

Sobre os espectros das matrizes laplaciana, laplaciana normalizada e laplaciana sem sinal de um grafo

André Ebling Brondani

Universidade Federal Fluminense - UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Volta Redonda, RJ
andrebrondani@id.uff.br

Andrea Soares Bonifácio

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO
Av. Pasteur, 458, CCET, Urca, Rio de Janeiro, RJ
andreabonifacio@uniriotec.br

Carla Silva Oliveira

Escola Nacional de Ciências e Estatística - ENCE/IBGE
Rua André Cavalcanti, 106, Centro, RJ
carla.oliveira@ibge.gov.br

Nair Maria Maia de Abreu

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Av. Athos da Silva Ramos, 149, Centro de Tecnologia, Rio de Janeiro, RJ
nairabreunovoa@gmail.com

RESUMO

Este artigo trata do espectro da matriz laplaciana normalizada de um grafo e dos espectros de matrizes a esta relacionados: a matriz laplaciana e a matriz laplaciana sem sinal de um grafo. Limites para os autovalores da matriz laplaciana e da matriz laplaciana normalizada foram determinados em função dos autovalores da matriz laplaciana sem sinal. Como consequência, os autovalores para grafos regulares das matrizes laplaciana e laplaciana normalizada foram caracterizados em função dos autovalores da matriz laplaciana sem sinal.

PALAVRAS CHAVE. Matriz laplaciana. Matriz laplaciana sem sinal. Matriz laplaciana normalizada.

Área Principal (Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

This paper deals the spectrum normalized Laplacian matrix of a graph and the spectra of matrices related to it: the Laplacian matrix and signless Laplacian matrix of a graph. Limits for the eigenvalues of the Laplacian matrix and the normalized Laplacian matrix were determined by the eigenvalues of the signless Laplacian matrix. As a consequence, the eigenvalues for regular graphs of normalized Laplacian and Laplacian matrices were characterized in terms of eigenvalues of the signless Laplacian matrix.

KEYWORDS. Laplacian matrix. Signless Laplacian matrix. Normalized Laplacian matrix.

Main Area (Theory and Algorithms in Graphs)

1. Introdução

Seja $G = (V_G, E_G)$ um grafo simples com conjunto de vértices $V_G = \{1, \dots, n\}$ e conjunto de arestas $E_G = \{\{i, j\}; i, j \in V_G\}$. Dado $i \in V_G$, as adjacências de i são os elementos do conjunto $N_G(i) = \{j \in V_G; \{i, j\} \in E_G\}$. O grau d_i do vértice i é a cardinalidade de seu conjunto de adjacências, isto é, $d_i = |N_G(i)|$. Dizemos que i é um vértice isolado em G se $d_i = 0$. O grafo completo K_n é aquele em que todo par de vértices é ligado por uma aresta e o grafo estrela S_n é o que tem um vértice de grau $n - 1$ e todos os demais de grau 1. A matriz de adjacência de G é a matriz $A_G = [a_{ij}]$ de ordem n , onde $a_{ij} = 1$, se $\{i, j\} \in E_G$ e $a_{ij} = 0$, se $\{i, j\} \notin E_G$. A matriz dos graus de G é uma matriz diagonal D_G cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices de G . Sejam G um grafo e M uma matriz simétrica de ordem n associada a G . O espectro de G relativo a M , denotado por $Spec_M(G)$, é o multiconjunto formado pelos n autovalores de M . As matrizes $L_G = D_G - A_G$ e $Q_G = D_G + A_G$ são conhecidas como laplaciana e laplaciana sem sinal de G , respectivamente. L_G tem autovalor nulo, portanto é semipositiva definida e Q_G tem autovalor nulo se G for bipartido (Cvetković, Rowlinson e Simić (2010)). Logo, seus autovalores são números reais não negativos e podem ser ordenados, respectivamente, por

$$\mu_n \leq \mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_1 \quad \text{e} \quad q_n \leq q_{n-1} \leq \dots \leq q_1.$$

Fiedler (1973) mostrou que $\mu_{n-1} = 0$ se, e somente se, G é desconexo. Além disso, de acordo com Merris (1994), a multiplicidade de 0, como autovalor de L_G , é igual ao número de componentes conexas do grafo G . Em outras palavras, o segundo menor autovalor de L_G é positivo se, e somente se, G é um grafo conexo. Por esse motivo, μ_{n-1} é conhecido como *conectividade algébrica de G* .

Cvetković, Rowlinson e Simić (2007) provaram que se G é um grafo conexo então $q_n = 0$ se, e somente se, G é um grafo bipartido. Além disso, a multiplicidade de 0 como autovalor de Q_G é igual ao número de componentes conexas bipartidas e não triviais de G . Em outras palavras, q_n é positivo se, e somente se, G não é bipartido. Por esse motivo, Kirkland e Paul (2011) sugerem que este autovalor seja interpretado como uma medida de bipartidade de G e Fallat e Fan (2012) sugerem que q_n seja chamado de *bipartidade algébrica de G* .

O objetivo deste trabalho é apresentar relações envolvendo os espectros das matrizes consideradas acima e, através disso, determinar as propriedades espectrais da matriz laplaciana normalizada. Esta matriz é definida na Seção 2, onde estão reunidos conceitos e resultados espectrais conhecidos. Na Seção 3 se encontram os resultados originais deste artigo com suas respectivas demonstrações. As considerações finais são apresentadas na última seção.

2. Definições e resultados básicos

Iniciamos esta seção com a definição de matriz laplaciana normalizada para em seguida apresentar alguns resultados preliminares que serão usados na seção posterior.

Definição 1 *Seja G um grafo simples com n vértices. A matriz laplaciana normalizada de G é a matriz $\mathcal{L}_G = [\ell_{i,j}]$ onde*

$$\ell_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } d_i \neq 0; \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{se } i \text{ é adjacente a } j; \\ 0, & \text{se } i \text{ não é adjacente a } j. \end{cases}$$

Chung (1997) mostrou que \mathcal{L}_G é uma matriz não negativa, simétrica e semidefinida positiva, portanto seu espectro é formado por números reais não negativos e é dado em ordem não crescente por:

$$\ell_n \leq \ell_{n-1} \leq \dots \leq \ell_1.$$

Além disso, mostrou que se G é um grafo sem vértices isolados então todos os autovalores de \mathcal{L}_G pertencem ao intervalo $[0, 2]$, a multiplicidade de 2 como autovalor de \mathcal{L}_G coincide com o número de componentes conexas bipartidas e não triviais de G e a multiplicidade de 0 como autovalor de \mathcal{L}_G coincide com o número de componentes conexas do grafo G . Em outras palavras, um grafo é conexo se, e somente se, $\ell_{n-1} > 0$ e, além disso, um grafo conexo não é bipartido se, e somente se, $\ell_1 < 2$.

Observação 1 Se G é um grafo sem vértices isolados, então sua matriz dos graus D_G é invertível e, neste caso, podemos escrever

$$\mathcal{L}_G = D_G^{-1/2} L_G D_G^{-1/2}.$$

Seja G_1 o grafo da Figura 1.

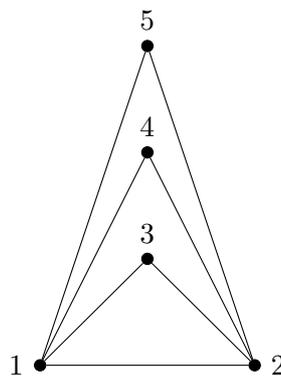


Figura 1: G_1

A matriz laplaciana normalizada de G_1 é

$$\mathcal{L}_{G_1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e seu espectro é $Spec_{\mathcal{L}}(G_1) = \{0, 1, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\}$.

Os resultados que seguem são devidos a Chung (1997).

Proposição 1 *Se G é um grafo com $n \geq 2$ vértices, então:*

- (i) $l_n = 0$;
- (ii) $\sum_{i=1}^n l_i \leq n$, valendo a igualdade se, e somente se, G não tem vértices isolados;
- (iii) $l_{n-1} \leq \frac{n}{n-1} \leq l_1$, valendo as igualdades inferior e superior se, e somente se, $G = K_n$;
- (iv) $l_{n-1} \leq 1$ se G não é um grafo completo.

Proposição 2 *Se G é um grafo com n vértices, então:*

- (i) o espectro laplaciano normalizado de G é a união dos espectros laplacianos normalizados de suas componentes conexas;
- (ii) se G é conexo, então $l_{n-1} > 0$. Além disso, a multiplicidade do autovalor 0 é igual ao número de componentes conexas de G ;
- (iii) para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $l_i \in [0, 2]$;
- (iv) G é bipartido se, e somente se, $l_1 = 2$. Além disso, a multiplicidade do autovalor 2 é igual ao número de componentes conexas bipartidas e não triviais de G .

Proposição 3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é bipartido;
- (ii) Se ℓ é um autovalor laplaciano normalizado de G , então $2 - \ell$ também é um autovalor laplaciano normalizado de G .

As próximas definições podem ser encontradas em Zumstein (2005), que a utilizou para a determinação de alguns autovalores de \mathcal{L}_G .

Definição 2 *Sejam G um grafo finito e $i, j \in V_G$, $i \neq j$.*

- (i) i e j são vértices gêmeos se, e somente se, $N(i) - j = N(j) - i$.
- (ii) O vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$, cujas coordenadas são definidas por

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = i; \\ -1, & \text{se } k = j; \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

é conhecido por Vetor de Faria do grafo G .

Observação 2 Se G é um grafo finito e i e j são vértices gêmeos de G então $d_i = d_j$.

Proposição 4 Sejam G um grafo finito e i e j vértices gêmeos de G .

(i) Se $\{i, j\} \notin E_G$, então $1 \in \text{Spec}_{\mathcal{L}}(G)$;

(ii) Se $\{i, j\} \in E_G$, então $\frac{d_i + 1}{d_i} \in \text{Spec}_{\mathcal{L}}(G)$.

Em ambos os casos, cada par de vértices gêmeos i e j está associado a um vetor de Faria, o qual é um autovetor de \mathcal{L}_G associado ou ao autovalor 1 ou ao autovalor $\frac{d_i + 1}{d_i}$.

Considere o grafo G_2 da Figura 2. Como 1 e 2, 4 e 5, e 6 e 7 são pares de vértices gêmeos de G_2 , da Proposição 4, $\frac{4}{3}$ é um autovalor laplaciano normalizado com multiplicidade pelo menos 2 e 1 é um autovalor laplaciano normalizado com multiplicidade pelo menos 1.

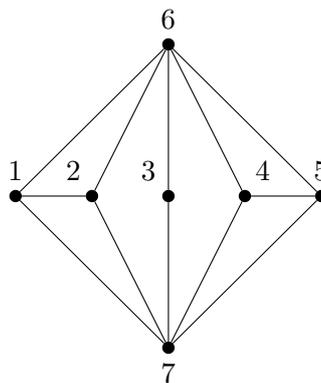


Figura 2: G_2 , grafo com pares de vértices gêmeos.

Embora a Proposição 4 não caracterize necessariamente o espectro da matriz laplaciana normalizada de um grafo, a aplicação sucessiva desta proposição irá permitir a caracterização de espectros de grafos em famílias especiais.

Proposição 5 Para o grafo estrela, S_n , temos $\text{Spec}_{\mathcal{L}}(S_n) = \{0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2 \text{ vezes}}, 2\}$.

Demonstração. Da Proposição 1, tem-se que $\ell_n = 0$. Sendo S_n um grafo conexo e bipartido, da Proposição 2, $\ell_1 = 2$ e é um autovalor simples de S_n . Para determinar os demais autovalores, nota-se que quaisquer dois vértices de grau 1 formam um par de vértices gêmeos e não adjacentes. Logo, da Proposição 4, $\ell = 1$ é autovalor de S_n com multiplicidade $n - 2$. De fato, fixe um vértice i de grau 1 e considere os pares de vértices gêmeos i e j , onde $j \neq i$ tem grau 1. Da Proposição 4, cada par de vértices gêmeos está associado a um vetor de Faria, os quais formam um conjunto linearmente independente de cardinalidade $n - 2$. Portanto, $\ell = 1$ é um autovalor de S_n com multiplicidade $n - 2$.

□

O Teorema 6, devido a Butler (2008), determina uma relação entre os autovalores de L_G e de \mathcal{L}_G .

Teorema 6 *Seja G um grafo, não necessariamente conexo, com n vértices e sem vértices isolados. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ tem-se*

$$\frac{\mu_k}{\Delta} \leq \ell_k \leq \frac{\mu_k}{\delta},$$

onde δ e Δ denotam, respectivamente, os graus mínimo e máximo dos vértices de G .

Se G é um grafo conexo segue-se do Teorema 6 que

$$\frac{\mu_{n-1}}{\Delta} \leq \ell_{n-1} \leq \frac{\mu_{n-1}}{\delta}.$$

Assim, o segundo menor autovalor da matriz laplaciana normalizada de G está limitado inferiormente e superiormente por frações dadas em função da conectividade algébrica de G . Consequentemente, $\ell_{n-1} > 0$. Ainda, deste teorema, segue-se que se G é um grafo r -regular então, $\ell_k = \frac{\mu_k}{r}$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

O próximo resultado, dado por Kirkland e Paul (2011), indica que o maior autovalor da matriz laplaciana normalizada de G está relacionado com a bipartidade algébrica de G .

Teorema 7 *Seja G um grafo conexo com n vértices então,*

$$2 - \frac{q_n}{\delta} \leq \ell_1 \leq 2 - \frac{q_n}{\Delta},$$

onde δ e Δ denotam, respectivamente, os graus mínimo e máximo dos vértices de G .

O Teorema 8 pode ser encontrado em Horn e Johnson (1985).

Teorema 8 *Sejam A e S matrizes quadradas de ordem n , onde A é simétrica e S é não singular. Suponha que os autovalores de A e de SS^t sejam dados em ordem não crescente. Então para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe um número real θ_k tal que*

$$\lambda_n(SS^t) \leq \theta_k \leq \lambda_1(SS^t) \text{ e } \lambda_k(SAS^t) = \theta_k \lambda_k(A).$$

3. Resultados obtidos

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos neste trabalho, os quais relacionam os autovalores da matriz laplaciana normalizada e os autovalores da matriz laplaciana com os autovalores da matriz laplaciana sem sinal. O Teorema 9 é uma generalização do Teorema 7 e os demais resultados são decorrentes dele.

Teorema 9 *Seja G um grafo com n vértices não isolados. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$*

$$2 - \frac{q_k}{\delta} \leq \ell_{n-k+1} \leq 2 - \frac{q_k}{\Delta},$$

onde Δ e δ denotam, respectivamente, os graus máximo e mínimo de G .

Demonstração. Seja a matriz simétrica $T_G = D_G^{-1/2} Q_G D_G^{-1/2}$ e sejam $t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1$ seus autovalores.

Fixado $k \in \{1, \dots, n\}$, pelo Teorema 8, existe um número real θ_k tal que

$$\frac{1}{\Delta} \leq \theta_k \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{e} \quad t_k = \theta_k q_k$$

onde $\frac{1}{\Delta}$ e $\frac{1}{\delta}$ são o menor e o maior autovalores da matriz $D_G^{-1} = D_G^{-1/2} D_G^{-1/2}$, respectivamente.

Como

$$\mathcal{L}_G + T_G = D_G^{-1/2} (L_G + Q_G) D_G^{-1/2} = 2I,$$

segue-se que $t_k = 2 - \ell_{n-k+1}$. Como $q_k \geq 0$, então

$$\frac{q_k}{\Delta} \leq 2 - \ell_{n-k+1} \leq \frac{q_k}{\delta}$$

e, portanto,

$$2 - \frac{q_k}{\delta} \leq \ell_{n-k+1} \leq 2 - \frac{q_k}{\Delta}.$$

Assim obtém-se o resultado. □

O Corolário 10 explicita os autovalores da matriz laplaciana normalizada em função dos autovalores da matriz laplaciana sem sinal de um grafo r -regular.

Corolário 10 Se G é um grafo r -regular, então $\ell_{n-k+1} = 2 - \frac{q_k}{r}$, onde $1 \leq k \leq n$.

O Corolário 11, que também decorre do Teorema 9, foi recentemente apresentado por Lima e Nikiforov (2013), que utilizaram outras técnicas para sua demonstração.

Corolário 11 Se G é um grafo conexo e $G \neq K_n$, então $\delta \leq q_2$.

Demonstração. Para $k = 2$, do Teorema 9, $2 - \frac{q_2}{\delta} \leq \ell_{n-1}$ e da Proposição 1, $\ell_{n-1} \leq 1$.

Logo, $\delta \leq q_2$. □

Corolário 12 Se G é um grafo conexo com n vértices, então $q_n \leq \frac{n-2}{n-1} \Delta$, valendo a igualdade se, e somente se, G é um grafo completo.

Demonstração. Da Proposição 1, $\frac{n}{n-1} \leq \ell_1$ e do Teorema 9, $\ell_1 \leq 2 - \frac{q_n}{\Delta}$.

Logo, $\frac{n}{n-1} \leq 2 - \frac{q_n}{\Delta}$ implica na desigualdade desejada.

Para mostrar a igualdade, seja G um grafo tal que $q_n = \frac{n-2}{n-1} \Delta$.

Assim,

$$\frac{n}{n-1} \leq \ell_1 \leq 2 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

Portanto, $\ell_1 = \frac{n}{n-1}$ e, conseqüentemente, pela Proposição 1, conclui-se que $G = K_n$. □

Os Teoremas 6 e 9 nos mostram uma conexão entre os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal, a qual é explicitada na seguinte proposição.

Proposição 13 *Se G é um grafo com n vértices, não necessariamente conexo, e sem vértices isolados então para cada $k \in \{1, \dots, n\}$,*

$$2\delta - q_k \leq \mu_{n-k+1} \leq 2\Delta - q_k,$$

onde Δ e δ denotam, respectivamente, os graus máximo e mínimo de G .

Demonstração. Dos Teoremas 6 e 9 temos

$$2 - \frac{q_k}{\delta} \leq \ell_{n-k+1} \leq \frac{\mu_{n-k+1}}{\delta} \iff 2\delta - q_k \leq \mu_{n-k+1}.$$

Analogamente,

$$\frac{\mu_{n-k+1}}{\Delta} \leq \ell_{n-k+1} \leq 2 - \frac{q_k}{\Delta} \iff \mu_{n-k+1} \leq 2\Delta - q_k$$

Obtendo assim, as desigualdades desejadas. □

O próximo resultado caracteriza os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana normalizada para grafos regulares em função dos autovalores da matriz laplaciana sem sinal.

Proposição 14 *Se G é um grafo r -regular com n vértices então, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\ell_{n-k+1} = 2\left(1 - \frac{q_k}{q_1}\right) \quad e \quad \mu_{n-k+1} = q_1 - q_k.$$

Demonstração. Cvetković, Rowlinson e Simić (2007), mostraram que se G é um grafo r -regular, então $r = \frac{q_1}{2}$.

Logo, da Proposição 13 temos

$$\mu_{n-k+1} = q_1 - q_k$$

e do Corolário 10,

$$\ell_{n-k+1} = 2\left(1 - \frac{q_k}{q_1}\right).$$

□

4. Considerações Finais

As principais contribuições deste artigo estão nas relações estabelecidas entre os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana normalizada com os autovalores da matriz laplaciana sem sinal (Teorema 9 e Proposição 13). Para os grafos regulares, tais resultados nos levaram à caracterização dos autovalores laplacianos e laplacianos normalizados, em função dos autovalores da matriz laplaciana sem sinal.

5. Referências

- Butler, S.**, Eigenvalues and Structures of Graphs, Ph.D. dissertation, University of California, San Diego, 2008.
- Chung, F.**, Spectral Graph Theory, American Mathematical Society, National Science Foundation, 1997.
- Cvetković, D., Rowlinson, P. e Simić, S.** (2007), Signless Laplacians of finite graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 423 (1), 155-171.
- Cvetković, D., Rowlinson, P. e Simić, S.**, An Introduction to the Theory of Graph Spectra, Cambridge University Press, 2010.
- Fallat, S. e Fan, Y.-Z.** (2012). Bipartiteness and the least eigenvalue of signless Laplacian of graphs, *Linear Algebra and its Applications*, 436, 3254-3267.
- Fiedler, M.** (1973). Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Math. J.*, 23, 298-305.
- Horn, R. A. e Johnson, C.R.**, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- Kirkland, S. e Paul, D.** (2011). Bipartite subgraphs and the signless Laplacian matrix, *Appl. Anal. Discrete Math.* 5, 1-3.
- Lima, L. S. e Nikiforov, V.** (2013). On the second largest eigenvalue of the signless Laplacian, *Linear Algebra and its Applications*, 438 (3), 1215-1222.
- Merris, R.** (1994), Laplacian Matrices of Graphs: A Survey, *Linear Algebra and its Applications*, v. 197/198, 143-176.
- Zumstein, P.**, Comparison of spectral methods through the adjacency matrix and the Laplacian of a graph, Ph.D. dissertation, ETH Zürich, 2005.