerado uma janela caso o professor esteja alocado em algum período anterior e em qualquer outro período do turno posterior. Para compensar esta possível distorção, a formulação proposta neste trabalho calcula o número de janelas do professor para cada turno. Essa distorção poderia ser superada mediante a divisão da instância em instâncias menores, de modo que cada instância contivesse dados de um único turno. Porém, isso impediria o alcance de uma possível solução global ótima, por conta da restrição fraca que deseja minimizar o número de dias de trabalho de cada professor. A segunda distorção impacta no cálculo de aulas duplas. Caso seja permitido mais de duas aulas diárias para uma disciplina – o que é comum de acordo com os dados desta pesquisa, que analisou dados de sete escolas brasileiras esparsas geograficamente – uma aula tripla, por exemplo, será computada como sendo duas aulas duplas, o que não é desejável. Ao analisar todas as sete instâncias utilizadas em Santos et al. (2012) e Dorneles et al. (2012), constata-se que nenhuma disciplina permite mais de duas aulas diárias. Nas instâncias pesquisadas verificou-se disciplinas que permitem. Por esta razão, a formulação deste trabalho representa uma importante contribuição, pois permite o processamento conjunto de turmas de turnos diferentes.

Dado este problema, o modelo de STP proposto apresenta os seguintes conjuntos e parâmetros de entrada:

- $C$ : conjunto de turmas de alunos;
- $S$ : conjunto de disciplinas;
- $T$ : conjunto de professores;
- $L$ : conjunto de locais de aula;

- $S_c$ : conjunto de disciplinas  $s \in S$  da turma  $c \in C$ ;
- $S_t$ : conjunto de disciplinas  $s \in S$  do professor  $t \in T$ ;
- $S_l$ : conjunto de disciplinas  $s \in S$  do local de aula  $l \in L$ ;
- $D$ : conjunto de dias da semana;
- $I$ : conjunto de turnos ( $i=1$ –manhã;  $i=2$ –tarde;  $i=3$ –noite);
- $P$ : conjunto de períodos de aula;
- $P_i$ : conjunto de períodos de aula do turno  $i \in I$ ;
- $AC_{|C| \times |D| \times |P|} \in \{0, 1\}$ : matriz da grade horária das turmas, onde  $AC_{cdp} = 1$  indica se a turma  $c \in C$  deve ter aula no dia  $d \in D$  e período  $p \in P$ ,  $AC_{cdp} = 0$  caso contrário;
- $M_{|S_c|}$ : vetor de aulas semanais das disciplinas das turmas  $c \in C$ , onde  $M_s$  indica o número de aulas semanais da disciplina  $s \in S_c$ , conforme currículo da turma  $c \in C$ ;
- $Dmax_{|S_c|}$ : vetor de número máximo de aulas diárias de uma disciplina, onde  $Dmax_s$  indica o número máximo de aulas diárias aceitável para uma disciplina  $s \in S_c$  de uma turma  $c \in C$ ;
- $RDL_{|S_c|}$ : vetor de requisições de aulas duplas de uma disciplina, onde  $RDL_s$  indica o número de aulas duplas solicitadas para uma disciplina  $s \in S_c$  de uma turma  $c \in C$ ;
- $KP_{|P|}$ : vetor de tipos de períodos de aula, onde  $KP_p = 1$  indica que o período de aula  $p \in P$  é o primeiro dentro de um bloco de períodos,  $KP_p = 2$  indica que é o segundo período de aula  $p \in P$  e que há um terceiro que o sucede dentro do bloco,  $KP_p = 3$  caso nenhuma das condições anteriores.

Além disso, tem-se o seguinte conjunto de variáveis de decisão:

$$x_{sdp} = \begin{cases} 1, & \text{se a disciplina } s \in S \text{ é ministrada no dia da semana } d \in D \text{ e período de aula } p \in P \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Este conjunto de variáveis de decisão está relacionado aos seguintes conjuntos de variáveis auxiliares:

- $y_{td} \in \{0, 1\}$ : 1 se o professor  $t \in T$  tem aula no dia  $d \in D$ , 0 caso contrário;
- $y_{tdi} \in \{0, 1\}$ : 1 se o professor  $t \in T$  tem aula no turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ , 0 caso contrário;
- $w_{sdp} \in \{0, 1\}$ : 1 se a disciplina  $s \in S$  tem aula dupla iniciando no período de aula  $p \in P$  no dia  $d \in D$ ;
- $W_s$ : número de aulas duplas da disciplina  $s \in S$  não atendidas;
- $f_{tdi}$ : primeiro período de aula do professor  $t \in T$  no turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ ;
- $l_{tdi}$ : último período de aula do professor  $t \in T$  no turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ ;
- $z_{tdi}$ : número de janelas do professor  $t \in T$  no turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ .

Desta forma, a *formulação completa* do modelo de STP proposto é a seguinte:

$$\text{minimizar} \quad Z = \alpha \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} y_{td} + \beta \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{i \in I} z_{tdi} + \gamma \sum_{s \in S} W_s$$

sujeito a:

$$\sum_{d \in D} \sum_{p \in P} x_{sdp} = M_s \quad \forall s \in S \quad (1)$$

$$\sum_{p \in P} x_{sdp} \leq Dmax_s \quad \forall s \in S, d \in D \quad (2)$$

$$x_{sdp} \leq AC_{cdp} \quad \forall d \in D, p \in P, c \in C, s \in S_c \quad (3)$$

$$x_{sdp} \leq AT_{tdp} \quad \forall d \in D, p \in P, t \in T, s \in S_t \quad (4)$$

$$x_{sdp} \leq AL_{ldp} \quad \forall d \in D, p \in P, l \in L, s \in S_l \quad (5)$$

$$\sum_{s \in S_c} x_{sdp} \leq 1 \quad \forall c \in C, d \in D, p \in P \quad (6)$$

$$\sum_{s \in S_t} x_{sdp} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, p \in P \quad (7)$$

$$\sum_{s \in S_l} x_{sdp} \leq 1 \quad \forall l \in L, d \in D, p \in P \quad (8)$$

$$\sum_{s \in S_t} x_{sdp} \leq y_{td} \quad \forall t \in T, d \in D, p \in P \quad (9)$$

$$\sum_{s \in S_t} x_{sdp} \leq y_{tdi} \quad \forall t \in T, d \in D, p \in P_i, i \in I \quad (10)$$

$$f_{tdi} \leq (|P_i| + 1) - (|P_i| + 1 - p) \sum_{s \in S_t} x_{sdp} \quad \forall t \in T, d \in D, p \in P_i, i \in I \quad (11)$$

$$l_{tdi} \geq p \sum_{s \in S_t} x_{sdp} \quad \forall t \in T, d \in D, p \in P_i, i \in I \quad (12)$$

$$z_{tdi} \geq l_{tdi} - f_{tdi} + y_{tdi} - \sum_{s \in S_t} \sum_{p \in P_i} x_{sdp} \quad \forall t \in T, d \in D, i \in I \quad (13)$$

$$w_{sdp} \leq x_{sdp} \quad \forall s \in S, d \in D, p \in P, KP_p = \{1, 2\} \quad (14)$$

$$w_{sdp} \leq x_{s,d,p+1} \quad \forall s \in S, d \in D, p \in P, KP_p = \{1, 2\} \quad (15)$$

$$w_{sdp} \leq 1 - x_{s,d,p-1} \quad \forall s \in S, d \in D, p \in P, KP_p = 2 \quad (16)$$

$$W_s \geq RDL_s - \sum_{p \in P} w_{sdp} \quad \forall s \in S, d \in D \quad (17)$$

$$x_{sdp} \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S, d \in D, p \in P$$

$$y_{td} \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, d \in D$$

$$y_{tdi} \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, d \in D, i \in I$$

$$w_{sdp} \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S, d \in D, p \in P$$

$$W_s \geq 0 \quad \forall s \in S$$

$$f_{tdi} \geq 0 \quad \forall t \in T, d \in D, i \in I$$

$$l_{tdi} \geq 0 \quad \forall t \in T, d \in D, i \in I$$

$$z_{tdi} \geq 0 \quad \forall t \in T, d \in D, i \in I$$

A função objetivo  $Z$  consiste em três componentes ponderados pela penalidade de cada uma das restrições fracas S1, S2 e S3, respectivamente. As penalidades  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  permitem à escola, que usará o modelo, determinar o grau de importância de cada critério. Quanto mais importante for determinado critério, maior deverá ser a penalidade em detrimento das demais.

O conjunto de restrições (1) atende H1, garantindo que a demanda curricular de cada disciplina seja atendida. O conjunto de restrições (2) impede que o modelo gere uma grade horária que exceda o limite diário de aulas de cada disciplina (H2). Os conjuntos de restrições (3), (4) e (5) restringem a alocação das aulas das turmas, professores e locais de aula, respectivamente, às disponibilidades de dias e períodos de aula (H3, H4 e H5). As restrições fortes H6, H7 e H8, que garantem exclusividade de cada um dos respectivos recursos (turma, professor e local de aula), são expressas pelos conjuntos de restrições (6), (7) e (8). O conjunto de restrições (9) indica se o professor  $t \in T$  trabalha no dia  $d \in D$ . O somatório de todas as variáveis  $y_{td}$ , que resulta no total de dias de trabalho de todos os professores, é o primeiro componente da função objetivo  $Z$  e visa avaliar a restrição fraca S1. De forma similar ao conjunto de restrições (9), o conjunto (10) calcula  $y_{tdi}$ , indicando se o professor  $t \in T$  trabalha no turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ . Já os conjuntos (11) e (12) determinam, respectivamente, quais são os primeiros e últimos períodos de cada disciplina  $s \in S$  em cada turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ . A partir das variáveis  $y_{tdi}$ ,  $f_{tdi}$  e  $l_{tdi}$ , o conjunto de restrições (13) permite calcular o valor de  $z_{tdi}$ , que computa o número de janelas para o professor  $t \in T$  no turno  $i \in I$  do dia  $d \in D$ . O somatório das variáveis  $z_{tdi}$ , que representa o total de janelas de todos professores, é o segundo componente

da função objetivo  $Z$ , que avalia a restrição fraca S2.

Para calcular as aulas duplas, necessita-se introduzir o conceito de bloco. No Brasil, um turno tem de quatro a seis períodos de aula, separados por um intervalo. Será chamado de "bloco" cada agrupamento de períodos que antecedem ou sucedem o intervalo, dentro de um turno. Logo, um bloco pode ter dois ou três períodos. Todo primeiro período de um bloco é candidato a ser um período que tenha uma aula dupla iniciando. Já um segundo período, somente será candidato se houver um período que lhe suceda (terceiro período). Já o terceiro período jamais será candidato, pois não há um período que lhe suceda. Deste modo, o vetor  $KP_p$  indica qual o tipo de cada período. Para os primeiros períodos de um bloco ( $KP_p = 1$ ), deve-se testar se o período corrente ( $p \in P$ ) e o próximo ( $p + 1 \in P$ ) estão alocados (conjuntos de restrições (14) e (15), respectivamente). Já para os segundos períodos de um bloco que são sucedidos por um terceiro período ( $KP_p = 2$ ), além de testar se o período corrente e o próximo são alocados, deve-se testar se o período anterior ( $p - 1 \in P$ ) não está alocado (conjunto de restrições (16)). Consequentemente, os segundos períodos, que não têm um período que lhe suceda, e os terceiros períodos não precisam ser testados, pois não há possibilidade que uma aula dupla inicie neles. Deste modo, uma aula tripla não será considerada duas aulas duplas. A partir da identificação dos períodos que recebem a primeira aula de uma aula dupla, o modelo pode calcular quantas aulas duplas requeridas não foram atendidas através do conjunto de restrições (17). Esse cálculo resulta no conjunto de variáveis  $W_s$ , que tem seu somatório computado no terceiro componente da função objetivo  $Z$  e que avalia o atendimento da restrição fraca S3.

#### 4 A heurística baseada na estratégia de divisão-e-conquista

Neste trabalho foi desenvolvida uma heurística baseada na estratégia de divisão-e-conquista, inspirada no artigo de Vasquez e Hao (2003). A lógica desta abordagem consiste em dividir o problema inicial em vários pequenos subproblemas e resolvê-los. Alguém que constrói uma grade horária manualmente, intuitivamente já faz isso. Em Marte (1998), o autor diz que a estratégia de divisão-e-conquista é vital para resolver manualmente o problema de grades horárias, pois essa estratégia restringe o espaço de soluções.

Naturalmente, a soma dos valores ótimos de todos os subproblemas deve ser maior ou igual ao valor ótimo do problema inicial (Vasquez e Hao, 2003), já que uma solução de um determinado subproblema pode restringir o campo de soluções de outro. Porém, a heurística proposta se dispõe a pagar este preço, pois, como será visto na Seção 5, não é possível alcançar a otimalidade utilizando um *MIP solver* num tempo de processamento aceitável.

A ideia básica da heurística proposta consiste nos seguintes passos:

- **Passo 1:** Gerar uma solução inicial, sem qualquer preocupação em atender as restrições fracas;
- **Passo 2:** Selecionar aleatoriamente um pequeno subconjunto de turmas;
- **Passo 3:** Processar o modelo no *MIP solver*, adicionando restrições com a solução obtida até o presente momento dos recursos que não foram selecionados no *Passo 2*;
- **Passo 4:** Voltar para o *Passo 2* até um determinado critério de parada.

##### 4.1 Geração da solução inicial

Para gerar a solução inicial requerida no *Passo 1*, usou-se o *MIP solver*, substituindo a função objetivo  $Z$  por uma constante e removendo todos os conjuntos de restrições que carregam as variáveis auxiliares, que são utilizados para avaliar o impacto das restrições fracas S1–S3. Assim sendo, para gerar uma solução inicial viável, usou-se o que será chamado de *formulação compacta*:

$$\text{minimizar } Z = 1$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{d \in D} \sum_{p \in P} x_{sdp} &= M_s & \forall s \in S \\
 \sum_{p \in P} x_{sdp} &\leq Dmax_s & \forall s \in S, d \in D \\
 x_{sdp} &\leq AC_{cdp} & \forall d \in D, p \in P, c \in C, s \in S_c \\
 x_{sdp} &\leq AT_{tdp} & \forall d \in D, p \in P, t \in T, s \in S_t \\
 x_{sdp} &\leq AL_{ldp} & \forall d \in D, p \in P, l \in L, s \in S_l \\
 \sum_{s \in S_c} x_{sdp} &\leq 1 & \forall c \in C, d \in D, p \in P \\
 \sum_{s \in S_t} x_{sdp} &\leq 1 & \forall t \in T, d \in D, p \in P \\
 \sum_{s \in S_l} x_{sdp} &\leq 1 & \forall l \in L, d \in D, p \in P \\
 x_{sdp} &\in \{0, 1\} & \forall s \in S, d \in D, p \in P
 \end{aligned}$$

#### 4.2 Selecionando o subconjunto de turmas

Para escolher o subconjunto de turmas (*Passo 2*), seleciona-se aleatoriamente um professor  $t \in T$ . A partir deste professor, seleciona-se, também de forma aleatória, um subconjunto de turmas vizinhas que têm disciplinas ministradas por ele. Entende-se por turmas vizinhas, um conjunto sequencial de  $n$  turmas deste professor. Este procedimento, que será chamado de SSC, foi construído desta forma para atender aos seguintes propósitos:

- Garantir que as turmas selecionadas tenham professores em comum (razão pela qual se escolhem turmas de um professor em comum);
- Garantir que as turmas sejam do mesmo ano (série) ou de anos subsequentes, pois desta forma aumenta-se a probabilidade de se encontrar professores em comum entre diferentes turmas (por isso, seleciona-se turmas em sequência, já que se pressupõe que as instâncias apresentem as turmas ordenadas por ano).

#### 4.3 Resolução do subconjunto da instância

Para otimizar a grade horária apenas das turmas selecionadas (*Passo 3*), adiciona-se à *formulação completa* um conjunto de restrições que tem por finalidade atribuir às variáveis de decisão das disciplinas que pertençam às turmas não selecionadas o valor "1", caso este seja o valor da solução imediatamente anterior. Para tanto, considera-se que a solução anterior resulte em  $x_{sdp}^*$ . O que se está propondo, nada mais é do que tomar os valores da solução imediatamente anterior, restrita às turmas que não foram selecionadas no *Passo 2*. Deste modo, para resolver o subconjunto desta grade horária, deve-se de adicionar à *formulação completa* a seguinte restrição:

$$x_{sdp} \geq x_{sdp}^* \quad \forall s \in S_c, c \in C \setminus C^*, d \in D, p \in P \quad (18)$$

A adição do conjunto de restrições (18) à *formulação completa* será chamada de *formulação estendida*. Assim, o pseudocódigo do algoritmo DCH ilustra a visão geral desta heurística.

Caso o algoritmo passe  $n$  vezes pelo laço sem qualquer melhora da função objetivo  $Z$ , dá-se por finalizado o processamento, e toma-se como resultado final a solução obtida até então.

---

**Algoritmo 1:** DCH: Heurística divisão-e-conquista

---

**Entrada:** Instância de dados, tamanho do subconjunto de turmas  $n$  e critério de parada  $k$   
**Saída:** vetor de soluções  $x_{sdp}$  e  $Z_{melhor}$

$i \leftarrow 0$   
 $x_{sdp}^* \leftarrow$  executa *formulação compacta* no *MIP solver*  
 $x_{sdp}^{last} \leftarrow x_{sdp}^*$   
 calcula  $Z$  de  $x_{sdp}^*$ ,  $\forall s \in S_c, c \in C \setminus \{\emptyset\}, d \in D, p \in P$  via *formulação estendida* no *MIP solver*  
 $Z_{last} \leftarrow Z$   
**enquanto**  $i < k - 1$  **faça**  
      $C^* \leftarrow$  procedimento *SSC*( $n$ )  
     calcula  $Z$  de  $x_{sdp}^*$ ,  $\forall s \in S_c, c \in C \setminus C^*, d \in D, p \in P$  via *formul. estendida* no *MIP solver*  
     **se**  $Z \geq Z_{last}$  **então**  
          $i \leftarrow i + 1$   
          $Z \leftarrow Z_{last}$   
          $x_{sdp}^* \leftarrow x_{sdp}^{last}$   
     **senão**  
          $i \leftarrow 0$   
          $x_{sdp}^{last} \leftarrow x_{sdp}^*$   
     **fim se**  
**fim enqto**  
 $Z_{melhor} \leftarrow Z$   
 $x_{sdp} \leftarrow x_{sdp}^*$   
**retorna**  $Z_{melhor}$  e  $x_{sdp}$

---

## 5 Resultados computacionais

Testes computacionais foram realizados para avaliar a heurística proposta. Todos os algoritmos foram implementados em C++ a partir do ambiente de programação do *Microsoft Visual Studio 2010 Professional* combinado com o *MIP solver* IBM ILOG CPLEX Optimization Studio V12.4 com as configurações *default*. O equipamento utilizado foi um notebook Dell Vostro 3300 com processador Intel<sup>©</sup> Core i5<sup>TM</sup> M520 2.4GHz, 4GB de memória RAM e sistema operacional *Microsoft<sup>©</sup> Windows 7 Enterprise* 64 bits.

### 5.1 Instâncias de dados e parâmetros

Neste trabalho não foi possível utilizar as instâncias de *benchmark* de Santos et al. (2012), pois elas não consideram o conjunto  $L$  (locais de aula). Os experimentos avaliaram dados de sete escolas privadas de ensino fundamental e médio, esparsas geograficamente pelo Brasil. Os dados são reais e representam com fidedignidade todo o conjunto de informações que as escolas consultadas tinham à disposição para construir as grades horárias do ano de 2012. A Tabela 1 apresenta a origem e as dimensões das instâncias, que estão disponíveis em <https://dl.dropbox.com/u/84981398/STP/BR12.zip>. Para que não se fique restrito às dimensões dos conjuntos de dados, calculou-se o número de variáveis que são consideradas no processamento de cada uma das instâncias. A coluna *Nº de Variáveis* da Tabela 1 representa esse valor, que vai além de uma simples contagem de variáveis de decisão, pois considera a intersecção dos conjuntos que representam uma verdadeira possibilidade de alocação.



Tabela 1: Origem e dimensões das instâncias

Instância	Estado	C	T	S	L	D	P	I	Nº de Variáveis
BRRJ12	Rio de Janeiro	12	24	140	18	5	7	2	2.321
BRCE12	Ceará	28	35	346	28	5	12	2	6.621
BRRS12	Rio Grande do Sul	28	42	234	25	5	9	2	3.781
BRPI12	Piauí	28	46	391	20	6	12	2	7.454
BRPR12	Paraná	35	47	395	32	5	11	2	9.364
BRMG12	Minas Gerais	36	68	476	29	5	11	2	11.613
BRSC12	Santa Catarina	45	61	410	30	5	11	2	8.553

## 5.2 Discussão dos resultados

Durante o processo de coleta de dados, verificou-se, com os gestores dessas escolas, quais são suas principais preocupações ao construir suas grades horárias. A maioria destacou a importância de atender aos requisitos de aulas duplas, por ser relevante sob o ponto de vista pedagógico. Porém, a maior ênfase foi dada aos esforços em reduzir o número de dias de trabalho, seguida pela redução do número de janelas dos professores. No Brasil, como é comum que professores trabalhem em mais de uma escola, há uma preocupação natural em compactar ao máximo os dias de trabalho. Adicionalmente, na maior parte das escolas privadas, os professores trabalham como horistas, isto é, eles são remunerados de acordo com o número de horas trabalhadas. Como a legislação exige que a escola remunere as janelas de cada professor, as escolas almejam minimizar ao máximo sua ocorrência. Já nas escolas públicas, em que os professores estão à disposição da escola durante um turno inteiro, por uma questão de organização pessoal e qualidade de vida, professores preferem lecionar sem horários vagos entre suas aulas, exceção feita ao intervalo que ocorre no meio do turno de trabalho. Por esta razão, definiu-se as seguintes penalidades para cada uma das restrições fracas:  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 3$  e  $\gamma = 1$ .

Para fins de comparação, processou-se a *formulação completa* no *MIP solver*, definindo como critério de parada um tempo de execução de três horas. No primeiro bloco da Tabela 2 tem-se os resultados do processamento de cada instância no *MIP solver*, apresentando o valor obtido de  $Z$ , além do *Lower Bound (LB)* e *gaps* projetados pelo próprio *MIP solver*.

Para gerar uma solução inicial para que o algoritmo DCH pudesse melhorá-la, processou-se a *formulação compacta* no *MIP solver*, conforme proposto na Seção 4.1. Os resultados das maiores instâncias (BRPI12, BRPR12, BRMG12 e BRSC12) confirmam a eficiência desta proposição, pois, de fato, as restrições fortes não são as responsáveis por inviabilizar o uso puro do *MIP solver* em instâncias que possuem elevado número de variáveis de decisão e restrições. Logo, ao se retirar os conjuntos de restrições responsáveis pelas restrições fracas, constata-se que, por exemplo, na maior instância (BRSC12), o tempo médio de processamento não excede 8,1 segundos. De forma surpreendente, o valor da função objetivo  $Z$  a partir do resultado oferecido pelo processamento da *formulação compacta* ficou muito próximo ou até ficou mais baixo do valor obtido após 3 horas de processamento da *formulação completa* no *MIP solver* (considerando as quatro maiores instâncias).

Definiu-se  $k = 3$  como critério de parada do algoritmo DCH. Logo, se em três laços consecutivos o algoritmo não conseguir melhorar a solução corrente, o processamento será encerrado. Para definir o tamanho do subconjunto de turmas ( $n$ ), testou-se com  $n = 3$  e  $n = 6$ . De acordo com as hipóteses consideradas neste estudo, um  $n$  menor resultaria num tempo de processamento mais rápido, pois o *MIP solver* teria um conjunto de dados reduzido para encontrar uma solução, enquanto que, para um  $n$  maior, o *MIP solver* teria um espaço de soluções maior para percorrer, o que, teoricamente, permitiria um valor de função objetivo  $Z$  de melhor qualidade. O segundo bloco da Tabela 2 apresenta a execução do algoritmo DCH para todas as sete instâncias. Neste experimento, o algoritmo foi processado 30 vezes para cada instância. Para as quatro maiores instâncias (BRPI12,

Tabela 2: Resultados dos processamentos

		BRRJ12	BRCE12	BRRS12	BRPI12	BRPR12	BRMG12	BRSC12
<b>MIP solver</b>								
Z		457	980	1.151	1.770	2.239	2.886	2.479
LB		397	759	860	764	1.043	1.062	1.306
gap		13,2%	22,5%	25,3%	56,8%	53,4%	63,2%	47,3%
tempo (s)		10.799	10.798	10.800	10.797	10.797	10.796	10.797
<b>Algoritmo DCH</b>								
Solução inicial								
Z		607	1.483	1.584	1.715	2.217	2.891	2.483
gap		34,6%	48,8%	45,7%	55,5%	53,0%	63,3%	47,4%
tempo (s)	média	1,2	4,5	2,2	4,6	7,6	8,4	8,1
	melhor	1,0	3,7	1,8	3,6	6,8	7,0	7,2
Solução final $n = 3$								
Z	média	486	1.059	1.296	1.182	1.823	1.997	1.986
	melhor	463	946	1.192	1.100	1.644	1.606	1.791
	desvio-padrão	17,7	70,5	55,8	69,6	101,7	269,3	139,4
gap	média	18,3%	28,3%	33,6%	35,4%	42,8%	46,8%	34,2%
	melhor	14,3%	19,8%	27,9%	30,5%	36,6%	33,9%	27,1%
tempo (s)	média	277,7	275,4	208,1	640,0	403,9	944,1	625,0
	melhor	34,3	80,1	50,4	149,9	139,9	371,4	123,5
	desvio-padrão	136,0	139,6	102,0	234,1	194,2	467,4	334,4
Solução final $n = 6$								
Z	média	475	992	1.209	1.118	1.662	1.949	1.868
	melhor	446	884	1.076	1.030	1.406	1.660	1.724
	desvio-padrão	21,6	79,2	55,1	60,9	135,0	214,2	84,2
gap	média	16,4%	23,5%	28,9%	31,7%	37,2%	45,5%	30,1%
	melhor	11,0%	14,1%	20,1%	25,8%	25,8%	36,0%	24,2%
tempo (s)	média	523,7	641,9	636,7	1.090,6	781,8	957,7	1.197,5
	melhor	258,0	129,7	350,6	340,2	139,2	345,7	438,0
	desvio-padrão	173,4	255,7	277,4	390,6	312,6	414,5	480,4

BRPR12, BRMG12 e BRSC12), o processamento do algoritmo DCH apresentou sensível melhora no valor da função objetivo  $Z$  em relação ao valor obtido pelo processamento da *formulação completa* no *MIP solver*. Se a maior instância for tomada como referência (BRSC12), considerando os valores médios dos processamentos com  $n = 6$ , o *gap* cai de 47,4% para 30,1% num tempo de execução praticamente dez vezes menor (1.197,5 s contra 10.797 s). Se for considerado os valores médios dos processamentos com  $n = 3$ , ainda assim o *gap* cai sensivelmente (de 47,3% para 34,2%), num tempo de execução quase 20 vezes menor.

No entanto, nas três primeiras instâncias (BRRJ12, BRCE12 e BRRS12), a heurística DCH não representou vantagem em relação à *formulação completa* processada no *MIP solver*. Isso é explicado pela dimensão das instâncias. Duas destas instâncias (BRCE12 e BRRS12) têm o mesmo número de turmas ( $|C|$ ) de uma das instâncias dentre as maiores (BRPI12), porém o tamanho desse conjunto não é, isoladamente, definidor da dimensão do STP da escola. Verificando a Tabela 1, pode-se constatar que, apesar do mesmo número de turmas, há uma importante diferença no valor de  $N^\circ$  de Variáveis, o que coloca a instância BRPI12 entre as maiores. A Figura 1 apresenta o gráfico dos resultados obtidos dos *gaps* para os processamentos que usaram o *MIP solver* e a heurística (DHC) de acordo com o valor de  $N^\circ$  de Variáveis. Claramente, pode-se observar que, enquanto o uso do *MIP solver* apresenta melhores soluções (*gaps* menores) para instâncias pequenas, à medida que se aumenta as dimensões das instâncias, seu uso será desvantajoso em comparação à heurística proposta.

A Figura 2 apresenta as evoluções do valor da função objetivo (a) e das três restrições fracas S1–S3 (b) durante a execução da heurística DCH para a instância BRSC12 com  $n = 6$ . Enquanto a Figura 2a mostra claramente a tendência do valor da função objetivo  $Z$  aproximar-se do *Lower Bound* (LB) calculado pelo *MIP solver*, a Figura 2b demonstra que a heurística proposta diminui a quantidade de dias de trabalho, janelas e aulas duplas não atendidas.

Cabe destacar, no entanto, que, percentualmente, o número de dias de trabalho apresentou redução pouco expressiva. Isso ocorreu porque as instâncias que foram fornecidas pelas escolas continham os dados de disponibilidade do professor limitados aos dias em que realmente traba-

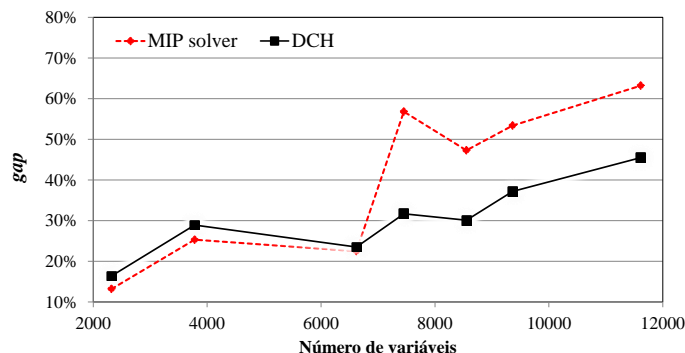


Figura 1: Comportamento do gap em relação à dimensão das instâncias

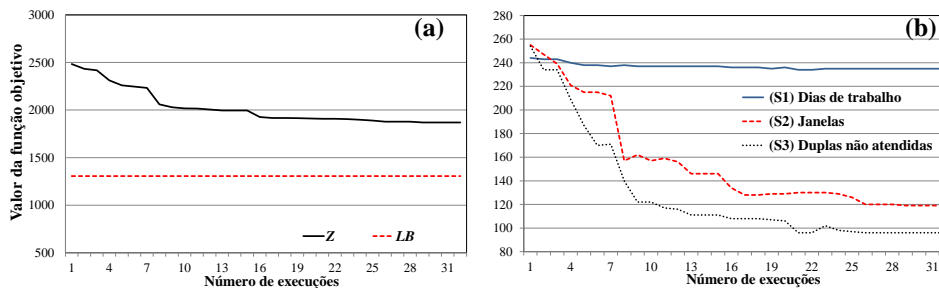


Figura 2: Evolução ao longo do processamento

lharam. Isto é, se um determinado professor tinha disponibilidade de trabalho na segunda, terça e quarta-feira, mas foi alocado apenas na segunda e na quarta-feira, a escola informou apenas estes dois últimos dias como disponíveis. Isso não representou problema para esta pesquisa, pois apenas aumentou as restrições horárias de cada professor, o que dificulta ainda mais o problema. Porém, a consequência disso, é que o número de dias de trabalho não foi reduzido substancialmente.

## 6 Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se uma nova formulação para o STP, baseada no sistema educacional brasileiro. Foi proposta, ainda, uma heurística baseada na estratégia de divisão-e-conquista para resolver pequenas partes de uma instância maior, por programação linear inteira. Os experimentos computacionais, que foram realizados com dados reais de escolas brasileiras, comprovaram a eficiência da heurística para instâncias médias e grandes. Ainda assim, acredita-se que o modelo deva ser testado com outras técnicas, a fim de comparar com esta, seja sob o ponto de vista de desempenho como de qualidade da solução.

## Referências

Abramson, D. (1991). Constructing school timetables using simulated annealing: sequential and parallel algorithms. *Management Science*, 37, 98-113.

- Alvarez-Valdes, R., Crespo, E. e Tamarit, J. M. (2002). Design and implementation of a course scheduling system using tabu search. *Journal of the Operational Research Society*, 137, 512-523.
- Alvarez-Valdes, R., Martin, G. e Tamarit, J. M. (1996). Constructing good solutions for the spanish school timetabling problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1203-1215.
- Beligiannis, G. N., Moschopoulos, C. e Likothanassis, S. D. (2009). A genetic algorithm approach to school timetabling. *Journal of the Operational Research Society*, 60, 23-45.
- Bornia Poulsen, C. J. e Bandeira, D. L. (2012). Aplicação de um modelo para a construção de grades horárias escolares baseado na meta-heurística simulated. In: *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2012, Rio de Janeiro. Anais do XVI CLAIO/XLIV SBPO*.
- Carrasco, M. P. e Pato, M. V. (2004). A comparison of discrete and continuous neural network approaches to solve the class/teacher timetabling problem. *European Journal of Operational Research*, 153, 65-79.
- CCT/RS. (2013). *Convenção coletiva de trabalho 2013/2013*. Disponível em <http://www.sinpro-rs.org.br/convencoes/sindepars2013.asp>
- Colomi, A., Dorigo, M. e Maniezzo, V. (1998). Metaheuristics for high school timetabling. *Computation Optimization and Applications*, 9, 275-298.
- Cooper, T. e Kingston, J. (1993). The solution of real instances of the timetabling problems. *The Computer Journal*, 36, 645-653.
- Dorneles, A. P., Araújo, O. C. B. e Buriol, L. S. (2012). The impact of compactness requirements on the resolution of high school timetabling problem. In: *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2012, Rio de Janeiro. Anais do XVI CLAIO/XLIV SBPO*.
- Elmohamed, M. A. S., Coddigton, P. e Fox, G. (1997). A comparison of annealing techniques for academic course scheduling. *Practice and Theory of Automated Timetabling (PATAT 1996)*, 92-114.
- Even, S., Itai, A. e Shamir, A. (1976). On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computing*, 5(4), 691-703.
- Gans, O. B. (1981). A computer timetabling system for secondary schools in the netherlands. *European Journal of Operational Research*, 7(1), 175-182.
- Gotlieb, C. (1962). The construction of class-teacher timetabling. *Proceeding of the IFIP Congress*, 73-77.
- Jacobsen, F., Bortfeldt, A. e Gehring, H. (2006). Timetabling at german secondary schools: Tabu search versus constraint programming. *E. K. Burke, H. Rudová (Eds.): PATAT 2006*, 439-442.
- Marte, M. (1998). *Constraint-based grammar school timetabling - a case study*.
- Post, G., Ahmadi, S., Daskalaki, S., Kingston, J. H., Kyngas, J., Nurmi, C. e Ranson, D. (2012). An xml format for benchmarks in high school timetabling. *Annals of Operational Research*, 194, 385-397.
- Santos, H. G., Uchoa, E., Ochi, L. S. e Maculan, N. (2012). Strong bounds with cut and column generation for class-teacher timetabling. *Annals of Operational Research*, 194, 399-412. doi: 10.1007/s10479-010-0709-y
- Valouxis, C. e Housos, E. (2003). Constraint programming approach for school timetabling. *Computer & Operational Research*, 30, 1555-1572.
- Vasquez, M. e Hao, J. (2003). Upper bounds for the spot 5 daily photograph scheduling problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, 7, 87-103.
- Wright, M. (1996). School timetabling using heuristic search. *Journal of the Operational Research Society*, 47, 347-357.