UMA ABORDAGEM MULTIOBJETIVO INTEIRA PARA A DIETA EM CRECHES

André R. da Cruz[α], **Thiago G. Lima**[β], **Matheus F. Araújo**[β], **Nilcemar R. C. Cruz**[γ]
Universidade Federal de Viçosa, campus Rio Paranaíba,
Rodovia MG-230 Km 7, Rio Paranaíba - MG, Brasil
{andre.cruz, thiago.g.lima, matheus.f.araujo, nilcemar.cruz}@ufv.br
α Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
β Graduando em Sistemas de Informação
γ Instituto de Ciências Biológicas e da Saúde

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem multiobjetivo para o problema da dieta em creches, no qual são considerados o café da manhã, o almoço e o lanche da tarde. Deseja-se minimizar o custo das refeições, maximizando concomitantemente os níveis de proteínas, vitaminas A e C, além de ferro e cálcio. São analisados 37 itens, cada um pertencente a um grupo de alimentos. Busca-se determinar, para cada grupo, as quantidades ótimas de porções de alimentos de $25g$ ou $25mL$, no sentido multiobjetivo. As soluções não dominadas globalmente devem atender à pelo menos 70% das necessidades nutricionais diárias em relação à 18 nutrientes. As refeições devem apresentar alimentos de diferentes grupos e a quantidade dos itens deve respeitar um intervalo, de modo que fique mais atrativo e em uma quantidade adequada. Foram encontradas 18 soluções não dominadas através do método de ponderação das funções objetivo.
PALAVRAS CHAVE. Problema da Dieta, Programação Multiobjetivo Linear Inteiro.

Áreas Principais: SA – PO na Área de Saúde, SE – PO em Serviços, ADM – Apoio à Decisão Multicritério.

ABSTRACT

This paper presents a multiobjective approach for the diet problem in nurseries, in which are considered the breakfast, lunch and afternoon snack. It is desired to minimize the cost of meals, concomitantly maximizing the levels of protein, vitamins A and C, in addition to iron and calcium. It is analyzed 37 items, each one belonging to a group of food. It must determine, for each group, the optimal amounts of $25g$ or $25mL$ portions of food, in a multiobjective sense. The globally nondominated solutions must agree with at least 70% of the daily nutritional requirements in relation to 18 nutrients. Meals must provide different food groups and the number of items must meet a range, becoming more attractive and in an appropriate amount. It was found 18 nondominated solutions through the scalarization technique of the objective functions.
KEY WORDS. Diet Problem, Multiobjective Integer Linear Programming.

Main areas: SA – OR in Health, SE – OR in Services, ADM – Multicriteria Decision Support.

1 Introdução

O problema da dieta, criado pelo premiado Nobel em economia de 1982 George Stigler, almeja determinar, a um mínimo custo, a quantidade de alimentos que uma pessoa deve ingerir de forma a atender os níveis mínimos recomendados de um número de nutrientes (STIGLER, 1945).

Em (GARILLE; GASS, 2001), os autores fazem uma revisão detalhada e destacam a importância do modelo clássico apresentado por Stigler. No mesmo trabalho são apresentados resultados com novas restrições e dados atualizados para realizar uma comparação com o modelo original. Também são apresentadas referências de outros trabalhos que utilizam a ideia do problema da dieta.

No artigo (DANTZIG, 1990), George Dantzig relata que o problema da dieta foi o primeiro modelo em “larga escala” a ser solucionado no Método Simplex. Outras histórias interessantes, como o surgimento do limite superior das variáveis de decisão, e até mesmo engraçadas, como a determinação da própria dieta após Dantzig ir ao médico, são encontradas no mesmo artigo.

Diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura envolvendo derivações do problema da dieta. No artigo (NAMEN; BORNSTEIN, 2004), os autores apresentam uma ferramenta para avaliação de modelos matemáticos relacionados à otimização do planejamento de dietas. Em (CADENAS et al., 2004), foi realizada uma otimização fuzzy para determinar a dieta do gado em fazendas argentinas. No trabalho (SANTOS; RODRIGUES, 2007), os autores criaram uma ferramenta computacional para formular a dieta de pequenos animais ruminantes. Em (PESSÔA; LINS; TORRES, 2009) é apresentado um modelo de programação inteira para determinar o cardápio em um navio da Marinha do Brasil. Já em (FORSTER et al., 2010), foi realizado uma otimização para se determinar a dieta ótima para o camarão branco do Pacífico.

Sabe-se que o Programa Nacional de Alimentação Escolar orienta as ações referentes a oferta de refeições dos alunos da educação básica, o que inclui as crianças matriculadas em creches públicas ou filantrópicas (BRASIL, 2009). Conforme a Resolução Número 08 de 14 de maio de 2012, o valor por pessoa repassado para atender às creches em período integral é de um real por dia (BRASIL, 2012), o que indica que o nutricionista, responsável técnico pela gestão do programa, deve planejar o cardápio de forma criteriosa para que possam ser atendidas de forma satisfatória as necessidades nutricionais das crianças. Ainda, na Resolução citada acima, foi determinado que 70% das necessidades nutricionais diárias das crianças matriculadas em creches em regime integral deverão ser atendidas.

O presente trabalho apresenta uma abordagem multiobjetivo com variáveis inteiras e binárias (inteiros valendo 0 ou 1) para tratar o problema da dieta em creches que servem café da manhã, almoço e um lanche da tarde para crianças. Considera-se que um alimento pertence a um determinado grupo de equivalência; por exemplo, bolo de fubá, pamonha, pão de batata, pão francês e pão de centeio pertencem ao grupo Pão. Outros grupos considerados são Leite, Fruta, Arroz, Feijão, Carne, Guarnição, Hortaliça. Em um cardápio diário deve haver itens de todos os grupos e a quantidade dos itens são inteiros não negativos que indicam o número de porções de $25g$ ou $25mL$. Além do mais, a massa total da refeição não pode ultrapassar um valor limite. O otimizador deve decidir quais alimentos de cada grupo deve entrar na solução e em qual quantidade discreta.

Com o intuito de garantir não somente refeições de menor custo, mas também pratos ricos em determinados nutrientes, neste trabalho busca-se minimizar o preço da refeição diária e maximizar concomitantemente os níveis de proteína, vitamina A, vitamina C, cálcio e ferro. Como a relação entre os critérios é conflituosa, justifica-se a aplicação de técnicas de otimização multiobjetivo. Neste contexto, busca-se não somente uma única solução ótima, mas um conjunto denominado Pareto-ótimo para o qual as soluções apresentam uma relação de compromisso em relação aos objetivos (STEUER, 1986; DEB, 2001). Sendo assim, o nutricionista decisor possuirá um conjunto com as melhores opções de cardápio em relação aos critérios de qualidade escolhidos.

Neste trabalho, a otimização é realizada utilizando a técnica da soma de ponderações convexas das funções objetivo utilizando pesos aleatórios. Desta maneira, a solução do problema multiobjetivo de programação inteira se resume na resolução de vários problemas mono-objetivo de programação inteira. Pelo método utilizado, existe a possibilidade da geração de soluções fracamente não dominadas, no sentido global (STEUER, 1986). Para eliminar estas soluções no conjunto final, uma ordenação pela não dominância é realizada para garantir que todas as soluções são Pareto-ótimas (DEB, 2001).

As soluções não dominadas globalmente devem atender à pelo menos 70% das necessidades nutricionais diárias em relação à 18 nutrientes. Os nutrientes considerados são calorias, proteínas, fibras, vitaminas A, B1, B2, B6, B12, C, D e E, folato, cálcio, fósforo, ferro, magnésio, potássio e zinco.

O modelo deste problema possui 74 variáveis, sendo metade inteiras e metade binárias. As restrições totalizam 104, sendo 18 de atendimento de necessidades nutricionais, 32 de limites inferior e 32 superior envolvendo as variáveis inteiras e as respectivas binárias, e 8 restrições para decidir quais alimentos dos grupos devem entrar na solução, e 4 para limitar a massa total do café da manhã (sem a massa das frutas), do almoço e das frutas no café e no lanche da tarde. Foram encontradas 18 soluções não dominadas globalmente.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a formalização de um problema de otimização multiobjetivo e o método da soma ponderada; a Seção 3 apresenta a definição e o modelo de matemático de otimização do problema da dieta multiobjetivo linear inteiro; a Seção 4 apresenta os resultados e análises do processo de otimização realizado; e por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões finais e as propostas de trabalhos futuros.

2 Otimização Multiobjetivo

2.1 Problema de Otimização Multiobjetivo

Sem perda de generalidade, considere o problema de maximização multiobjetivo linear inteiro com n variáveis, m objetivos e p restrições lineares, apresentado na Equação 1. A variável $\mathbf{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]' \in X \subseteq \mathbb{Z}^n$ é o vetor coluna de decisão. O espaço de soluções factíveis X, com n dimensões, é composto pelas soluções que satisfazem todas as restrições do problema, sendo elas de limites de valores ou funcionais. O vetor coluna de m objetivos de $\mathbf{x}$, $F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x})\, \ldots\, f_m(\mathbf{x})]' \in \mathbb{R}^m$, é o resultado da multiplicação matricial de $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ por $\mathbf{x}$. Cada linha de C possui os coeficientes de cada uma das m funções objetivo. O conjunto de restrições do problema é representado pela multiplicação matricial de $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ por $\mathbf{x}$, que deve ser igual ao vetor coluna de termos independentes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. Considere que as devidas variáveis de desvio (folga ou sobra) já foram inclusas no modelo. Cada linha de A e $\mathbf{b}$ possui os termos de cada uma das p restrições. O resultado desejado do processo de otimização multiobjetivo é o conjunto de soluções eficientes ou Pareto-ótimo, $X^* \subseteq X$, que consiste de todas as soluções factíveis para o qual o vetor de objetivos não pode ser melhorado em qualquer dimensão sem degradar algum outro. Em outras palavras, X^* possui todas as soluções viáveis para o qual existe uma relação de compromisso entre os critérios de avaliação (STEUER, 1986; DEB, 2001).

$$
\begin{aligned}
X^* \;\; = \;\; & \max_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x})\, \ldots\, f_m(\mathbf{x})]' = C\mathbf{x} \\
\text{sujeito a:} \; & \\
& A\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ duas soluções factíveis. É verdade que $\mathbf{u}$ domina (fortemente) $\mathbf{v}$, se somente se, para todo inteiro $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ é válido que $F_j(\mathbf{u}) \geq F_j(\mathbf{v})$ e existe pelo menos um j no mesmo conjunto tal que $F_j(\mathbf{u}) > F_j(\mathbf{v})$. Se for o caso da não existência de desigualdade, diz-se que existe uma dominância fraca. O conjunto Pareto-ótimo X^* é composto por todas as soluções não dominadas $\mathbf{x}^*$ no que diz respeito ao conjunto de soluções factíveis X. A imagem de X^* é usualmente denominado Fronteira de Pareto (STEUER, 1986; DEB, 2001).

2.2 Método da Soma Ponderada

Seja $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ o conjunto de todos os vetores de pesos com valores estritamente positivos. Para um vetor coluna $\lambda \in \Lambda$ fixo, o problema de otimização ponderado correspondente ao problema apresentado na Equação 1 é dado pela Equação 2 (STEUER, 1986).

$$\begin{aligned} x^* &= \max_{\mathbf{x} \in X} \lambda' F(\mathbf{x}) = \lambda' C\mathbf{x} \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2}$$

Se porventura o espaço de variáveis X fosse real, então a solução ótima x^* da Equação 2 seria uma solução Pareto-ótima da Equação 1. Porém, como X é um espaço vetorial inteiro, então x^* pode ser uma solução fracamente Pareto-ótima, não dominada fracamente no sentido global (STEUER, 1986).

Para um vetor fixo de pesos, este modelo encontra uma única solução em cada otimização. A ideia é executar a otimização diversas vezes com vetores aleatórios de pesos, de modo a gerar diferentes soluções. Porém, é possível que para dois vetores pesos distintos seja gerado uma mesma solução (STEUER, 1986). Assim, para se gerar uma amostra do conjunto Pareto-ótimo, o Algoritmo 1 foi elaborado.

Algoritmo 1 Obtenção de Soluções Pareto-ótimas via Método da Soma Ponderada

Entrada: n, X, C, A, $\mathbf{b}$, $NumOtimizacoes$
Saída: $Solucoes$
  $Solucoes \leftarrow$ TabelaHashVazia()
  para $i = 1$ **até** $NumOtimizacoes$ **faça**
    se $i \leq m$ **então**
      $\lambda \leftarrow$ VetorCanonico(m, i)
    senão
      $\lambda \leftarrow$ VetorPesosAleatorios(m)
    fim se
    $fobj \leftarrow \lambda' C$
    $sol \leftarrow$ Solver($fobj$, X, A, $\mathbf{b}$)
    se não ExisteSolucao($Solucoes$, sol) **então**
      $Solucoes[sol.x] \leftarrow sol$
    fim se
  fim para
  $Solucoes \leftarrow$ OrdenacaoPelaNaoDominancia($Solucoes$)

O Algoritmo 1 recebe como entrada as informações do problema, que são a dimensão do espaço de variáveis n, o número de objetivos m, o espaço de variáveis X, a matriz de objetivos C, a matriz e o vetor de termos independentes das restrições A e $\mathbf{b}$, e o número de otimizações a realizar, $NumOtimizacoes$, com diferentes vetores aleatórios de pesos. O algoritmo retorna uma base de dados de soluções, $Solucoes$, que é uma tabela hash (CORMEN et al., 2001) no qual a chave é o vetor de variáveis, solução do processo de otimização, e o valor é a estrutura que possui todas as informações da solução retornada. É realizado no algoritmo um processo de Monte Carlo (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001) para se extrair diferentes amostras do conjunto Pareto-ótimo. Nas primeiras m interações, são realizadas otimizações mono-objetivo considerando

Tabela 1: Grupos de alimentos com as respectivas opções e as unidades de medida.

Grupo	Alimentos	Unidade	Quantidade de Itens no Cardápio	Limite Porção Mínima Máxima
Pão	Bolo de Fubá, Pamonha, Pão de Batata, Pão Francês, Pão de Centeio	$25g$	1	1; 2
Leite	Leite de Vaca Integral, Leite de Cabra, Extrato Solúvel de Soja[1]	$25mL$	1	4; 8
Fruta	Banana, Goiaba, Laranja, Maçã, Melancia, Salada de Frutas	$25g$	2	1; 4
Arroz	Arroz Branco, Arroz Integral, Macarrão à Bolonhesa, Risoto de Frango	$25g$	1	2; 6
Feijão	Feijão Branco, Feijão Tropeiro, Feijão Mulatinho, Tutu à Mineira	$25g$	1	1; 6
Carne	Carne Moída Refogada, Fígado Frito, Filé de Frango à Milanesa, Lombo de Porco Assado	$25g$	1	1; 3
Guarnição	Batata Frita, Farofa, Salada de Legumes, Nhoque de Batata ao Molho de Tomate, Purê de Batata	$25g$	1	1; 4
Hortaliça	Beterraba Cozida, Cenoura Cozida, Couve Refogada, Couve-Flor Gratinada, Tomate Seco, Vagem Cozida	$25g$	2	1; 4

cada critério separadamente, pois o vetor de pesos é um vetor canônico, ou seja, possui como entrada o valor 0 em todas as m dimensões, exceto na posição i, que recebe o valor 1. Nas iterações seguintes, gera-se um vetor de pesos aleatórios λ e uma combinação linear convexa dos coeficientes das funções objetivo é armazenada em $fobj$. Assim, o problema multiobjetivo transformado em mono-objetivo é solucionado no solver Gurobi (GUROBI, 2012), que retorna todas as informações da solução ótima encontrada em sol. Se a solução obtida ainda não foi encontrada, então a mesma é armazenada na tabela hash. Ao final, uma ordenação pela não dominância das soluções (DEB, 2001) é realizada para remover as soluções fracamente Pareto-ótimas, se acaso existirem.

3 Definição do Problema e Modelagem Matemática

Em uma creche no qual abriga crianças, é desejado construir os melhores cardápios para o café da manhã e almoço de forma que possua uma relação de compromisso entre preço e níveis de proteína, vitaminas A e C, cálcio de ferro. O custo deve ser minimizado e os outros critérios maximizados. O café da manhã é composto por alimentos do grupo Pão, Leite e Fruta. O almoço é composto por alimentos do grupo Arroz, Feijão, Carne, Guarnição e Hortaliça. E o lanche da tarde é composto por um alimento do grupo Fruta. É obrigatório que haja no cardápio itens de cada grupo de alimento e em quantidades adequadas, ou seja, número de porções de $25g$ ou $25mL$, de modo a suprir 70% das necessidades nutricionais diárias com relação à 18 nutrientes.

A Tabela 1 apresenta os grupos com as respectivas opções de alimentos com as unidades de medida que podem entrar no cardápio. Por exemplo, no café da manhã deve-se ter exatamente 1 item de alimento do grupo Pão no qual o número de porções pode variar de 1 a 2, ou seja de $25g$ a $50g$.

A Tabela 2 apresenta os 18 nutrientes analisados neste trabalho com a respectiva quantidade dos mesmos por porção de $25g$ ou $25mL$ de alimento (PACHECO, 2011), os valores dos requisitos nutricionais que representam 70% das necessidades diárias (NAS, 1989), e os preços fictícios em unidades monetárias por cada unidade de porção. A unidade de medida dos nutrientes proteínas, fibras, vitaminas B1, B2, E, B6 e C, cálcio, fósforo, ferro, magnésio, potássio e zinco é o miligrama (mg). A unidade de medida dos nutrientes vitamina A, D, Folato e B12 é em micrograma (μg).

Seja então x_{ij} a variável que representa a quantidade inteira de porções do alimento i que pertence ao grupo j, e seja y_{ij} a variável binária que informa se alimento i que pertence ao grupo j entrará no cardápio ótimo, no sentido multiobjetivo. Suponha que I_j seja a quantidade de itens alimentícios de cada grupo j, e que existam J grupos. Suponha que as constantes L_{ij} e U_{ij} sejam os limites inferior e superior de x_{ij}, se acaso y_{ij} assumir o valor 1, pois caso contrário os limites serão nulos. Para um grupo j tem-se que $\bar{I}_j$, $0 \leq \bar{I}_j \leq I_j$, itens podem entrar no cardápio. A Equação 3 apresenta o conjunto de restrições que modela os limites das variáveis e a seleção de um número fixo de itens de cada grupo.

$$\begin{array}{lcll} x_{ij} - L_{ij}y_{ij} & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,I_j\}, \forall j \in \{1,\ldots,J\} & \text{(Limite inferior)} \\ x_{ij} - U_{ij}y_{ij} & \leq & 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,I_j\}, \forall j \in \{1,\ldots,J\} & \text{(Limite superior)} \\ \sum_{i=1}^{I_j} y_{ij} & = & \bar{I}_j, \quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} & \text{(Seleção de itens)} \end{array} \tag{3}$$

Seja d_{ijk} o nível do nutriente k no alimento i que pertence ao grupo j. Suponha que existem K nutrientes em análise e que o nível desejado deste seja maior ou igual que L_k. A Equação 4 apresenta o conjunto de restrições que modela as necessidade nutricionais que devem ser supridas para todos os nutrientes.

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I_j} d_{ijk}x_{ij} \geq L_k, \quad \forall k \in \{1,\ldots,K\} \quad \text{(Suprimento nutricional)} \tag{4}$$

Para limitar a massa da refeição, deve-se utilizar as variáveis dos possíveis itens a entrar, computar o somatório das multiplicações do pesos de cada porção unitária pelo número de porções utilizadas. Este valor deve ser menor ou igual a um determinado limite superior. Este tipo de restrição é feito para o café da manhã, sem a inclusão da fruta, que deve ter no máximo 300 gramas. O almoço deve ter no máximo 500 gramas. A massa total das frutas do café da manhã e do lanche da tarde deve ter entre 100 e 300 gramas. O café da manhã terá um item do grupo Pão, um do grupo Leite e um do grupo Fruta. O almoço terá um item do grupo Arroz, um do Feijão, um do Carne, um do Guarnição, dois do grupo Hortaliça. O lanche da tarde terá um item do grupo Fruta. Considera-se aqui que todas as poções unitárias possuem uma massa de $25g$. Supondo que existem W refeições parciais para o qual existem alimentos de diversos grupos, a Equação 5 apresenta a restrição geral que limita superiormente a massa para uma refeição parcial w por U_w, que no presente caso pode ser o café da manhã, o almoço ou o lanche da tarde. Se for o caso de limitação inferior, basta substituir a relação por maior ou igual e usar um limite inferior L_w.

$$\sum_{j\in J}\sum_{i=1}^{I_j} w_j x_{ij} \leq U_w, \quad \forall w \in \{1,\ldots,W\}, \exists j \in \{1,\ldots,J\}, \forall i \in \{1,\ldots,I_j\} \quad \text{(Massa)} \tag{5}$$

Tabela 2: Composição nutricional dos alimentos por porção, recomendação nutricional diária para crianças e preço por porção em unidades monetárias.

Alimento	Calorias	Proteínas	Fibras	Vit, A	Vit, B1	Vit, D	Vit, B2	Vit, E	Vit, B6	Folato	Vit, C	Vit, B12	Cálcio	Fósforo	Ferro	Magnésio	Potássio	Zinco	Preço
Bolo de Fubá	80,0000	1,2500	0,4500	11,3400	0,0450	0,1150	0,0650	3,1750	0,0250	10,4950	0,0600	0,0600	10,4000	20,8000	0,3200	3,5900	28,3850	0,1200	0,1250
Pamonha	77,2500	1,7500	0,4500	10,8350	0,0300	0,0400	0,0150	0,1200	0,0100	7,6600	1,1400	0,0100	4,5000	17,7950	0,2000	6,4900	9,8000	0,0850	0,4000
Pão de Batata	60,3500	1,7000	0,6500	3,0450	0,1000	0,0500	0,1050	1,6100	0,0400	25,3350	1,4800	0,0200	8,1500	30,6400	0,6500	5,1200	75,4300	0,1750	0,2250
Pão Francês	68,4750	2,1500	0,8000	0,0000	0,1300	0,0000	0,1000	0,1500	0,0050	28,2500	0,0000	0,0000	27,7500	21,4000	0,7500	5,0000	23,5500	0,2250	0,1500
Pão de Centeio	64,1400	2,1250	1,4500	8,5150	0,1450	0,0250	0,1250	1,2300	0,0300	21,6300	0,0000	0,0200	5,1800	39,7800	0,9450	8,1500	50,2450	0,2750	0,2500
Leite de Vaca Integral	15,2500	0,8250	0,0000	7,7500	0,0125	0,2500	0,0375	0,0125	0,0125	1,2500	0,1625	0,0875	29,7500	23,3500	0,0125	3,3500	38,0000	0,0875	0,0450
Leite de Cabra	17,2500	0,8900	0,0000	14,2500	0,0113	0,0000	0,0375	0,0000	0,0113	0,2500	0,2500	0,0175	33,5000	27,7500	0,0000	3,5000	51,0000	0,0000	0,0750
Extrato de Soja	8,2500	0,6875	0,3250	0,8000	0,0400	0,0000	0,0175	0,0000	0,0100	0,3750	0,0000	0,0000	1,0000	12,2500	0,1437	4,7500	17,6250	0,0575	0,1250
Banana	23,0000	0,2381	0,5159	2,0000	0,0119	0,0000	0,0238	0,0794	0,1429	4,7738	2,2738	0,0000	1,5079	5,0000	0,1190	7,2500	99,0000	0,0397	0,0300
Goiaba	12,7500	0,2000	1,3500	19,7500	0,0125	0,0000	0,0125	0,0000	0,0350	3,5000	46,0000	0,0000	5,0000	6,2500	0,0750	2,5000	71,0000	0,0575	0,2500
Laranja	11,7500	0,2321	0,4643	5,1250	0,0214	0,0000	0,0089	0,0589	0,0143	7,5750	13,3000	0,0000	10,0000	3,5000	0,0179	2,5000	45,2500	0,0161	0,0275
Maçã	14,7500	0,0385	0,4808	1,3250	0,0038	0,0000	0,0019	0,1635	0,0115	0,7000	1,4250	0,0000	1,7500	1,7500	0,0385	1,2500	28,7500	0,0096	0,0500
Melancia	7,5000	0,1517	0,1000	7,0000	0,0083	0,0000	0,0050	0,0000	0,0100	0,7500	2,0250	0,0000	1,7500	2,7500	0,0533	2,5000	28,0000	0,0250	0,0248
Salada de Frutas	15,3083	0,1717	0,4117	7,2300	0,0117	0,0000	0,0100	0,0517	0,0267	4,8750	8,6567	0,0000	4,8267	3,2817	0,0550	3,2050	52,1767	0,0200	0,0375
Arroz Branco	31,1725	0,5750	0,1000	0,0000	0,0500	0,0000	0,0000	0,2750	0,0250	0,8250	0,1250	0,0000	3,1000	9,7250	0,3500	2,2500	11,3750	0,1000	0,0300
Arroz Integral	19,1875	0,3750	0,1641	0,0000	0,0172	0,0000	0,0016	0,2797	0,0219	0,9422	0,0000	0,0000	1,5000	15,7016	0,0625	6,9422	10,5188	0,1000	0,0450
Macarrão à Bolonhesa	31,5295	1,3409	0,3409	5,0614	0,0386	0,0023	0,0205	0,0250	0,0159	1,9409	0,7000	0,0455	2,2727	14,3705	0,3409	4,5932	30,0773	0,1932	0,0500
Risoto de Frango	44,6000	2,6333	0,3333	7,0100	0,0500	0,0167	0,0133	0,5367	0,0533	3,5867	1,4800	0,0200	8,0333	27,7833	0,4333	5,0333	45,7167	0,1767	0,3750
Feijão Branco	35,5000	2,2333	1,9667	0,0000	0,0600	0,0000	0,0133	0,2800	0,0300	34,2500	0,0000	0,0000	18,2333	42,2500	0,7000	17,0000	115,7500	0,3000	0,0500
Feijão Tropeiro	82,6667	3,5833	3,1667	10,7167	0,0833	0,0500	0,0417	1,0167	0,0750	51,6583	0,9583	0,0250	12,8333	72,5750	1,0000	23,0333	192,1250	0,4833	0,0575
Feijão Mulatinho	15,2500	0,8333	1,0500	0,0800	0,1250	0,0000	0,0067	0,2450	0,0167	5,1267	0,1367	0,0000	4,5333	15,6750	0,2500	5,7750	46,4750	0,0100	0,0250
Tutu à Mineira	54,3125	2,1250	1,2500	0,0437	0,0500	0,2500	0,0125	0,0125	0,0250	20,3875	0,2500	0,0688	6,7188	29,6563	0,5000	7,7813	77,2562	0,2687	0,1250
Carne Moída Refogada	73,2667	6,0000	0,0333	0,0000	0,0067	0,0633	0,0433	0,8567	0,0700	2,5067	0,1700	0,7200	3,4333	42,9300	0,6000	5,0600	75,4300	1,2833	0,1750
Fígado Frito	56,7000	6,3500	0,0000	1,9375	0,0500	0,0700	0,9825	0,8800	0,3450	52,1875	5,5725	26,5600	3,4000	109,9250	1,5000	5,5575	87,9050	1,2975	0,1250
Filé de Frango à Milanesa	58,2500	6,0000	0,0250	3,5675	0,0125	0,0725	0,0275	1,6475	0,1150	1,4750	0,0375	0,0750	4,3000	45,4750	0,2500	5,6350	50,4275	0,7075	0,1500
Lombo de Porco Assado	45,3125	4,0208	0,0417	0,4583	0,1812	0,0583	0,0500	0,1563	0,1000	1,6250	1,4188	0,1063	2,2917	40,8958	0,1667	4,6583	78,6833	0,3583	0,3250
Batata Frita	70,0000	1,0769	0,3077	0,0000	0,0192	0,0000	0,0000	1,5731	0,0615	2,0692	1,7192	0,0000	3,7308	9,3038	0,3077	4,6500	76,3000	0,0615	0,1000
Farofa	96,5000	0,0833	0,1667	25,4750	0,0000	0,0000	0,0000	1,5083	0,0000	0,9000	0,0000	0,0000	4,8333	0,6333	0,3333	0,2583	3,0583	0,0250	0,0875
Salada de Legumes	24,1228	0,3969	0,4518	112,7105	0,0154	0,0022	0,0066	0,7018	0,0592	4,2237	2,5132	0,0022	7,0614	9,2741	0,2193	4,7018	69,1140	0,0658	0,0750
Nhoque de Batata ao Molho de Tomate	28,8583	0,7292	0,3542	10,6062	0,0417	0,0146	0,0271	0,3542	0,0313	3,8125	2,4958	0,0000	2,7083	11,8188	0,2500	3,8167	56,4333	0,0688	0,1000
Purê de Batata	27,1187	0,4833	0,2500	12,6625	0,0187	0,0437	0,0083	0,5437	0,0521	1,9146	1,4333	0,0146	8,6667	12,0646	0,1667	4,4146	69,1458	0,0667	0,0950
Beterraba Cozida	11,0000	0,2500	0,4286	0,8750	0,0071	0,0000	0,0089	0,0000	0,0161	20,0000	0,9000	0,0000	4,0000	9,5000	0,1964	5,7500	76,2500	0,0875	0,0500
Cenoura Cozida	11,2500	0,2667	0,6333	613,7500	0,0067	0,0000	0,0150	0,1250	0,0617	3,4750	0,5750	0,0000	7,7500	7,5000	0,1500	3,2500	56,7500	0,0750	0,0275
Couve Refogada	29,2917	0,7083	0,6250	179,0875	0,0208	0,0000	0,0250	3,5333	0,0542	6,3083	24,3417	0,0000	28,0417	12,2625	0,3500	7,1125	94,1500	0,0917	0,2500
Couve-Flor Gratinada	22,8050	0,7250	0,3000	13,0200	0,0150	0,1000	0,0250	0,0500	0,0350	8,6950	6,5950	0,0000	16,0200	16,6850	0,1050	3,5450	56,8500	0,0800	0,0750
Tomate	213,4091	2,0455	2,5000	158,8636	0,1364	0,0000	0,1136	3,8864	0,1818	37,5000	47,8636	0,0000	15,9091	60,7045	1,1364	28,0227	558,4091	0,2273	0,1250
Vagem Cozida	10,4300	0,4750	0,8000	16,6500	0,0175	0,0000	0,0250	0,0000	0,0150	8,3250	2,4250	0,0000	1,1500	9,7500	0,3200	6,2500	74,7500	0,0900	0,0175
70% Recomendação Diária	910,0000	13,3000	17,5000	280,0000	0,4200	3,5000	0,4200	4,9000	0,4200	140,0000	17,5000	0,8400	560,0000	350,0000	7,0000	91,0000	2660,0000	3,5000	

Para a modelagem das funções objetivo, considere c_{ij} o custo por cada porção unitária ($25g$ ou $25mL$) de x_{ij}. Assim, o custo total de cada refeição será $C(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} c_{ij} x_{ij}$. Para medir os níveis dos nutrientes selecionados, considere o lado esquerdo da Equação 4 e fixe k = *Proteínas* para $N_{pt}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} d_{ij,proteinas} x_{ij}$, k = *Vitamina A* para $N_{va}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} d_{ij,vitamina\,a} x_{ij}$, k = *Vitamina C* para $N_{vc}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} d_{ij,vitamina\,c} x_{ij}$, k = *Cálcio* para $N_{ca}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} d_{ij,calcio} x_{ij}$, e k =*Ferro* para $N_{fe}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} d_{ij,ferro} x_{ij}$. Como desejamos minimizar o custo e maximizar os níveis de nutrientes, e usaremos um algoritmo de maximização durante o processo de otimização, é apresentado na Equação 6 o conjunto funções objetivo.

$$F(\mathbf{x}) = \left[\; -C(\mathbf{x}) \; N_{pt}(\mathbf{x}) \; N_{va}(\mathbf{x}) \; N_{vc}(\mathbf{x}) \; N_{ca}(\mathbf{x}) \; N_{fe}(\mathbf{x}) \; \right]' \tag{6}$$

Portanto, utilizando as Equações 3, 4, 5 e 6 é apresentado na Equação 7 o modelo de otimização multiobjetivo linear inteiro para o problema da dieta, que neste trabalho é voltado para solucionar o problema do cardápio em creches.

$$\begin{array}{lrcl}
\max & F(\mathbf{x}) & = & [-C(\mathbf{x}) \; N_{pt}(\mathbf{x}) \; N_{va}(\mathbf{x}) \; N_{vc}(\mathbf{x}) \; N_{ca}(\mathbf{x}) \; N_{fe}(\mathbf{x})]' \\
\text{sujeito a:} & & & \\
& x_{ij} - L_{ij} y_{ij} & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, I_j\}, \, \forall j \in \{1, \ldots, J\} \\
& x_{ij} - U_{ij} y_{ij} & \leq & 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, I_j\}, \, \forall j \in \{1, \ldots, J\} \\
& \sum_{i=1}^{I_j} y_{ij} & = & \bar{I}_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, J\} \\
& \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I_j} d_{ijk} x_{ij} & \geq & L_k, \quad \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{I_j} w_j x_{ij} & \leq & U_w, \quad \forall w \in \{1, \ldots, W\}, \, \exists j \in \{1, \ldots, J\}, \, \forall i \in \{1, \ldots, I_j\} \\
& \multicolumn{3}{l}{x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \forall i \in \{1, \ldots, I_j\}, \, \forall j \in \{1, \ldots, J\}} \\
& \multicolumn{3}{l}{y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \ldots, I_j\}, \, \forall j \in \{1, \ldots, J\}}
\end{array} \tag{7}$$

4 Resultados Computacionais

Para solucionar o problema da dieta multiobjetivo, foram utilizados o método da soma ponderada, apresentado pela Equação 2, e o Algoritmo 1 para otimizar o modelo apresentado pela Equação 7 usando os dados das Tabelas 1 e 2. O número de iterações realizadas pelo algoritmo foi 5000 e o número de soluções Pareto-ótimas distintas encontradas foi de 18. A média amostral e o desvio padrão amostral de tempo, em segundos, de cada otimização foi $0{,}0657$ e $0{,}0194$, respectivamente.

Tabela 3: Amostra de soluções do conjunto Pareto-ótimo.

Custo	Proteína	Vitamina A	Vitamina C	Cálcio	Ferro	Custo	Proteína	Vitamina A	Vitamina C	Cálcio	Ferro
5,0200	45,6731	2003,0029	547,2763	575,9091	12,8007	5,2450	58,3292	1763,6668	536,6700	605,9863	12,4721
5,7450	**66,1456**	1196,2108	505,7246	560,9109	16,6912	5,2100	59,5521	1558,6808	551,1154	606,4968	16,1169
5,0450	45,3231	**2004,6329**	541,7413	576,8091	11,5507	5,1200	49,2012	1867,6561	544,8932	610,2664	13,9414
5,3200	58,4792	1764,8668	**556,2350**	564,0863	16,0221	5,4300	49,9687	1574,4783	542,8837	616,3968	13,7169
5,1750	47,4687	1581,7608	537,3020	**617,9301**	12,2002	5,4700	61,6157	1653,0763	552,2419	604,2582	16,4362
5,2425	60,8175	1546,3745	504,3940	566,7473	**17,0216**	5,1500	47,8187	1580,1308	542,8370	617,0301	13,4502
5,7400	57,9854	1558,1008	547,0695	610,4968	15,3169	5,2700	52,5262	1875,6399	553,1757	567,7477	14,7414
5,4550	49,6187	1576,1083	537,3487	617,2968	12,4669	5,6200	52,6262	1891,2199	552,4957	560,4477	13,8414
5,1450	48,8512	1869,2861	539,3582	611,1664	12,6914	5,4900	61,7021	1553,0283	551,1620	605,8634	16,3835

A imagem das 18 amostras não dominadas encontradas, ou seja, a Fronteira de Pareto, é ilustrada na Tabela 3. Cada coluna representa uma função objetivo e cada linha representa uma solução. As unidades dos critérios são os mesmos da Tabela 2. Observe que as primeiras seis soluções possuem os melhores valores de critério no que diz respeito ao valor de cada função objetivo separadamente. As outras soluções possuem uma relação de compromisso entre os objetivos otimizados. A Figura 1 apresenta histogramas com a distribuição de todos os nutrientes utilizados neste trabalho como função objetivo e/ou restrição. Pode-se observar que todas as soluções atendem aos requisitos nutricionais em proporções variadas.

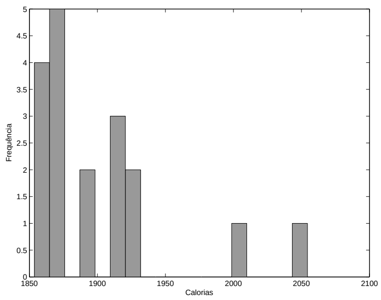
Todas as 18 soluções possuem uma massa de 250 gramas para o café da manhã, removendo a massa das frutas, 500 gramas para o almoço e 200 gramas para as frutas do café da manhã e lanche da tarde. A distribuição das frutas fica à critério do nutricionista responsável. Em cada cardápio há uma variação do tipo e da quantidade de alimento, apresentando uma relação de compromisso entre os critérios utilizados neste trabalho. A Tabela 4 mostra a frequência com que cada alimento está presente nas soluções não dominadas globalmente. Por exemplo, o Bolo de Fubá está no café da manhã de 2 soluções distintas. Através destes dados é possível saber quais são os alimentos que mais podem contribuir com os critérios conflitantes, sujeito às restrições apresentados neste trabalho. Por exemplo, o Leite de Vaca Integral está presente em todas as soluções por ser um alimento muito nutritivo e barato. Esta observação pode ser feita para outros alimentos. Já no grupo Guarnição existe uma alternância no tipo de alimento a se incluir no cardápio solução. Esta observação e os diferentes valores de porções nas soluções ilustram a relação de compromisso do conjunto solução final. Por questões de espaço, não é apresentado a relação do número de porções (ou quantidade) de cada alimento por solução.

Tabela 4: Número de vezes em que um alimento esteve presente em soluções Pareto-ótimo.

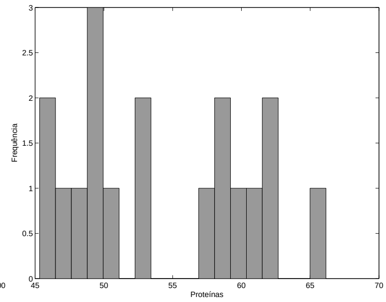
Alimento	Presença em Soluções
Bolo de Fubá	2
Pamonha	1
Pão de Batata	2
Pão Francês	13
Pão de Centeio	0
Leite de Vaca Integral	18
Leite de Cabra	0
Extrato de Soja	0
Banana	1
Goiaba	18
Laranja	17
Maçã	0
Melancia	0
Salada de Frutas	0
Arroz Branco	0
Arroz Integral	0
Macarrão à Bolonhesa	0
Risoto de Frango	18
Feijão Branco	0
Feijão Tropeiro	0
Feijão Mulatinho	0
Tutu à Mineira	18
Carne Moída Refogada	0
Fígado Frito	13
Filé de Frango à Milanesa	5
Lombo de Porco Assado	0
Batata Frita	1
Farofa	1
Salada de Legumes	9
Nhoque de Batata ao Molho de Tomate	0
Purê de Batata	7
Beterraba Cozida	0
Cenoura Cozida	0
Couve Refogada	18
Couve-Flor Gratinada	0
Tomate	18
Vagem Cozida	0

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

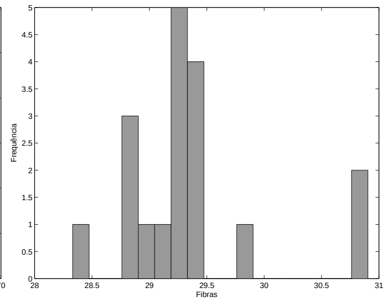
Este trabalho apresentou uma abordagem multiobjetivo para o problema da dieta em creches, no qual são considerados o café da manhã e o almoço. O modelo multiobjetivo com



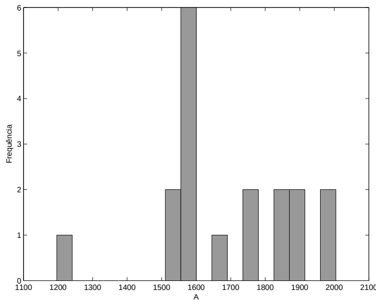
(a) Calorias.



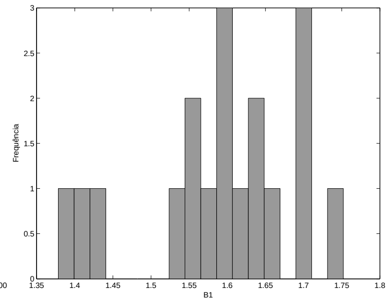
(b) Proteínas.



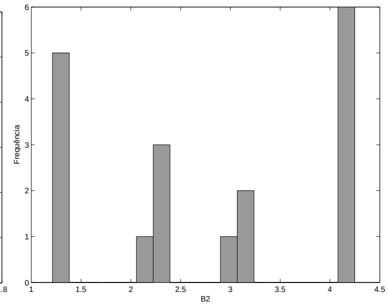
(c) Fibras.



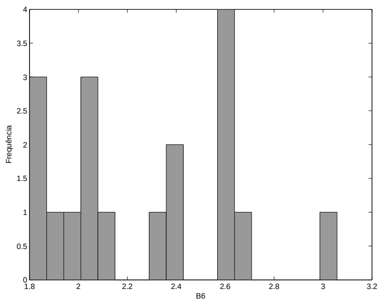
(d) Vitamina A.



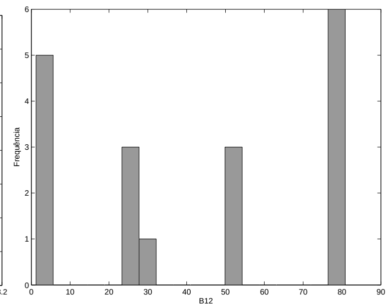
(e) Vitamina B1.



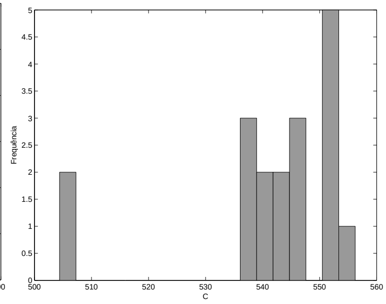
(f) Vitamina B2.



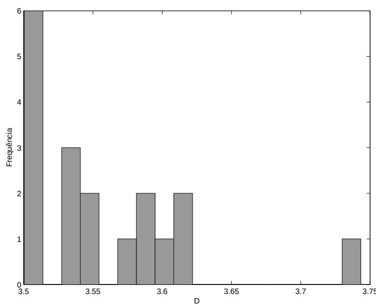
(g) Vitamina B6.



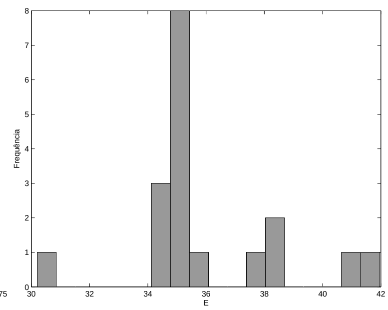
(h) Vitamina B12.



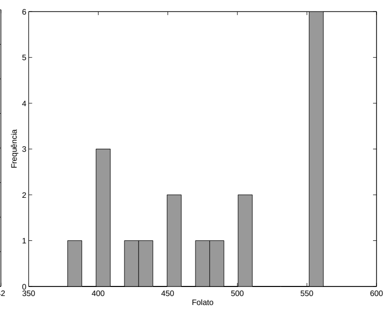
(i) Vitamina C.



(j) Vitamina D.

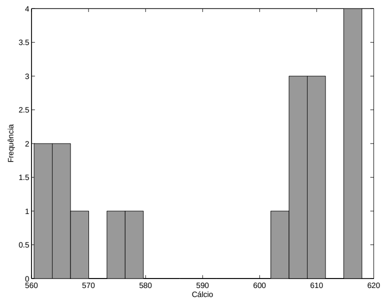


(k) Vitamina E.

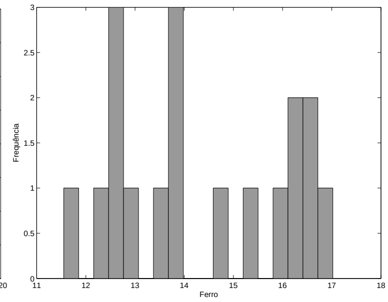


(l) Folato.

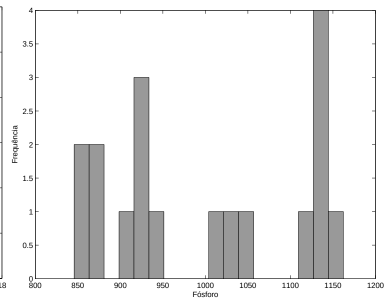
Figura 1: Distribuição dos nutrientes nas soluções não dominadas globalmente.



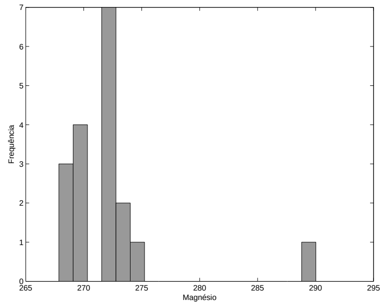
(m) Cálcio.



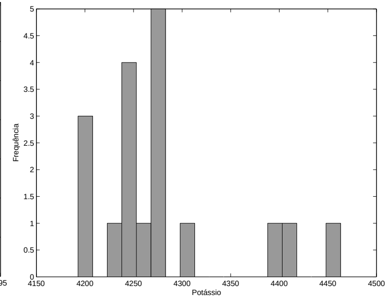
(n) Ferro.



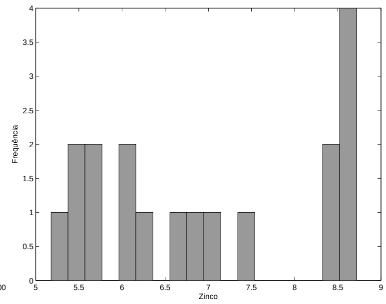
(o) Fósforo.



(p) Magnésio.



(q) Potássio.



(r) Zinco.

Figura 1: Distribuição dos nutrientes nas soluções não dominadas globalmente (Continuação).

variáveis inteiras foi solucionado, através do método das somas ponderadas, minimizando-se o custo das refeições e maximizando concomitantemente os níveis de proteínas, vitaminas A e C, além de ferro e cálcio. Um conjunto com 18 refeições não dominadas globalmente, com diferentes tipos de alimentos em quantidades distintas, foi encontrado. A partir deste conjunto, o nutricionista tomador de decisão poderá optar por um cardápio que respeita a relação de compromisso entre custo e um subconjunto de nutrientes.

Para trabalhos futuros, os autores almejam aplicar um algoritmo multiobjetivo determinístico inteiro para determinar exatamente todas as soluções não dominadas deste problema da dieta, e não somente uma amostra. Também será incrementado o número de opções de grupos de alimentos e de itens em cada grupo. Será aumentado também a quantidade de nutrientes a ser analisado.

Referências

BRASIL. Resolução/cd/fnde número 38, de 16 de julho de 2009. *Ministério da Educação – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação*, 2009. Disponível em: <http://www.mda.gov.br/portal/saf/arquivos/view/alimenta-o-escolar/RES38_FNDE.pdf>.

BRASIL. Resolução número 8, de 14 de maio de 2012. *Ministério da Educação – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação*, 2012. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/fnde/legislacao/item/3518-resolução-cd-fnde-n^{o}-8-de-14-de-maio-de-2012>.

CADENAS, J. M. et al. Application of fuzzy optimization to diet problems in argentinean farms. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 158, n. 1, p. 218–228, 2004.

CORMEN, T. H. et al. *Introduction to algorithms*. [S.l.]: MIT press, 2001.

DANTZIG, G. B. The diet problem. *Interfaces*, INFORMS, v. 20, n. 4, p. 43–47, 1990.

DEB, K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 2001.

DOUCET, A.; FREITAS, N. D.; GORDON, N. *An introduction to sequential Monte Carlo methods*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2001.

FORSTER, I. P. et al. Optimization of a research diet for the pacific white shrimp, litopenaeus vannamei, using mixture model methodology. *Aquaculture*, Elsevier, v. 298, n. 3, p. 260–266, 2010.

GARILLE, S. G.; GASS, S. I. Stigler's diet problem revisited. *Operations Research*, INFORMS, v. 49, n. 1, p. 1–13, 2001.

GUROBI, O. I. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. 2012. Disponível em: <http://www.gurobi.com>.

NAMEN, A. A.; BORNSTEIN, C. T. Uma ferramenta para avaliação de resultados de diversos modelos de otimização de dietas. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 24, n. 3, p. 445–465, 2004.

NAS. Recommended dietary allowances. In: NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, WASHINGTON. [S.l.], 1989.

PACHECO, M. *Tabela de equivalentes, medidas caseiras e composição química dos alimentos*. [S.l.]: Rubio, 2011.

PESSÔA, L. A. M.; LINS, M. P. E.; TORRES, N. T. Problema da dieta: uma aplicação prática para o navio hidroceanográfico "taurus". *Anais do XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, João Pessoa, Brasil, p. 1460–1471, 2009.

SANTOS, F. A.; RODRIGUES, M. T. Ferramenta para formulação de dietas de mínimo custo para pequenos ruminantes utilizando programação linear em passos iterativos. *Anais do XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, Fortaleza, Brasil, p. 12–21, 2007.

STEUER, R. E. *Multiple criteria optimization: Theory, computation, and application*. [S.l.]: Wiley & Sons, 1986.

STIGLER, G. J. The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics*, Oxford University Press, v. 27, n. 2, p. 303–314, 1945.