

## Teste de carregamento axial para um elemento representativo do concreto com agregados elípticos

**Guilherme Augusto Pianezzer**  
PPGMNE - UFPR\*  
guilherme.pianezzer@hotmail.com

**Fábio André Negri Balbo**  
PPGMNE - UFPR\*  
andrebalbo@gmail.com

**Eloy Kaviski**  
Departamento de Hidráulica - UFPR\*  
eloy.dhs@ufpr.br

**Liliana Madalena Gramani**  
Departamento de Matemática - UFPR\*  
l.gramani@gmail.com

**Marcelo Rassy Teixeira**  
CAMTUC/UFPA\*\*  
mrt@ufpa.br

\*Centro Politécnico, Jardim das Américas, CEP 81531-990 - Curitiba - Paraná.

\*\*Campus Universitário de Tucuruí, Vila Permanente, CEP 68464-000 - Tucuruí - Pará.

### RESUMO

O concreto, na escala mesoscópica, é considerado um material bifásico composto de argamassa e agregado graúdo. Um modelo para geração do elemento representativo do concreto é proposto. Neste modelo, cada agregado é aproximado por uma elipse, cujas dimensões são obtidas a partir da curva granulométrica do material. Para a geração, alguns cuidados com o posicionamento dos agregados elípticos são necessários. Assim, a intersecção entre os agregados também é considerada. Por conta disto, faz-se uma discussão de como tratar a detecção de colisão das elipses geradas no algoritmo desenvolvido. Na sequência, sujeita o elemento representativo do material gerado a um teste de carregamento axial, para descrever as respostas que o material possui.

**PALAVRAS-CHAVE.** Elemento Representativo do Concreto. Intersecção de Elipses. Detecção de Colisão. Teste de carregamento axial.  
SIM - Simulação.

### ABSTRACT

Concrete, in mesoscopic scale, is a biphasic material compound by mortar and aggregate. A model for generation of representative element's concrete is proposed. In this model, each aggregate is approximated by an ellipse, where their dimensions are obtained by material's grading curve. In the generation, some cares are needed. So, intersection between aggregates is considered. Because of that, this article brings a discussion of how works with collision detection of created ellipses in algorithm developed.

**KEY-WORDS.** Representative Element's Concrete. Ellipses's Intersection. Collision Detection.  
SIM - Simulation.

## 1 Introdução

Inovações metodológicas em modelagem e simulação dos materiais é uma das buscas essenciais para trazer um aprimoramento no desenvolvimento de novos materiais e o aperfeiçoamento dos já existentes. Percebendo isto, a Fundação Nacional de Ciência e Tecnologia dos Estados Unidos emitiu um relatório denominado SBES (*Blue Ribbon Panel on Simulation-Based Engineering Science*) (SCIENCE, 2006), relatando a importância do desenvolvimento da área de ciência e tecnologia, principalmente no desenvolvimento dos materiais.

Em especial, obras marcantes da sociedade se beneficiam com este tipo de estudo. Conta-se nessas obras, as barragens de usinas hidrelétricas, como a Usina Hidrelétrica de Tucuruí (UHE Tucuruí) e a Usina Hidrelétrica de Itaipu (UHE Itaipu), que são sustentadas por mais de 20 milhões de metros cúbicos de concreto (TEIXEIRA, 2011).

Para preservar este tipo de estrutura é necessário compreender e modelar modelos mecânico-matemático, também conhecidos como modelos constitutivos, que descrevem o comportamento tensão-deformação do material. Entretanto, tais modelos se baseiam em leis físicas complexas que envolvem um número elevado de variáveis e que se tornam inviáveis computacionalmente.

Esta complexidade se torna mais evidente ao observar as características que o concreto possui na escala mesoscópica. Para essa escala, o concreto é considerado como um material bifásico composto por argamassa e agregado graúdo (CALLISTER, 2006) e cada interação existente entre os agregados e a argamassa deve ser processada computacionalmente. Porém, mesmo sendo um grande desafio, os avanços nessa área são expressivos e crescentes, em relação a estudos em que o concreto era visto na escala macroscópica, como um material homogêneo.

Vários trabalhos que exploraram este desafio e que representam este avanço na área podem ser citados, como Z.P.Bazant *et al.* (1990), Wittmann, Roelfstra e Sadaouki (1984), Wang, Kwan e Chan (1999), Wriggers e Moftah (2006) e mais recentemente Teixeira (2011). No geral, a possível solução para este problema tem sido desenvolvida a partir da criação de um elemento representativo do concreto que tem, na sua composição, agregados com diversas formas e tamanhos.

Nos últimos anos, evidenciado pelo Science (2006), surgiu a necessidade de remodelar problemas computacionais a partir de outras escalas de grandeza. A tirania das escalas (“The Tyranny of Scales”), termo cunhado pelos autores do relatório, tem se tornado um desafio aos modelos de simulação que ultimamente estão sofrendo alterações para considerar e compreender as variações encontradas em cada escala específica.

O objetivo deste trabalho é discutir e gerar computacionalmente os agregados graúdos em formato elíptico, a partir da curva granulométrica do material e após isto, sujeitá-lo a um teste computacional de carregamento axial. O conteúdo deste artigo está desenvolvido através de mais algumas seções. Na seção 2 são discutidos alguns conceitos essenciais para a compreensão do trabalho, assim como uma revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo a geração dos agregados. Na seção 3 discute-se o algoritmo de geração de agregados e alguns desafios encontrados em sua implementação. A seção 4 apresenta os resultados obtidos e a comparação com aqueles encontrados na literatura.

## 2 Breve Revisão de Literatura

### 2.1 Características do Concreto

O concreto é um material muito utilizado como material de construção por conta da sua boa relação custo-benefício, apresentando uma boa durabilidade e resistência (WRIGGERS; MOFTAH, 2006). Na construção civil, ele é amplamente utilizado nas fundações, em colunas, em vigas, em lajes, em paredes e em outros elementos. Dentre os seus pontos positivos pode-se citar a excelente resistência a água, a facilidade com a qual elementos estruturais de concreto podem ser obtidos através de uma variedade de formas e tamanhos e a sua rápida disponibilidade para o uso.

Além disto, o concreto foi um fator decisivo na elaboração de famosas estruturas ao longo do nosso país, como o Cristo do Corcovado no Rio de Janeiro, a Ponte do Galeão na Baía de Guanabara, a ponte sobre o Rio das Antas no Rio Grande do Sul, a Usina Hidrelétrica de Itaipu na fronteira entre Brasil e Paraguai, a Usina Hidrelétrica de Tucuruí em Tucuruí, entre outras (VASCONCELOS, 1985).

O concreto é um material poroso, heterogêneo, que pode ser estudado em diferentes escalas: Nanoscópica, microscópica, mesoscópica e macroscópica (TULIO, 2001). Neste estudo será considerada a escala mesoscópica, que é uma escala com dimensões maiores que a das moleculares, de modo que o domínio possui propriedades macroscópicas, mas com dimensões menores que a dimensão macroscópica (TEIXEIRA, 2011).

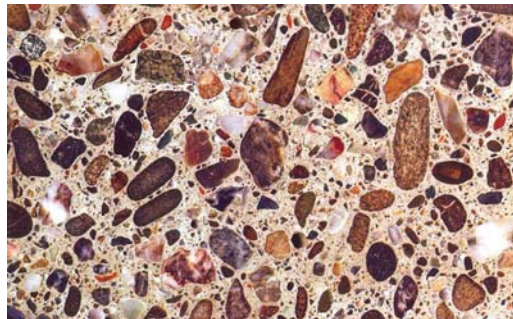


Figura 1: Heterogeneidade do concreto (MEHTA; MONTEIRO, 2008)

Quando analisada a mesoestrutura ( $\simeq 10^{-3}$  m) do concreto, percebe-se a presença de dois constituintes: a pasta de cimento endurecida (Argamassa) e as partículas de agregado graúdo, como pode ser observada na Figura 1. Na análise, também percebe-se a presença de vazios e defeitos de aderência que justificam a heterogeneidade do concreto.

Para estudar o comportamento do concreto é preciso lidar com esta heterogeneidade e para isso surge a necessidade de criar um elemento de concreto representativo. Com este elemento representativo é possível estudar as tensões e deformações, resultantes dos efeitos que o concreto está sujeito, como a retração, a fluência e as tensões de carregamento.

Para modelar este elemento representativo, baseia-se na curva granulométrica dos agregados graúdos presentes no concreto.

## 2.2 Curva Granulométrica do Agregado Graúdo

Segundo Pinto (2008), a curva granulométrica de um solo é uma função de distribuição de partículas do solo. Todos os solos, contém partículas de diferentes tamanhos em proporções variadas. Essa função pode ser obtida por peneiramento, para amostras secas ou através do processo de sedimentação dos sólidos no meio líquido.

O objetivo do peneiramento é separar os sólidos, em um solo, baseado em tamanhos. Para isso, utiliza-se uma série de peneiras de abertura de malha conhecidas que ao ser utilizada, determina a porcentagem em peso retida ou passante em cada peneira.

Estudar o solo a partir da sua curva granulométrica permite um melhor aproveitamento de cada material para utilização. Os agregados graúdos, presentes no concreto, também podem ser estudados a partir de sua curva granulométrica. Para a criação do concreto de cimento, agregados finos requerem menos cimento para cobrir os vazios vistos na mesoestrutura, diminuindo a quantidade de água por unidade de volume no concreto, diminuindo sua permeabilidade e aumentando a resistência ao deixá-lo menos exposto a reações químicas indesejáveis. O concreto utilizado em estradas requer um agregado que apresente uma curva granulométrica com agregados bem graduados, fazendo com que a quantidade de concreto utilizado seja menor (PINTO, 2008).

## 2.3 Geração da Mesoestrutura do Concreto

O cálculo das tensões que influenciam no comportamento do concreto em nível mesoscópico requer a geração de uma estrutura de agregados graúdos, onde a forma, o tamanho e a distribuição dos agregados simulam um concreto real do ponto de vista estatístico.

Segundo Wriggers e Moftah (2006), a geração da configuração aleatória de partículas agregadas deve satisfazer as características básicas do material real. Com este objetivo, a distribuição deve ser tal que as partículas sejam o máximo possível macroscopicamente homogêneas no espaço. A ideia principal deste trabalho é escolher partículas de agregado graúdo de uma fonte, cuja distribuição segue uma certa curva representativa do material e além disso alocar cada partícula seguindo algumas regras de posicionamento, como, por exemplo, não haver intersecção entre os agregados.

Cada forma das partículas depende do tipo de agregado escolhido. Vários meios de caracterizar a geometria dos agregados já foram publicados. Wittmann, Roelfstra e Sadaouki (1984) e posteriormente Wang, Kwan e Chan (1999) criaram um método para gerar os agregados graúdos baseando-se na expressão:

$$r \equiv r(\theta) = A_0 + \sum_{j=1}^m A_j \cos(j\theta + \alpha_j), \quad (1)$$

onde  $A_0$  representa o raio médio do agregado obtido a partir da curva granulométrica,  $A_j$  representa a amplitude da frequência,  $j\theta$ , de Fourier,  $m$  o total de vértices criado e  $\alpha_j$  o ângulo de fase. O resultado obtido foi a aproximação do agregado por um polígono de  $m$  vértices.

Em trabalhos mais recentes, como Wriggers e Moftah (2006) e Teixeira (2011), cada agregado foi aproximado por um círculo (para o caso 2-D) ou por esferas (para o caso 3-D). Nesses trabalhos, os raios médios dos agregados também foram obtidos a partir da curva granulométrica.

Nesses trabalhos, o cálculo das tensões e deformações que o concreto está sujeito foi realizado através do método dos elementos finitos (WRIGGERS; MOFTAH, 2006), (WITTMANN; ROELFSTRA; SADAOUKI, 1984) e (WANG; KWAN; CHAN, 1999), ou através do método de Galerkin livre de elementos (TEIXEIRA, 2011).

Este trabalho traz uma mudança na geração dos agregados ao aproximar cada agregado por elipses na representação 2-D.

### 3 Materiais e Métodos

A distribuição de tamanhos dos agregados, dado pela sua curva granulométrica, é representada por uma lista de valores discretos para cada abertura da peneira. A tabela a seguir mostra um exemplo de um ensaio realizado para um tipo de agregado, que será adotado neste trabalho.

Tabela 2: Resultado da análise do peneiramento. (WRIGGERS; MOFTAH, 2006)

Abertura da Peneira (mm)	Porcentagem total Retida (%)
12.70	0
9.50	23
4.75	74
2.36	100

Sendo  $P(d)$  a porcentagem total retida na peneira de diâmetro  $d$ , pode-se calcular a área de material reservado para a seção específica entre duas peneiras:

$$A_p[d_s, d_{s+1}] = \frac{P(d_{s+1}) - P(d_s)}{P(d_{max}) - P(d_{min})} a_p A, \quad (2)$$

onde  $A_p[d_s, d_{s+1}]$  é a área de material reservado para a seção específica entre as peneiras  $d_s$  e  $d_{s+1}$ ,  $A$  é a área total do elemento representativo do concreto e  $a_p$  é a fração de área que os agregados ocupam.  $a_p$  é um parâmetro importante do programa que pode ser moldado a partir de algumas grandezas físicas do concreto, como densidade e massa.

Para o caso de elementos circulares, percebe-se, experimentalmente, que caso o agregado passe por uma peneira  $k$ , mas seja barrado pela peneira seguinte,  $k + 1$ , então o diâmetro do agregado estará contido entre o diâmetro da peneira menor  $d_{k+1}$ , inferiormente e pelo diâmetro da peneira maior  $d_k$ , superiormente. Portanto, pode-se estimar o diâmetro do agregado através da relação:

$$d = d_{k+1} + \eta(d_k - d_{k+1}), \quad (3)$$

onde  $\eta$  é um número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1.

Entretanto, para o caso de elementos elípticos, suas dimensões (semi-eixo maior ( $A$ ) e semi-eixo menor ( $B$ )) não são totalmente determinadas pelo barramento ocasionado pela peneira. Caso o agregado passe pela peneira  $k$ , mas seja barrada pela peneira  $k + 1$ , a única informação que pode-se concluir é que o semi-eixo maior está contido no intervalo entre  $d_{k+1}$  e  $d_k$ . A princípio nenhuma informação sobre o semi-eixo menor pode ser obtida, já que ele pode pertencer ao intervalo entre zero e  $A$ . Para contornar essa dificuldade discute-se a possibilidade de incluir estudos sobre a excentricidade do agregado elíptico, que irá ajudar no aprimoramento do intervalo de  $B$  ao aproximar o limite inferior para um valor mais real.

Os parâmetros que definem as elipses para esta simulação são  $\theta_i$ , que representa o ângulo que o semi-eixo maior faz com a reta que une o centro das duas elipses,  $A_i$  e  $B_i$ , que são respectivamente o semi-eixo maior e o semi-eixo menor,  $C_i$  é o centro da elipse  $i$ . Cada elipse gerada é armazenada através de 5 componentes: Duas componentes com a posição do centro, uma com o tamanho do semi-eixo maior, outra do semi-eixo menor e uma última componente com o ângulo que o semi-eixo maior faz com o sistema de referência.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho permite gerar e armazenar os agregados construídos, conforme ilustrado no fluxograma da Figura 2:

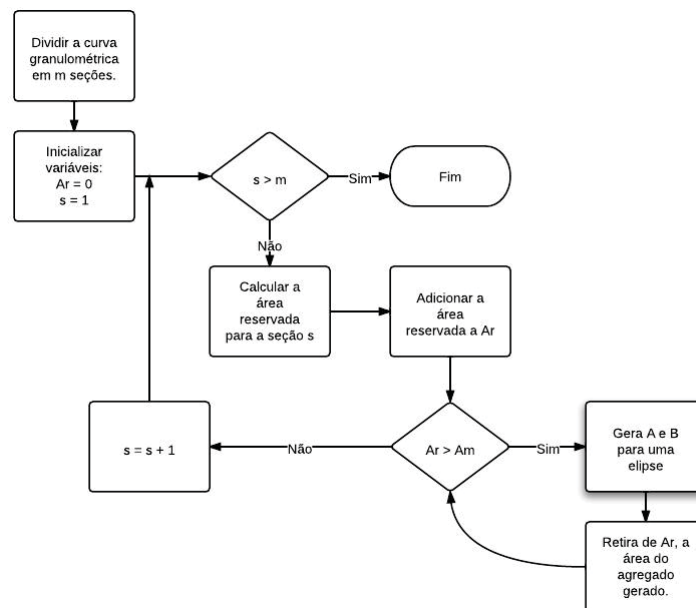


Figura 2: Algoritmo para geração dos agregados

No algoritmo da Figura 2,  $A_r$  representa a área restante que existe para a geração de agregados e  $A_m$  representa o agregado de área máxima que a seção  $s$  comporta. Portanto, enquanto houver espaço reservado para a criação do agregado elíptico de tamanho máximo daquela seção, o algoritmo o fará. Para os casos discutidos nesse trabalho adota-se  $A_m = \pi(d_s)^2$ , que representa a elipse de área máxima que pode ser gerado na seção  $s$ .

Após gerar computacionalmente tais agregados, surge a necessidade de posicioná-los. Para

isto são consideradas 2 hipóteses:

1. Os agregados devem estar inteiramente contidos no domínio do concreto.
2. Não deve existir intersecção entre os agregados.

Na literatura, o problema de inferir sobre a existência de intersecção entre duas figuras, computacionalmente, também é conhecido como detecção de colisão.

A respeito da hipótese 1, um teste simples é realizado para saber se os agregados estão inteiramente contidos no domínio do concreto. Após isto, um segundo teste é realizado para determinar se a hipótese 2 é satisfeita.

Para detectar as colisões entre os diversos agregados é necessário criar um procedimento que, ao adicionar um novo agregado na matriz de argamassa, verifique se há intersecção entre os elementos. Como os agregados no caso estudado tem a geometria elíptica pode-se pensar em calcular essas intersecções a partir de um sistema de equações que envolva as equações de cada agregado. Entretanto, como este teste será aplicado várias vezes, a resolução dos sistemas de equações possuem um custo computacional elevado. Por conta disto, novos testes, foram realizados.

Considera-se a elipse representada como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{A}$  representa uma matriz simétrica  $3 \times 3$  que guarda os coeficientes da equação geral da elipse, e  $\mathbf{x}$  representa o vetor coluna 3D das coordenadas homogêneas de um ponto no espaço euclidiano de dimensão 2. Pode-se escrever qualquer elipse, definindo a matriz  $\mathbf{A}$  como combinação dos parâmetros que definem a elipse nessa simulação.

Para realizar um teste computacionalmente mais eficiente foi usado como referência o artigo dos autores Choi, Wang e Liu (2005) que traz as demonstrações do método descrito abaixo.

No artigo, esses autores demonstram que a existência ou não de colisão, entre uma elipse  $\mathbf{A}$  e outra  $\mathbf{B}$ , pode ser determinada a partir do estudo dos sinais das raízes da equação característica,  $P(\lambda) = 0$ , onde  $P(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B})$ . O teorema demonstrado em Choi, Wang e Liu (2005) é o seguinte: Dado duas elipses representadas pela matriz  $\mathbf{A}$  e pela matriz  $\mathbf{B}$ . As duas elipses possuem intersecção se, e somente se, a equação característica não possui raízes negativas (Figura 3(a)). As duas elipses se tocam externamente, se e somente se, a equação característica tem uma raiz negativa com multiplicidade dupla (Figura 3(b)). As duas elipses estão separadas, se e somente se, a equação característica tem duas raízes negativas distintas (Figura 3(c)).

Neste trabalho, para facilitar os cálculos, as raízes dessa equação foram obtidos a partir da busca pelos autovalores da expressão  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  que é equivalente a encontrá-la pelo método,  $P(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B})$ . A figura 3 mostra o comportamento da equação característica para alguns casos de elipse.

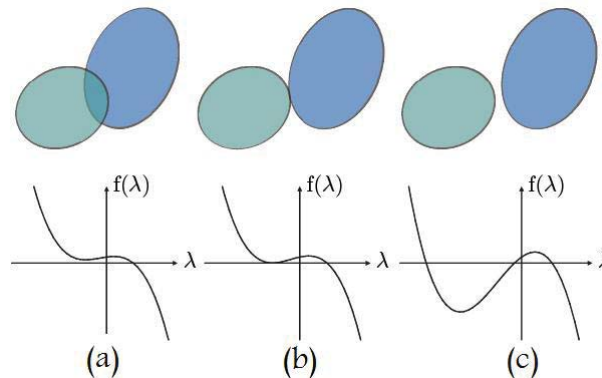


Figura 3: Comportamento da equação característica. (CHOI; WANG; LIU, 2005)

O algoritmo para o posicionamento é apresentado na Figura 4. Os parâmetros iniciais deste algoritmo são as medidas do semi-eixo maior e do semi-eixo menor de cada elipse. O algoritmo tenta posicionar cada um das elipses gerando um par de números aleatórios que representa a posição do agregado elíptico no domínio do concreto. Para esse posicionamento, os testes discutidos acima são realizados para saber se os agregados posicionados satisfazem as hipóteses colocadas.

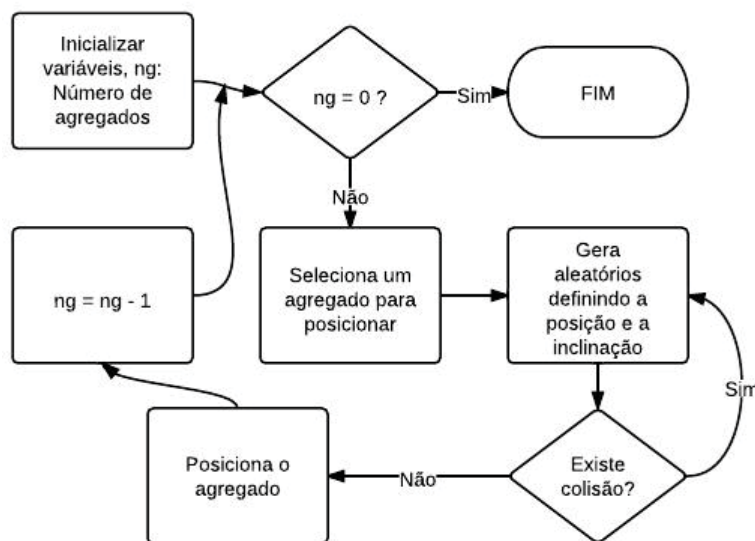


Figura 4: Algoritmo para posicionamento dos agregados

## 4 Resultados

O algoritmo gerador dos agregados foi implementado na linguagem Visual Basic .Net na plataforma Visual Studio .Net. O algoritmo para posicionamento dos agregados foi implemen-



tado no software MATLAB versão R2010. O tamanho do concreto utilizado foi fixado em  $10.000 \text{ mm}^2$ , de forma quadrada com lados 100 mm. O algoritmo para o carregamento axial foi desenvolvido no software MATLAB versão R2010 e o algoritmo para a resolução utilizado foi o Método de Galerkin Livre de Elementos.

O teste de carregamento axial para diversas frações de agregados pode ser observada nas figuras 5, 6 e 7:

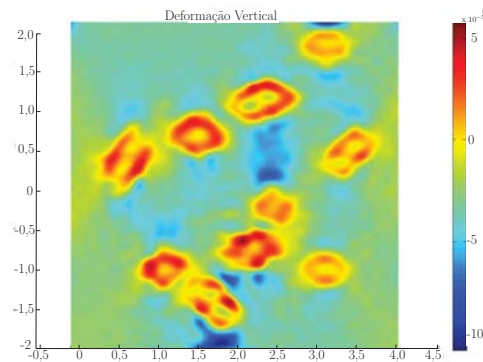


Figura 5: Mapa de deformação para RVE com 10 agregados

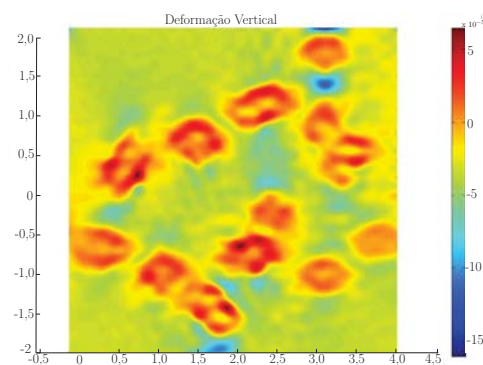


Figura 6: Mapa de deformação para RVE com 13 agregados

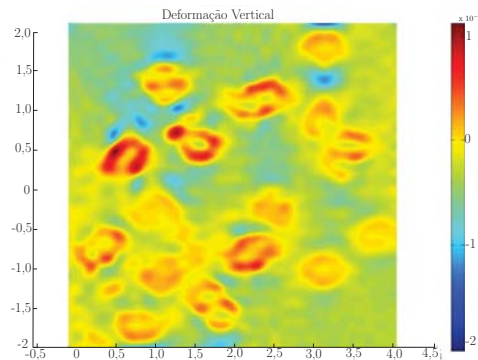


Figura 7: Mapa de deformação para RVE com 16 agregados

Tais mapas de deformação nos permitem observar a influência dos agregados na estrutura do concreto. A resistência do concreto ideal é obtida a partir da combinação da resistência dos dois materiais que o constituem: A argamassa e os agregados graúdos. Como os agregados graúdos possuem uma resistência a compressão maior que a argamassa, percebe-se que o material como um todo tem sua resistência melhorada quando possui uma concentração maior de agregados graúdos.

## 5 Conclusão

O estudo apresentado acima nos traz um bom resultado na caracterização dos materiais, entretanto, um estudo viável da caracterização dos materiais compósitos utilizados em barragens precisa levar em conta outras variáveis, além da resistência do material resultante. Por exemplo, um concreto com uma alta concentração de agregados graúdos possui uma resistência maior. Entretanto, percebe-se, que este tipo de concreto também possui uma alta concentração de espaços vazios. E estes espaços, permitem que o concreto passe por reações químicas indesejáveis, conhecidas com Reações Alkali-Agregado que degenera o concreto.

Por conta disto, faz-se necessário uma continuação deste trabalho, caracterizando a influência de outros fatores na funcionalidade final deste material.

## Referências

- CALLISTER, W. D. **Fundamentos da Ciência e Engenharia de Materiais**. São Paulo: Editora LTC, 2006.
- CHOI, Y.; WANG, W.; LIU, Y. Continuous collision detection for elliptic disks. **HKU CS Tech Report**, 2005.
- MEHTA, P.; MONTEIRO, P. **Concreto - Microestrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: IBRACON, 2008.

- PINTO, C. **Curso Básico de Mecânica dos Solos**. São Paulo: Oficina de Textos, 2008.
- SCIENCE, S.-B. E. **Report of the National Science Foundation Blue Ribbon Panel (NSF)**. [S.l.], 2006.
- TEIXEIRA, M. R. **A contribution to the numerical modeling of the heterogeneity of concrete with the elements free Galerkin method**. Tese (Doutorado), São Paulo, 2011.
- TULIO, B. N. Experimental analysis of fracture processes in concrete. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. 23, p. 545–550, 2001.
- VASCONCELOS, A. C. **O Concreto no Brasil - Recordes, Realizações, História**. São Paulo: Copiare, 1985.
- WANG, Z.; KWAN, A.; CHAN, H. Mesoscopic study of concrete i: generation of random aggregate structure and finite element mesh. **Comput**, v. 70, p. 533 – 544, 1999.
- WITTMANN, F.; ROELFSTRA, P.; SADAOUKI, H. Simulation and analysis of composite structures. **Mater,Sci,Engng**, v. 68, p. 239 – 248, 1984.
- WRIGGERS, P.; MOFTAH, S. O. Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behavior. **Elsevier**, v. 42, p. 623 – 636, 2006. ISSN 1631 - 0721.
- Z.P.BAZANT *et al.* Random particle model for fracture of aggregate of fiber composites. **J. Engng Mech.**, v. 116, n. 8, p. 1686 – 1705, 1990.