

## MÉTODO PARA CONSTRUÇÃO DE ESCALAS LINGÜÍSTICAS, BASEADAS NOS DECISORES E NO CONTEXTO DA DECISÃO

**Vanessa Silva**

Universidade Federal de Campina Grande-UFPE  
Centro de Desenvolvimento de Semi-Árido - CDSA  
Rua Luiz Grande, S/N - CEP 58540-000 – Sumé, PB, Brasil.  
e-mail: [vanessa\\_eletrica@yahoo.com.br](mailto:vanessa_eletrica@yahoo.com.br)

**Danielle Costa Morais**

Universidade Federal de Pernambuco-UFPE  
e-mail: [dcmorais@ufpe.br](mailto:dcmorais@ufpe.br)

### RESUMO

Este artigo apresenta um método para construção de escalas linguísticas baseadas nos indivíduos e nos contextos onde estas escalas serão utilizadas. O método é baseado em uma técnica que permite inserir os indivíduos e o contexto no processo de modelagem da linguagem, garantindo, com isso, que os valores semânticos dos termos linguísticos representem bem a forma como os indivíduos interpretam a linguagem no contexto onde ela está sendo aplicada. Portanto, as avaliações realizadas com estas escalas são mais representativas da opinião dos indivíduos. O método pode resultar em escalas desbalanceadas, que é uma tendência de pesquisa apontada para a área de análise de decisão linguística.

**PALAVRAS CHAVE.** Escala Linguística, Modelagem Linguística, Análise de Decisão Linguística

**Área Principal:** Outras aplicações em PO.

### ABSTRACT

This paper presents a method for construction of a linguistic scale based on the individuals and on the context, in which these scales will be used. The method is based on a technique, which allows inserting the individuals and the context into the process for modeling of the language. As a consequence, the semantic values of the linguistic terms of the scale will be a good representation of the language into the context where it is being applied. Therefore, the evaluations performed using these scales will be more representative of the opinion of the individuals. The method can imply in unbalanced scales, which is a research trend in the linguistic decision analysis area.

**KEYWORDS.** Linguistic Scale, Linguistic Modeling, Linguistic Decision Analysis.

## 1. Introdução

A abordagem linguística é adequada em diferentes situações, principalmente, quando dizem respeito a qualificação de fenômenos relacionados à percepção humana. O uso de expressões linguísticas pode tornar o processo de avaliação de alternativas mais amigável, além de melhorar a captura de informações subjetivas e incertezas intrínsecas aos julgamentos humanos (García-Lapresta *et al.*, 2009). Entretanto, passa-se a lidar com informações imperfeitas (Ma, 2006), caracterizando uma decisão com informações incompletas (Weber, 1987). Isso é decorrente da imprecisão, causada pelo uso de expressões linguísticas na definição de valores para atributos, e da incerteza, relacionada ao grau de confiança com o qual estes valores são atribuídos, que, segundo Almeida (2011), está relacionado à dificuldade do decisor em expressar suas preferências de forma completa. Existe ainda a incerteza decorrente do modelo usado para representar matematicamente a linguagem. De outro ponto de vista, pode-se dizer que, ao invés de inserir imprecisão e incerteza nas avaliações, a abordagem linguística torna possível a consideração destes aspectos que são inerentes às decisões envolvendo seres humanos. Gärdenfors e Sahlin (1988) *apud* Danielson *et al.* (2007) defendem a consideração de informações imprecisas na entrada de modelos de decisão analíticos argumentando que este tipo de informação pode carregar diferentes graus de confiabilidade epistêmica, o que não acontece quando o modelo é alimentado apenas com estimativas precisas.

Na abordagem linguística, é preciso identificar o quão adequado um termo ou expressão linguística é para transmitir a informação que se tem dentro do contexto no qual a linguagem está sendo utilizada. Em outras palavras, é preciso entender como um agente inteligente, que pode ser um humano ou um programa de inteligência artificial, usa a linguagem para transmitir a informação mais adequada à estratégia definida a partir do processo cognitivo humano ou de um algoritmo. O entendimento comum do significado da linguagem é determinante para uma boa comunicação, que por sua vez é condição necessária para uma boa decisão em grupo (Beyth-Marom, 1982). Este aspecto torna-se mais relevante quando o grupo contempla decisores com características que os diferem muito entre si, decorrentes das experiências de vida de cada um, da cultura na qual eles estão inseridos, bem como da língua nativa dos mesmos.

O uso da abordagem linguística em decisões em grupo e análise multicritério de decisão é objeto de estudo de diversos artigos científicos recentes encontrados na literatura: Herrera *et al.* (1995); Herrera e Herrera-Viedma (2000); Herrera *et al.* (2005); Xu (2004); Xu (2006); Gu e Zhu (2006); García-Lapresta (2006); García-Lapresta *et al.* (2009); García-Lapresta e Martínez-Panero (2009); Parreiras *et al.* (2010); Silva e Morais (2011). Um aspecto importante verificado nestes procedimentos é que o significado matemático dos termos não leva em consideração o contexto no qual a decisão está sendo tomada, bem como os pontos de vista dos indivíduos que terão suas preferências consideradas através destes termos. De uma forma geral, isso acontece com todas as escalas linguísticas utilizadas para avaliação qualitativa. Na prática, a consequência disso é que os indivíduos podem vir a utilizar um mesmo termo linguístico para representar opiniões diferentes, podendo comprometer a consistência do resultado. Isso é decorrente da técnica de modelagem utilizada para determinar os valores semânticos, ou seja, o significado dos termos.

Esta característica motivou o desenvolvimento do método, que será apresentado neste artigo, para construção de escalas linguísticas. O método é baseado em uma técnica que permite inserir os decisores e o contexto da decisão no processo de modelagem da linguagem, de modo que os valores semânticos dos termos linguísticos representem bem a forma como os indivíduos interpretam a linguagem no contexto onde a decisão está sendo tomada.

O artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta os fundamentos para a abordagem linguística, incluindo uma discussão sobre modelagem linguística; a Seção 3 apresenta o método para construção de escalas linguísticas; a Seção 4 apresenta um exemplo e algumas considerações sobre a escala construída; e na Seção 5, as conclusões são apresentadas.

## 2. Abordagem Linguística

Sempre que os dados, a serem explorados de um conjunto de ações, não podem ser expressos quantitativamente, quer seja pela natureza qualitativa ou pela dificuldade em se estimar um valor quantitativo para os mesmos, o uso de uma abordagem linguística para avaliar tais ações é mais apropriado. Por exemplo, a avaliação do aspecto qualidade de um carro pode ser feita por meio de termos como baixa, média, alta. Nestes casos, segundo a teoria dos conjuntos *fuzzy* (Zadeh, 1965), cada ação é uma variável linguística e as palavras ou expressões usadas nas avaliações são os valores que podem ser atribuídos à variável.

Uma variável linguística é uma variável cujos valores são palavras ou sentenças de uma linguagem natural ou artificial. Idade é uma variável linguística se os valores atribuídos a ela forem linguísticos ao invés de numéricos, por exemplo, jovem, velho, muito jovem, muito velho, ao invés de 25, 70, 20, 90; pode-se afirmar que o termo jovem desempenha o mesmo papel que o valor numérico 25, porém, é um conceito vago e impreciso.

Formalmente, uma variável linguística é caracterizada por uma quintupla  $(L, T(L), U, G, M)$ , onde  $L$  representa o nome da variável;  $T(L)$  é o conjunto de termos de  $L$ , ou seja, o conjunto de valores que podem ser atribuídos a  $L$ ;  $U$  é o universo de discurso;  $G$  é a regra sintática que gera os termos de  $T(L)$  a partir de um conjunto de termos primários finito; e  $M$  é a regra semântica que atribui um significado (valor semântico) a cada elemento  $t$  do conjunto  $T$ ; o valor semântico,  $M(t)$ , corresponde a um conjunto *fuzzy* do universo  $U$  (Zadeh, 1975).

Cada elemento do conjunto de termos  $T(L)$  é composto por um valor sintático e um valor semântico associado. O valor sintático diz respeito a uma palavra ou sentença usada para expressar uma opinião que deve possuir um significado intrínseco, o qual é representado pelo valor semântico. Segundo Herrera e Herrera-Viedma (2000), a escolha do conjunto de termos e respectivos valores semânticos deve ser uma das etapas da análise de decisão linguística; neste campo de aplicação, o conjunto de termos estabelece o domínio no qual os decisores irão avaliar as alternativas, de acordo com um ou múltiplos critérios, com base em suas preferências. Para definição do conjunto de termos é preciso definir a cardinalidade (ou granularidade) do conjunto, os valores sintáticos e os valores semânticos dos termos.

As seções seguintes descrevem a construção do conjunto de termos usados para avaliar os atributos de uma variável linguística, incluindo uma discussão sobre algumas técnicas de modelagem para determinação dos valores semânticos.

### 2.1. Conjunto de Termos Linguísticos

A totalidade de valores assumidos por uma variável linguística forma o conjunto de termos (Zadeh, 1975). O conjunto de termos estabelece o domínio no qual as avaliações serão realizadas. Portanto, este conjunto deve ser capaz de suprir os decisores com os termos linguísticos necessários para que eles possam expressar suas opiniões acerca das alternativas que estão sendo consideradas. O conjunto de termos pode possuir um número infinito de elementos, entretanto, Herrera e Herrera-Viedma (2000) defendem que a cardinalidade do conjunto  $T(L)$  deve ser pequena o suficiente para evitar níveis de precisão desnecessários e grande o suficiente para discriminar as avaliações de acordo com as percepções dos decisores. A cardinalidade (ou granularidade) deve ser compatível com a capacidade cognitiva humana de fazer diferença entre diferentes níveis de avaliação. Geralmente, a cardinalidade é ímpar, com o termo do meio representando uma avaliação aproximada de 0,5 e os demais termos são dispostos simetricamente em torno dele.

Definida a cardinalidade, o próximo passo é escolher os termos linguísticos apropriados para compor o conjunto  $T(L)$ . Usualmente, Zadeh (1975) supõe que os termos são gerados por uma gramática livre de contexto. Isto é, o conjunto de termos corresponde a um conjunto de palavras ou sentenças pertencentes a uma linguagem gerada por uma regra sintática  $G$ . Uma alternativa mais simples para a definição do conjunto de termos é usar uma abordagem baseada em uma estrutura ordenada de termos (Herrera e Herrera-Viedma, 2000). A abordagem consiste em considerar todos os termos como sendo básicos (primários), distribuí-los em uma escala de ordem completa, onde  $l_a < l_b$  se  $a < b$ . Geralmente, nestes casos, é desejável que o conjunto  $T(L)$

satisfaça também algumas características, que garantam que seus elementos sejam simetricamente ordenados em torno do termo central.

A partir de um conjunto de termos básicos, denotado por  $LA$ , é possível gerar um conjunto suficientemente grande de expressões, consideradas relevantes para avaliar os elementos de um universo  $U$ . Isso é feito aplicando-se, recursivamente, aos termos básico de  $LA$ , conectivos lógicos, tais como conjunção ( $\wedge$ ), disjunção ( $\vee$ ), negação ( $\neg$ ) e implicação ( $\rightarrow$ ).

**Conjunto de Expressões (Definição).** Um conjunto infinito contável de expressões  $LE$  é constituído pelos termos básicos de  $LA$  na sua forma original e pela aplicação recursiva de conectivos lógicos aos mesmos:

1.  $l_i \in LE \forall i = 1, 2, \dots, n$
2. Se  $\theta, \varphi \in LE$  então  $\neg\theta, \theta \wedge \varphi, \theta \vee \varphi, \theta \rightarrow \varphi \in LE$

De acordo com Perez *et al.* (2011), os valores semânticos de termos linguísticos podem ser determinados de três formas diferentes: (i) pela associação de uma escala numérica de forma implícita e direta; (ii) pela operação direta dos dados linguísticos; (iii) ou pela associação de uma escala numérica cujos valores são números *fuzzy*, determinados de forma explícita. Na primeira forma, não é levado em consideração a imprecisão inerente à linguagem. Na segunda forma, os termos linguísticos são operados de forma simbólica. Na terceira forma, aos termos linguísticos são associados conjuntos *fuzzy*, cujas funções admitem diferente níveis de pertinência de elementos ao conjunto, permitindo incorporar o aspecto da imprecisão e, conseqüentemente, representar melhor o significado matemático da linguagem. Segundo Martínez *et al.* (2010), na terceira forma, o aspecto mais importante da abordagem linguística é a definição das funções de pertinência, que atribuem valores semânticos aos termos. Isso é feito através de um processo denominado de modelagem de conceitos vagos e imprecisos, que é predominantemente realizado através da teoria dos conjuntos *fuzzy* de Zadeh (Zadeh, 1965).

## 2.2. Modelagem

A técnica de modelagem proposta por Zadeh (1975) assume que o significado dos termos é determinado a priori, atribuindo-se diretamente uma função de pertinência *fuzzy* a cada um deles. Esta abordagem requer que sejam definidos inicialmente os conjuntos *fuzzy* associados aos termos primários, assim como a regra semântica que os modifica. Sobre este aspecto Herrera e Herrera-Viedma (2000) argumenta que nem sempre o usuário tem condição de definir/escolher estes conjuntos.

A aplicação recursiva de conectivos lógicos aos termos de  $LA$  pode gerar um número suficientemente grande de expressões. Isso dificulta o processo de modelagem dado o aumento da complexidade do cálculo das funções de pertinência para cada uma das expressões. Do ponto de vista computacional a complexidade atinge também a capacidade de armazenamento dos dados. Para resolver este problema, a teoria dos conjuntos *fuzzy* propôs um mecanismo para determinação das funções de pertinência de expressões compostas com base apenas nas funções de pertinência dos termos básicos que as compõem. Este mecanismo consiste na atribuição de funções da teoria clássica a cada um dos conectivos lógicos:  $f_\wedge: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ,  $f_\vee: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ,  $f_\neg: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $f_\rightarrow: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ .

A função de pertinência  $\mu_\theta(x)$  para qualquer expressão linguística  $\theta \in LE$  e valor  $x \in \Omega$  é obtida a partir da aplicação recursiva dessas funções verdade aos termos primários, de acordo com as seguintes regras:  $\mu_{\theta \wedge \varphi}(x) = f_\wedge(\mu_\theta(x), \mu_\varphi(x))$ ,  $\forall \theta, \varphi \in LE$ ;  $\mu_{\theta \vee \varphi}(x) = f_\vee(\mu_\theta(x), \mu_\varphi(x))$ ,  $\forall \theta, \varphi \in LE$ ;  $\mu_{\theta \rightarrow \varphi}(x) = f_\rightarrow(\mu_\theta(x), \mu_\varphi(x))$ ,  $\forall \theta, \varphi \in LE$ ; e  $\mu_{\neg\theta}(x) = f_\neg(\mu_\theta(x))$ ,  $\forall \theta \in LE$ .

Uma suposição assumida pela teoria dos conjuntos *fuzzy* é que as funções acima coincidam com operadores da lógica clássica nos casos limites, quando os valores das funções são iguais a 0 ou 1. Conseqüentemente, estes operadores devem satisfazer algumas propriedades da lógica clássica, incluindo a propriedade idempotência para os operadores conjunção e disjunção. Para atender a estes requisitos, os operadores conjunção ( $\wedge$ ) e disjunção ( $\vee$ ) ficam restritos às funções  $f_\wedge(a, b) = \min(a, b)$  e  $f_\vee(a, b) = \max(a, b)$ , respectivamente; no caso do

operador negação ( $\neg$ ), há inúmeras possibilidades de funções, porém, optou-se pela função  $f_{\neg}(a) = 1 - a$ .

O mecanismo adotado por Zadeh para a determinação de funções de pertinência de expressões compostas pode reduzir o número de propriedades da lógica matemática que são satisfeitas por estas funções, o que pode resultar em inconsistências entre valor sintático e valor semântico. Dubois e Prade (1988) *apud* Lawry (2006) provam que as propriedades idempotência e princípio do terceiro excluído não podem ser satisfeitas simultaneamente. Os autores mostram que para uma função de pertinência ser, simultaneamente, verdade-funcional e idempotente, ela só pode assumir os valores 0 e 1; ou seja, esta função de pertinência não é *fuzzy*.

Existe também uma lacuna na teoria dos conjuntos *fuzzy* no que concerne ao significado dos graus de pertinência; por exemplo, a afirmação “João é alto em um grau de 0,7” transmite a informação de que João não é definitivamente um sujeito alto, embora ele esteja bem próximo disso; porém o significado do valor 0,7 é confuso. Comumente, estas medidas são erroneamente interpretadas como medidas de probabilidade, o que gera bastante críticas por parte dos estudiosos da teoria da probabilidade, por haver um erro conceitual nesta interpretação. A soma dos graus de pertinência de todos os elementos de um conjunto *fuzzy* pode ser maior que 1 (um), portanto, este conjunto não é uma distribuição de probabilidade (Ma, 2006).

Visando preencher estas lacunas Lawry (2004) sugere uma abordagem alternativa para a modelagem de conceitos vagos e imprecisos, cuja denominação em inglês é *Label Semantics* (Lawry, 2004; Lawry, 2006). Na literatura, existem outras abordagens para a modelagem de conceitos vagos e imprecisos, sendo a maioria delas baseada no princípio da extensão adotado na lógica *fuzzy*. Martínez *et al.* (2010) fizeram um revisão da literatura, focando nas abordagens que são mais utilizadas em análise de decisão linguística.

Lawry (2004) argumenta que os humanos possuem algum mecanismo heurístico com o qual eles decidem se um conceito é ou não adequado para transmitir uma determinada informação. Ele diz também que o mecanismo varia entre indivíduos, mas que a variação é reduzida quando o grupo compartilha a mesma linguagem e o mesmo contexto cultural. O ponto de partida da abordagem de Lawry (2004) é a tentativa de reprodução do mecanismo, onde ele busca medir a percepção dos indivíduos sobre o significado da linguagem, quando utilizada num determinado contexto. O mecanismo consiste em pedir que os indivíduos selecionem termos, de um conjunto pré-definido  $LA$ , que eles consideram adequados para descrever um valor numérico conhecido  $x$ . O resultado obtido é convencionado como a forma correta de se usar os termos. Não há certeza sobre quais termos um indivíduo considera apropriados para descrever  $x$ , conseqüentemente, o respectivo conjunto de termos apropriados  $D_x \subseteq LA$  é aleatório. Com isso, é possível “codificar” o significado dos símbolos linguísticos de acordo com a forma como indivíduos de uma população utilizam estes símbolos para transmitirem informações.

A técnica de modelagem de Lawry (2004) fundamenta o método para construção de escalas linguísticas, baseadas nos decisores e nos contextos onde estas escalas serão utilizadas.

### 3. Método Proposto

O método para construção de escala linguística contempla duas etapas principais: (i) calibração e (ii) conversão. Na etapa de calibração, é realizado um procedimento para inferir de um subconjunto dos decisores os valores semânticos de termos linguísticos básicos, quando utilizados em um determinado contexto; em seguida, são determinadas as expressões linguísticas que irão compor a escala de avaliação. Na etapa de conversão, as expressões linguísticas são convertidas em índices numéricos representativos dos conjuntos *fuzzy* correspondentes aos valores semânticos das expressões.

Na calibração, um subconjunto do conjunto de decisores é selecionado afim de inferir dos mesmos os valores semânticos associados à linguagem quando utilizada no contexto no qual a decisão será tomada. Isso é feito a partir de um procedimento que verifica como os indivíduos usam termos básicos pré-definidos para descrever atributos numéricos conhecidos. Ao final desta etapa, é construído, a partir dos termos básicos, o conjunto de expressões linguísticas que será utilizado pelo grupo para avaliar as alternativas de decisão; para cada expressão é determinado o

conjunto *fuzzy* que irá representar o valor semântico da expressão. Esta etapa é dividida em quatro atividades principais: (i) Preparação do experimento; (ii) Seleção dos indivíduos; (iii) Explicação e realização do experimento; (iv) Formulação do conjunto de expressões.

### 3.1. Preparação do Experimento

A preparação do experimento, que é realizada pelo analista de decisão, diz respeito a definição da variável, cujos atributos numéricos serão avaliados pelos indivíduos através de um conjunto de termos básicos pré-definido ( $LA = \{l_1, l_2, \dots, l_t\}$ ). O conjunto de avaliações linguísticas obtido é convencionado como a forma correta de usar a linguagem na descrição de conceitos. A variável deve atender a dois requisitos: ser uma variável numérica com valores conhecidos e estar o mais relacionada possível ao contexto onde a escala será utilizada. A definição da variável é determinante para a qualidade da calibração.

O conjunto de valores numéricos deve contemplar valores que representem bem os termos de  $LA$ , garantindo que, para pelo menos um dos valores numéricos, um dos termos sejam totalmente adequados. Em outras palavras, para cada termo do conjunto  $LA$ , deve haver pelo menos um valor numérico que seja totalmente pertinente (pertinência igual a 1) ao respectivo conjunto *fuzzy*.

### 3.2. Seleção dos Indivíduos

Para a definição do grupo que participará do procedimento de calibração, o analista de decisão seleciona uma amostragem estratificada da população de indivíduos que participará do processo decisório. A população é dividida em pelo menos duas classes (estratos) de modo que indivíduos de uma mesma classe possuam características comuns. Em seguida, seleciona-se pelo menos um indivíduo de cada classe para compor a amostra estratificada da população. Esta amostra  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$  corresponderá ao grupo de indivíduos que realizará a calibração.

As classes devem refletir características dos indivíduos que os diferenciem uns dos outros e que caracterizem a heterogeneidade do grupo sob diferentes aspectos (sociais, culturais, etc.). Portanto, o analista deve criar estratos heterogêneos mais ou menos específicos, conforme as características da população. O objetivo da divisão dos indivíduos em classes é garantir que o grupo que participará do procedimento de calibração seja o mais heterogêneo possível e, conseqüentemente, garantir que o procedimento leve em consideração pontos de vista de pessoas com oportunidades e experiências cotidianas bastante diferentes.

No entanto, a definição das classes deve levar em consideração também o número total de decisores que participará do processo decisório ( $M$ ), de modo a evitar que o tamanho da amostra ( $m$ ) seja muito grande e, conseqüentemente, inviabilize o procedimento de calibração, visto que esta atividade requer uma maior interação entre o analista de decisão e os indivíduos. A restrição do tamanho da amostra ( $m$ ), que é dado pela soma dos elementos de todas as classes, também influencia na quantidade de indivíduos que são selecionados para compor cada classe, porém, deve-se garantir que cada classe possua pelo menos um elemento (indivíduo). Além disso, as classes devem possuir o mesmo número de elementos.

### 3.3. Explicação e Realização do Experimento

Após a seleção do conjunto de indivíduos o analista deve explicar sobre o experimento. Cada indivíduo irá avaliar os valores numéricos por meio de termos linguísticos básicos de um conjunto pré-definido  $LA = \{l_1, l_2, \dots, l_t\}$ , com cardinalidade  $t = 3$  ou  $t = 5$ , com o termo do meio representando uma avaliação aproximada de 0,5 e os demais termos dispostos simetricamente em torno dele, tal como {baixo, médio, alto}. A cardinalidade, ou granularidade, de  $LA$  deve ser pequena o suficiente para evitar níveis de precisão desnecessários e grande o suficiente para discriminar os valores numéricos de acordo com as percepções dos decisores. Os termos de  $LA$  devem ser capazes de modelar as preferências dos decisores no que concerne às avaliações das alternativas consideradas. Portanto, o conjunto  $LA$  deve conter termos que sejam capazes de expressar as avaliações que serão realizadas. Neste sentido, a definição dos valores sintáticos dos termos deve levar em consideração as alternativas do processo decisório, de modo que as expressões sejam compatíveis com as avaliações.

As avaliações devem corresponder à percepção que os indivíduos têm sobre o atributo de acordo com a experiência de cada um. Os indivíduos devem ser orientados sobre isso de modo a evitar que eles simplesmente apliquem os termos de forma uniformemente distribuída dentro do intervalo de valores numéricos, sem refletirem sobre quais termos de  $LA$  eles consideram adequados para descrever cada valor dentro de um contexto específico.

O experimento é realizado da seguinte forma: o analista se reúne, separadamente, com cada indivíduo do grupo  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$  e pede que ele identifique um ou mais termos de  $LA$  considerados adequados para descrever o valor numérico  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). É suposto que cada indivíduo possui sua própria regra para decidir se um determinado termo é adequado ou não para descrever um valor numérico; além disso, assume-se que tal regra seja racional, isto é, seja  $D_{x_i}^{I_j}$  um subconjunto de  $LA$ , cujos elementos são termos de  $LA$  usados pelo indivíduo  $I_j$  para descrever o valor numérico  $x_i$ ; se  $D_{x_i}^{I_j} = l_i$ , onde  $l_i \in LA$ , então  $D_{x_{i+1}}^{I_j} \geq l_i \forall l_i < l_{i+1}$ , dada a suposição de ordem completa para o conjunto de termos básicos. Ao final, terão sido realizados  $n$  experimentos, com  $m$  repetições cada. As respostas são anotadas pelo analista, onde cada uma delas é um resultado do experimento  $D_{x_i}^{I_j}$  ( $j = 1, \dots, m$  e  $i = 1, \dots, n$ ), que correspondem a termos de  $LA$ , usados por  $I_j$  para descrever o valor numérico  $x_i$ .

O experimento “selecionar um indivíduo e pedir que ele identifique termos de  $LA$  considerados adequados para descrever  $x$ ” pode ser comparado a um experimento de lançar um dado não viciado e anotar a face que ficou voltada para cima. No experimento com dados, a ação é lançar o dado e o resultado é o nome da face que ficou virada para cima após o lançamento, cujo espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . No experimento proposto, a ação é selecionar o indivíduo e pedir que ele identifique termos de  $LA$  que ele considera adequado para descrever  $x$ ; neste caso, o espaço amostral é  $LA$  e o resultado é  $D_x^{I_j}$ . Os dois experimentos podem ser repetidos, pelo menos hipoteticamente, sob as mesmas condições, porém, podem conduzir a diferentes resultados em diferentes tentativas, o que caracteriza a aleatoriedade. Portanto, pode-se afirmar que o conjunto  $D_x^{I_j}$ , formado por elementos de  $LA$ , é um conjunto aleatório.

Para cada subconjunto de  $LA$  ( $S \subseteq LA$ ) usado para descrever os valores  $x$ , uma função, denominada atribuição de massa é calculada (Lawry, 2004):  $m_x(S) = P(\{I_j \in I | D_x^{I_j} = S\}) \forall S \subseteq LA$ , onde  $P$  é a probabilidade associada ao conjunto de indivíduos  $I$ , que pode estar relacionada com a incerteza deles durante a escolha dos termos. Esta função pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade do conjunto  $D_x^I$ :  $\sum_{S \subseteq LA} m(S) = 1$ .

### 3.4. Formulação do Conjunto de Expressões

A medida de atribuição de massa  $m_x(S)$  (Lawry, 2004) é calculada sempre que um valor numérico  $x$  é descrito por um subconjunto do conjunto  $LA$ . Assumindo uma distribuição uniforme para  $I$ , tem-se:  $m_x(S) = |I_j \in I | D_x^{I_j} = S| / |I|$ ,  $\forall S \subseteq LA$

A atribuição de massa  $m_x(S)$  representa uma medida da confiança dos indivíduos de que um conjunto de termos ( $S$ ) é adequado para descrever  $x$ . Quanto maior o valor de  $m_x(S)$  maior a confiança.  $m_x(\emptyset)$  quantifica a confiança dos indivíduos de que nenhum termo de  $LA$  é considerado adequado para descrever o valor numérico  $x$ , logo  $m_x(\emptyset) \geq 0$  e não, necessariamente,  $m_x(\emptyset) = 0$ .

A probabilidade de se encontrar um indivíduo  $I_j$  que tenha usado um determinado termo  $l$  para descrever um valor numérico  $x$  é denominada função grau de adequação, denotada por  $\mu_l(x)$ :  $\mu_l(x) = P(\{I \in I | l \in D_x^I\})$ ,  $\forall l \in LA$ ; onde  $\mu_l(x) = 0$  significa que  $l$  não é adequado para descrever  $x$  e  $\mu_{l_i}(x) > \mu_{l_{i+1}}(x)$  significa que  $l_i$  é mais apropriado que  $l_{i+1}$  para descrever  $x$ . Visto que  $\mu_l(x): U \rightarrow [0,1]$ , esta função pode ser interpretado com uma função de pertinência do conjunto *fuzzy* associado ao termo  $l$ .

Baseado na frequência com que os termos são usados para descrever os valores numéricos, o analista irá definir uma ordem para os termos de  $LA$  para descrever cada valor numérico  $x \in U$ . É assumido que os indivíduos compartilham da mesma ordem estabelecida pelo

analista. Esta suposição é necessária para determinar os graus de adequação das expressões derivadas dos termos básicos.

Com base nos graus de adequação de cada termo  $l$ , é realizada uma regressão linear para determinar a função associada ao termo, ou seja, o valor semântico do termo. Se o número de pontos for insuficiente, isto é, poucos valores de graus de adequação de termos para descrever valores numéricos, o analista pode realizar novos experimentos com outros valores numéricos da escala original. De acordo com Delgado *et al.* (1988), a aproximação linear é suficiente visto que os julgamentos linguísticos são apenas aproximações das reais preferências dos decisores, de modo que a obtenção de valores mais precisos é impossível ou desnecessária.

A partir do conjunto de termos básicos  $LA$ , é formulada a escala de avaliação linguística simétrica  $L$ . A escala pode ter de cinco, sete ou nove níveis de avaliação. Estes valores são compatíveis com a capacidade cognitiva humana de fazer distinção entre diferentes níveis de avaliação (Miller, 1956). Os níveis podem ser os próprios termos linguísticos de  $LA$  ou expressões linguísticas obtidas a partir do emprego do conectivo conjunção a dois termos adjacentes de  $LA$ , que irá indicar que ambos os termos são adequados na avaliação. De acordo com Lawry (2004), a funções associadas a expressões derivadas da aplicação do conectivo lógico conjunção a termos básicos são dadas pela seguinte expressão:  $\mu_{l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n}(x) = \min(\mu_{l_1}(x), \mu_{l_2}(x), \dots, \mu_{l_n}(x))$ .

### 3.5. Conversão

Geralmente, as operações (cálculos ou comparações) com números *fuzzy* são complexas. Nesse sentido, muitos pesquisadores desenvolveram formas de representar números *fuzzy* através de índices reais que capturam as informações contidas nos números *fuzzy*. Wang & Kerre (2001) *apud* Ekel e Schuffner Neto (2006) levantaram mais de 35 índices para conversão de números *fuzzy* em índices reais para fins de ordenação da informação *fuzzy* a partir da ordenação dos respectivos números reais associados. Delgado *et al.* (1998) desenvolveu uma representação de números *fuzzy* baseada no uso de dois índices reais, os quais capturam a informações contidas no número original. Um destes índices pode ser interpretado como um valor central que representa a magnitude de  $\mu$ .

Para a definição do índice  $V(\mu)$ , o autor fez uso de uma função crescente  $s: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , onde  $s(0) = 0$  e  $s(1) = 1$ , a qual é chamada de função redução. A função redução realiza uma ponderação dos elementos de um conjunto *fuzzy*, de modo a reduzir a contribuição dos que apresentam maior incerteza. A consequência do uso da função redução no cálculo da magnitude de um número *fuzzy* é que este parâmetro carrega intrinsecamente a informação de incerteza associada ao respectivo número *fuzzy*. Para um número *fuzzy* trapezoidal  $T(a, b, c, d)$ , e função redução  $s(r) = r$ , ( $r \in [0,1]$ ) o índice valor e o índice ambiguidade de  $T$  podem ser definidos por:  $V(T) = [(c + b)/2] + [(d - c) - (b - a)/6]$ .

### 4. Exemplo

Considere uma amostra estratificada composta por três indivíduos, que irão avaliar medidas de açúcar adicionadas a uma xícara de chá  $y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ , onde  $y = 1$  significa que 1 (uma) medida de açúcar foi adicionada à xícara;  $y = 10$  significa que 10 (dez) medidas foram adicionadas.

O analista se reuniu com cada membro do grupo, separadamente, onde foi realizada uma avaliação da percepção individual. Foi perguntado ao indivíduo sobre o nível de dulçor da xícara de chá, testada por ele, com  $y$  medidas de açúcar. Para cada valor de  $y$ , os indivíduos expressaram suas percepções por meio do seguinte conjunto de termos  $LA = \{\text{baixo, médio, alto}\}$ . Os dados coletados e a ordem assumida para cada valor numérico estão apresentados na Tabela 1. A ordem é determinada pelo analista de decisão com base nas respostas apresentadas pelos indivíduos.

**Tabela 1 – Exemplo de dados coletados na calibração**

VALORES NUMÉRICOS	INDIVÍDUOS			ORDEM DOS TERMOS
	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	
1	Baixo	Baixo	Baixo	baixo $\succcurlyeq_1$ médio $\succcurlyeq_1$ alto
2	Baixo	Baixo	Baixo	baixo $\succcurlyeq_2$ médio $\succcurlyeq_2$ alto
3	Baixo	Baixo	Médio	baixo $\succcurlyeq_3$ médio $\succcurlyeq_3$ alto
4	Baixo	Médio	Médio	médio $\succcurlyeq_4$ baixo $\succcurlyeq_4$ alto
5	Médio	Médio	Médio	médio $\succcurlyeq_5$ baixo $\succcurlyeq_5$ alto
6	Médio	Médio	Médio	médio $\succcurlyeq_6$ alto $\succcurlyeq_6$ baixo
7	Médio	Médio	Alto	médio $\succcurlyeq_7$ alto $\succcurlyeq_7$ baixo
8	Médio	Alto	Alto	alto $\succcurlyeq_8$ médio $\succcurlyeq_8$ baixo
9	Alto	Alto	Alto	alto $\succcurlyeq_9$ médio $\succcurlyeq_9$ baixo
10	Alto	Alto	Alto	alto $\succcurlyeq_{10}$ médio $\succcurlyeq_{10}$ baixo

A partir dos dados coletados, as medidas de atribuição de massa  $m_x(S)$  são estimadas.

$$\begin{aligned}
 D_1^{I_1} &= D_1^{I_2} = D_1^{I_3} = \{\text{baixo}\} \Rightarrow m_1(\{\text{baixo}\}) = 3/3 = 1 \\
 D_2^{I_1} &= D_2^{I_2} = 2 = \{\text{baixo}\} \Rightarrow m_2(\{\text{baixo}\}) = 3/3 = 1 \\
 D_3^{I_1} &= D_3^{I_2} = \{\text{baixo}\} \Rightarrow m_3(\{\text{baixo}\}) = 2/3 \\
 D_3^{I_3} &= \{\text{médio, baixo}\} \Rightarrow m_3(\{\text{médio, baixo}\}) = 1/3 \\
 D_4^{I_1} &= \{\text{baixo, médio}\} \Rightarrow m_4(\{\text{baixo, médio}\}) = 1/3 \\
 D_4^{I_2} &= D_4^{I_3} = \{\text{médio}\} \Rightarrow m_4(\{\text{médio}\}) = 2/3 \\
 D_5^{I_1} &= D_5^{I_2} = D_5^{I_3} = \{\text{médio}\} \Rightarrow m_5(\{\text{médio}\}) = 3/3 = 1 \\
 D_6^{I_1} &= D_6^{I_2} = D_6^{I_3} = \{\text{médio}\} \Rightarrow m_6(\{\text{médio}\}) = 3/3 = 1 \\
 D_7^{I_1} &= D_7^{I_2} = \{\text{médio}\} \Rightarrow m_7(\{\text{médio}\}) = 2/3 \\
 D_7^{I_3} &= \{\text{alto, médio}\} \Rightarrow m_7(\{\text{alto, médio}\}) = 1/3 \\
 D_8^{I_1} &= \{\text{médio, alto}\} \Rightarrow m_8(\{\text{médio, alto}\}) = 1/3 \\
 D_8^{I_2} &= D_8^{I_3} = \{\text{alto}\} \Rightarrow m_8(\{\text{alto}\}) = 2/3 \\
 D_9^{I_1} &= D_9^{I_2} = D_9^{I_3} = \{\text{alto}\} \Rightarrow m_9(\{\text{alto}\}) = 3/3 = 1 \\
 D_{10}^{I_1} &= D_{10}^{I_2} = D_{10}^{I_3} = \{\text{alto}\} \Rightarrow m_{10}(\{\text{alto}\}) = 3/3 = 1
 \end{aligned}$$

Em seguida, são determinados os graus de adequação de cada termo aos valores numéricos  $\mu_l(x)$ .

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{baixo}}(1) &= m_1(\{\text{baixo}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{baixo}}(2) &= m_2(\{\text{baixo}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{baixo}}(3) &= m_3(\{\text{baixo}\}) + m_3(\{\text{médio, baixo}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{baixo}}(4) &= m_4(\{\text{baixo, médio}\}) = 1/3 \\
 \mu_{\text{baixo}}(5) &= \mu_{\text{baixo}}(6) = \mu_{\text{baixo}}(7) = \mu_{\text{baixo}}(8) = \mu_{\text{baixo}}(9) = \mu_{\text{baixo}}(10) = 0 \\
 \mu_{\text{médio}}(1) &= \mu_{\text{médio}}(2) = \mu_{\text{médio}}(9) = \mu_{\text{médio}}(10) = 0 \\
 \mu_{\text{médio}}(3) &= m_3(\{\text{médio, baixo}\}) = 1/3 \\
 \mu_{\text{médio}}(4) &= m_4(\{\text{baixo, médio}\}) + m_4(\{\text{médio}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{médio}}(5) &= m_5(\{\text{médio}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{médio}}(6) &= m_6(\{\text{médio}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{médio}}(7) &= m_7(\{\text{médio}\}) + m_7(\{\text{alto, médio}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{médio}}(8) &= m_8(\{\text{médio, alto}\}) = 1/3 \\
 \mu_{\text{alto}}(1) &= \mu_{\text{alto}}(2) = \mu_{\text{alto}}(3) = \mu_{\text{alto}}(4) = \mu_{\text{alto}}(5) = \mu_{\text{alto}}(6) = 0 \\
 \mu_{\text{alto}}(7) &= m_7(\{\text{alto, médio}\}) = 1/3 \\
 \mu_{\text{alto}}(8) &= m_8(\{\text{médio, alto}\}) + m_8(\{\text{alto}\}) = 1 \\
 \mu_{\text{alto}}(9) &= m_9(\{\text{alto}\}) = 1
 \end{aligned}$$

$$\mu_{alto}(10) = m_{10}(\{alto\}) = 1$$

As funções correspondentes a cada um dos termos são obtidas por regressão linear (Figura 1).

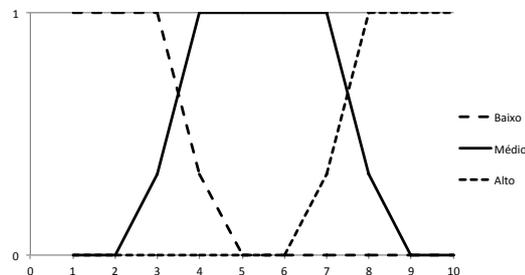


Figura 1 – Gráfico das funções de pertinências dos termos básicos

Um exemplo de escala linguística com cinco níveis é: (1) *baixo*; (2) *entre baixo e médio*; (3) *médio*; (4) *entre médio e alto*; e (5) *alto*. Os valores semânticos dos níveis 1, 3 e 5 podem ser as funções obtidas para os termos básico *baixo*, *médio* e *alto*, respectivamente. Os valores semânticos para os níveis 2 e 4 são dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{entre\ baixo\ e\ médio}(x) &= \min(\mu_{baixo}(x), \mu_{médio}(x)) \\ \mu_{entre\ médio\ e\ alto}(x) &= \min(\mu_{médio}(x), \mu_{alto}(x)) \end{aligned}$$

A escala numérica correspondente é obtida aplicando-se a regra de conversão a escala linguística (Tabela 2).

Tabela 2 – Conversão das expressões em valores numéricos

Expressões	T(a, b, c, d)				V(T)
	a	b	c	d	
<i>Baixa</i>	1	1	3	5	2,33
<i>Entre Baixa e Média</i>	2	3,5	3,5	5	3,50
<i>Média</i>	2	4	7	9	5,50
<i>Entre Média e Alta</i>	6	7,5	7,5	9	7,50
<i>Alta</i>	6	8	10	10	9,33

Os termos da escala linguística construída sempre estarão simetricamente dispostos em torno do termo central, porém, os valores semânticos destes termos podem se apresentar de forma desbalanceada na escala, ou seja, não uniformemente distribuídos em torno do valor correspondente ao termo linguístico central. Portanto, a distribuição dos valores semânticos pode não obedecer a simetria indicada pelos respectivos valores sintáticos, como acontece na escala Likert (Likert, 1932), que é uma das escalas linguísticas mais utilizadas em aplicações práticas. Isso é decorrente do processo de calibração dos significados matemáticos dos termos, que, por sua vez, depende dos indivíduos que participaram do processo. Segundo Herrera *et al.* (2009), esse tipo de escala, denominada na literatura de escala desbalanceada, é interessante em algumas aplicações práticas. O desenvolvimento de modelos de decisão que consideram o uso de escalas linguísticas desbalanceadas na avaliação das alternativas é apontado pelos autores como uma das linhas de pesquisa que devem ser exploradas na área de análise de decisão linguística

O uso de escalas desbalanceadas pode ser interessante para algumas aplicações práticas. Por exemplo, uma escala, onde os níveis intermediários são bastante próximos uns dos outros e mais afastados dos níveis das extremidades, implica em uma maior nível de especificidade para as avaliações realizadas com os termos intermediários. Isso pode ser útil para avaliação de desempenho de candidatos: candidatos com desempenho muito bom e com desempenho muito ruim são facilmente identificados, cujas avaliações podem ser realizadas utilizando os termos da

extremidade de uma escala desbalanceada deste tipo; já os candidatos com desempenho intermediário requerem um maior nível de especificidade para diferenciá-los, requerendo termos mais específicos.

Os pesquisadores da área de análise de decisão linguística também defendem o uso de escalas linguísticas com granularidades diferentes, de acordo com a necessidade dos decisores. Eles argumentam que em muitas situações reais pode ser necessário definir várias escalas linguísticas, com granularidade, valores sintáticos e correspondentes valores semânticos diferentes, de acordo com os decisores que farão uso das escalas, que, por sua vez, são influenciados por aspectos culturais, sociais, etc. Segundo Parreiras *et al.* (2010), um decisor pode cometer erros se for obrigado a fazer julgamentos mais precisos do que ele é capaz; por outro lado, pode haver desperdício de informação se a granularidade for insuficiente para um decisor que tenha condição de fazer uma avaliação mais precisa. Por exemplo, um decisor pode se sentir mais confortável avaliando as alternativas com uma escala  $L1 = \{baixo, médio, alto\}$ , enquanto outro pode preferir uma escala com granularidade maior  $L2 = \{muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto\}$ , por se achar capaz de discriminar melhor suas preferências sobre as alternativas.

## 5. Conclusões

O desenvolvimento do método para a construção de uma escala linguística demandou um estudo sobre abordagem linguística de decisão, com ênfase para a modelagem de conceitos vagos e imprecisos. O estudo permitiu fazer um levantamento na literatura de alguns problemas associados ao uso da teoria dos conjuntos *fuzzy* para a modelagem de conceitos vagos e imprecisos, que é a técnica mais utilizada. Esta técnica requer dos agentes a definição das funções de pertinência associadas aos termos básicos, porém nem sempre eles têm condição de definir/escolher essas funções de forma consistente com suas percepções sobre os conceitos descritos pelos termos linguísticos. O problema é agravado pela lacuna existente na interpretação do significado das funções de pertinência.

Dessa forma, optou-se por utilizar uma nova técnica de modelagem, na qual a definição das funções de pertinência dos termos básicos é estruturada em um procedimento que tenta reproduzir o mecanismo heurístico usado pelos humanos para decidir se um conceito é ou não adequado para transmitir uma determinada informação. Este procedimento é a base do método para a construção da escala de avaliação linguística. Por meio do procedimento, é possível inferir dos próprios usuários da escala a percepção que eles têm sobre o significado da linguagem quando utilizada em um determinado contexto e, a partir das informações coletadas, propor um conjunto de expressões que represente melhor a opinião dos indivíduos ao realizarem julgamentos no mesmo contexto. Nesta nova abordagem de modelagem, garante-se sempre a correspondência entre os valores semânticos de expressões compostas e os respectivos valores sintáticos, o que nem sempre acontece na abordagem baseada na teoria dos conjuntos *fuzzy*.

A conversão da escala linguística em valores numéricos, além de reduzir a complexidade das operações, permite que aspectos puramente quantitativos possam ser avaliados em conjunto com aspectos qualitativos. Esta vantagem é particularmente útil para os casos em que a abordagem é usada para construir escalas linguísticas a serem utilizadas para avaliar critérios qualitativos em problemas de decisão multicritério.

## Agradecimentos

Este trabalho é resultado de uma pesquisa financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## Referências

- Almeida, A. T.** *O conhecimento e o uso de métodos multicritério de apoio a decisão*, 2<sup>a</sup> Edição, Ed. Universitária da UFPE, Recife, 2011.
- Beith-Marom, R.** (1982), How probable is probable? A numerical translation of verbal probability expressions, *Journal of Forecasting*, 1, 257-269.

- Danielson, M.; Ekenberg, L.; Idefeldt, J. e Larsson, A.** (2007), Using a software tool for public decision analysis: the case of Nacka Municipality, *Decision Analysis*, 4 (2), 76-90.
- Delgado, M.; Vila, M. A. e Voxman, W.** (1998), On a canonical representation of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 93, 125-135.
- Ekel, P. e Schuffner Neto, F. H.** (2006), Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients, *Information Sciences*, 176, 2846-2868.
- García-Lapresta, J. L.** (2006), A general class of simple majority decision rules based on linguistic opinions, *Information Sciences*, 176, 352-365.
- García-Lapresta, J. L.** (2006), A General Class of Simple Majority Decision Rules based on linguistic opinions, *Information Sciences*, 176, 352-365.
- García-Lapresta, J. L.; Martínez-Panero, M. e Meneses, L. C.** (2009), Defining the Borda Count in a Linguistic Making Context, *Information Sciences*, 179, 2309-2316.
- Gu, X. e Zhu, Q.** (2006), Fuzzy multi-attribute decision-making method based on eigenvector of fuzzy attribute evaluation space, *Decision Support Systems*, 41, 400-410.
- Herrera, F. e Herrera-Viedma, E.** (2000), Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems under Linguistic Information, *Fuzzy Sets and Systems*, 115, 67-82.
- Herrera, F.; Alonso, S.; Chiclana, F. e Herrera-Viedma, E.** (2009), Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8, 337-364.
- Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. e Verdegay, J. L.** (1995), A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach, *Information Sciences*, 80, 1-17.
- Herrera, F.; Martínez, L. e Sánchez, P. J.** (2005), Managing non-homogeneous information in group decision making, *European Journal of Operational Research*, 166, 115-132.
- Lawry, J.** (2004), A framework for Linguistic Modelling, *Artificial Intelligence*, 155, 1-39.
- Lawry, J.** *Modelling and Reasoning with Vague Concepts*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- Likert R.** (1932), A technique for the measurement of attitudes, *Archives of Psychology*, 140, 1-55.
- Ma, Z.** *Fuzzy Database Modeling of Imprecise And Uncertain Engineering Information*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- Martínez, L.; Ruan, D. e Herrera, F.** (2010), Computing with Words in Decision support Systems: An overview on Models and Applications, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3 (4), 382-395.
- Miller, G. A.** (1956), The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information, *Psychological Review*, 63 (2), 81-97.
- Parreiras, R. O.; Ekel, P. Ya; Martini, J. S. C. e Palhares, R. M.** (2010), A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments, *Information Sciences*, 180, 1075-1089.
- Perez, I. J.; Cabrerizo, F. J. e Herrera-Viedma, E.** (2011), A mobile group decision making model for heterogeneous information and changeable decision contexts, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 19, 33-52.
- Silva, V. B. S. e Morais, D. C.** (2011), A new voting procedure to support participatory budgeting: an approach based on the Fuzzy Social Choice, *Anais do IEEE SMC 2011 - International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 3184-3189.
- Weber, M.** (1987), Decision making with incomplete information, *European Journal of Operational Research* 28 (1), 44-57.
- Xu, Z.** (2004), A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, *Information Sciences*, 166, 19-30.
- Xu, Z.** (2006), An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, *Decision Support Systems*, 41, 488-499.
- Zadeh, L. A.** (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- Zadeh, L. A.** (1975), The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning, *Information Sciences*, Part I: 8, 199-249, Part II: 8, 301-357, Part III: 9, 43-80.