

ALGUNS RESULTADOS EM GRAFOS PTOLEMAICOS

Lilian Markenzon

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
markenzon@nce.ufrj.br

Christina F. E. M. Waga

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
waga@ime.uerj.br

RESUMO

Grafos ptolemaicos e suas subclasses vêm sendo estudados há algum tempo mas suas propriedades básicas como grafos cordais não foram completamente exploradas. Neste trabalho abordamos alguns destes tópicos. Apresentamos um novo teorema de caracterização baseado no grafo de cliques reduzido e, usando a construção indutiva de Bandelt e Mulder, definimos a sequência de extensões de vértice único, mostrando como é possível relacioná-la com o esquema de eliminação perfeita.

PALAVRAS CHAVE. grafos cordais; grafos ptolemaicos; subclasses.

Área Principal: Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

Ptolemaic graphs have been studied for some time. However, their basic properties as chordal graphs are not yet fully explored. In this paper we discuss some of these issues. We present a new characterization theorem based on the reduced clique graph and, using the inductive construction of ptolemaic graphs presented by Bandelt and Mulder, we define the one-vertex extension sequence, showing how it is possible to relate it to a perfect elimination ordering.

KEYWORDS. chordal graphs; ptolemaic graphs; subclasses.

Main Area: Theory and Algorithms in Graphs

1. Introdução

Kay e Chartrand (1965) definiram grafos ptolemaicos, uma subclasse de grafos cordais. Um grafo conexo $G = (V, E)$ é *ptolemaico* se quaisquer vértices $u, v, w, x \in V$ satisfazem a desigualdade ptolemaica

$$d(u, v)d(w, x) \leq d(u, w)d(v, x) + d(u, x)d(v, w).$$

Recentemente, Uehara e Uno (2009) introduziram uma representação para grafos ptolemaicos e utilizaram a estrutura para resolver os problemas de isomorfismo e determinação do ciclo hamiltoniano para a classe. Apesar de estudados há algum tempo, as propriedades básicas de grafos ptolemaicos como grafos cordais não foram completamente exploradas. Neste trabalho abordamos alguns destes tópicos. Primeiramente apresentamos um novo teorema de caracterização, baseado no grafo de cliques reduzido, estrutura definida por Habib e Stacho (2012). Em seguida, usando a construção indutiva apresentada por Bandelt e Mulder (1986), definimos a *sequência de extensões de vértice único (seu)* e mostramos como é possível relacioná-la com um esquema de eliminação perfeita.

2. Conceitos básicos

Assume-se a familiaridade com os conceitos básicos de grafos cordais que podem ser encontrados em Blair e Peyton (1993) e Golubic (2004). Nesta seção são revistos os conceitos mais importantes.

Seja $G = (V, E)$ um grafo com *ordem* $|V| = n > 0$ e *tamanho* $|E| = m$. A *vizinhança* de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ e sua *vizinhança fechada* é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Dois vértices u e v são *gêmeos verdadeiros* em G se $N[u] = N[v]$ e são *gêmeos falsos* se $N(u) = N(v)$ e $\{u, v\} \notin E$. Para qualquer subconjunto $S \subseteq V$, $G[S]$ é o *subgrafo de G induzido por S* . Um conjunto S é uma *clique* quando $G[S]$ é um grafo completo. Um vértice $v \in V$ é *simplicial em G* se $N(v)$ é uma clique.

Um *grafo cordal* é aquele em que todo ciclo simples de comprimento maior ou igual a quatro possui uma corda, isto é, uma aresta ligando dois vértices não consecutivos do ciclo. Um *esquema de eliminação perfeita (eep)* of $G = (V, E)$ é uma função bijetiva $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow V$ tal que, para $1 \leq i < n$, $\sigma(i)$ é um vértice simplicial no subgrafo induzido $G_i = G[\{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}]$. Um *eep* é uma ordenação de V em uma sequência $\sigma(V) = [\sigma(1), \dots, \sigma(n)]$, que será denotada por $\sigma(V) = [v_1, \dots, v_n]$. A posição do vértice v em σ é dada por $\sigma^{-1}(v)$. O conjunto $X_\sigma(v) = \{w \in N(v) \mid \sigma^{-1}(w) > \sigma^{-1}(v)\}$ é chamado *conjunto de adjacência monótono* de $v \in V$ relativo à σ .

O *grafo de interseção de cliques* de um grafo cordal conexo G é o grafo conexo valorado tal que seus vértices são as cliques maximais de G e suas arestas ligam vértices que correspondem a cliques não disjuntas. A cada aresta é atribuído um peso inteiro, dado pela cardinalidade do conjunto interseção das cliques maximais que correspondem às suas extremidades. Uma árvore geradora de peso máximo deste grafo é chamada *árvore de cliques* de G .

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $u, v \in V$. Um subconjunto $S \subset V$ é um *separador* de G se ao menos dois vértices da mesma componente conexa de G estão em componentes conexas distintas de $G[V - S]$. O conjunto S é um *separador minimal* de G se S é um separador e nenhum subconjunto próprio de S separa o grafo. O conjunto $S \subset V$ é um *separador de vértices* para vértices não-adjacentes u e v (um *uv-separador*) se a remoção de S do grafo separa u e v em componentes conexas distintas. Se nenhum subconjunto próprio de S é um *uv-separador* então S é um *uv-separador minimal*. Se S é um *uv-separador minimal* para algum par de vértices u e v , ele é chamado *separador minimal de vértices*. Um separador minimal é sempre um separador minimal de vértices mas a recíproca não é verdadeira.

Um grafo conexo G é *de distância hereditária* se a distância entre quaisquer de seus vértices permanece a mesma em todo subgrafo induzido conexo contendo esses dois vértices.

Um grafo conexo G é *ptolemaico* se quaisquer vértices u, v, w, x de G satisfazem a desigualdade ptolemaica

$$d(u, v)d(w, x) \leq d(u, w)d(v, x) + d(u, x)d(v, w).$$

A Figura 1 apresenta um exemplo de grafo ptolemaico.

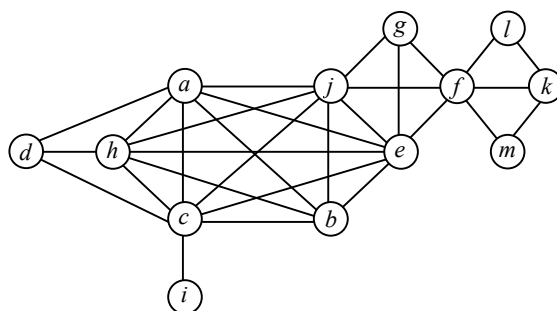


Figura 1: Um grafo ptolemaico.

O grafo *gema* é o grafo obtido fazendo um vértice adjacente a cada um dos quatro vértices de um grafo caminho P_4 . Um grafo é *livre de gema* quando não contém o grafo gema como subgrafo induzido.

Os teoremas que se seguem apresentam caracterizações para os grafos ptolemaicos.

Teorema 1 (Howorka (1981)) $G = (V, E)$ é um grafo ptolemaico se e somente se é livre de gema e cordal.

Teorema 2 (Howorka (1981)) As seguintes condições são equivalentes:

1. G é ptolemaico;
2. G é de distância hereditária e cordal;
3. Para quaisquer cliques maximais não disjuntas Q e Q' de G , $Q \cap Q'$ separa $Q \setminus Q'$ e $Q' \setminus Q$.

3. Uma nova caracterização para grafos ptolemaicos

Habib e Stacho (2012) apresentam uma nova representação para grafos cordais, o *grafo de cliques reduzido*, usada para caracterizar conjuntos asteroidais e discutir grafos que admitem uma representação por árvores com pequeno número de folhas. As noções que se seguem, introduzidas no trabalho, são necessárias.

Duas cliques maximais Q e Q' de G formam um *par de separação* se $Q \cap Q'$ é não vazio e todo caminho em G de um vértice de $Q \setminus Q'$ para um vértice de $Q' \setminus Q$ contém um vértice de $Q \cap Q'$.

Teorema 3 (Habib e Stacho (2012)) Um conjunto S é um *separador minimal de vértices* de um grafo cordal G se e somente se existem cliques maximais Q e Q' de G que formam um par de separação tal que $S = Q \cap Q'$.

O *grafo de cliques reduzido* $C_r(G)$ de G é o grafo cujos vértices são as cliques maximais de G e cujas arestas $\{Q, Q'\}$ ligam cliques Q e Q' que formam pares de separação.

Teorema 4 (Habib e Stacho (2012)) *Seja G um grafo cordal conexo. O grafo de cliques reduzido $C_r(G)$ é a união de todas as árvores de cliques de G .*

O grafo de cliques reduzido fornece uma nova caracterização para grafos ptolemaicos, apresentada no próximo teorema.

Teorema 5 *Um grafo cordal G é ptolemaico se e somente se o grafo de cliques reduzido e o grafo de cliques são iguais.*

Prova: De forma equivalente temos que provar que, quaisquer duas cliques maximais de G distintas não disjuntas formam um par de separação se e somente se o grafo de interseção de cliques e o grafo de cliques reduzido de G são iguais.

Sejam $C(G) = (V_c, E_c)$ o grafo de interseção de cliques e $C_r(G) = (V_r, E_r)$ o grafo de cliques reduzido de um grafo ptolemaico G . Pelas definições, $V_c = V_r = \mathbb{Q}$ (conjunto de cliques maximais) e, pelo Teorema 4, $E_r \subseteq E_c$. Considere uma aresta $\{Q, Q'\} \in E_c$. Quaisquer duas cliques maximais distintas não disjuntas Q e Q' de G , Q e Q' formam um par de separação. Pelo Teorema 3, $Q \cap Q'$ é um separador minimal de vértices de G . Assim, a aresta $\{Q, Q'\} \in E_r$. Logo, $E_c = E_r$.

Reciprocamente, considere $C(G) = C_r(G)$. Pela definição de grafo de cliques reduzido, todas as interseções de cliques maximais são separadores minimais de vértices de G , isto é, formam pares de separação, ou ainda, são separadas por sua interseção. Pelo Teorema 2, G é ptolemaico. ■

4. Uma construção de grafos ptolemaicos

Da definição de *eeep*, conclui-se que os conjuntos de adjacência monótonos $X_\sigma(v_i)$ são cliques de G , bem como os conjuntos $\{v_i\} \cup X_\sigma(v_i)$, $i = 1, \dots, n$. É imediato deduzir um procedimento indutivo para construir um grafo cordal, percorrendo a *eeep* em ordem reversa: iniciando com o grafo trivial $G_n = (\{v_n\}, \emptyset)$, adicione, a cada passo, um novo vértice v_i , $i = n-1, \dots, 1$, adjacente aos vértices do conjunto de adjacência monótono de v_i , i.e., a clique $X_\sigma(v_i)$ de G_{i+1} . É possível particularizar esta construção para algumas classes de grafos cordais restringindo a clique já existente, embora isto não seja conhecido para grafos ptolemaicos.

Bandelt and Mulder (1986) apresentaram uma construção indutiva para grafos ptolemaicos. Seja $G = (V, E)$ um grafo, $v \in V$ e $u \notin V$. Uma extensão de G para um grafo $G' = (V', E')$ é uma *extensão de vértice único* se ela se enquadra em um dos seguintes casos:

- (α) $V' = V \cup \{u\}$ e $E' = E \cup \{v, u\}$.
- (β) $V' = V \cup \{u\}$ e $E' = E \cup \{\{x, u\} \mid x \in N[v]\}$.
- (γ) $V' = V \cup \{u\}$ e $E' = E \cup \{\{x, u\} \mid x \in N(v)\}$.

Teorema 6 (Bandelt e Mulder (1986)) *Um grafo G é ptolemaico se e somente se G é obtido a partir de um único vértice por uma sequência de extensões de vértice único onde a aplicação de (γ) é restrita a vértices simpliciais.*

Com base neste conceito, definimos uma nova sequência de construção para um grafo ptolemaico $G = (V, E)$. Uma *sequência de extensões de vértice único (seu)* de G é uma sequência de triplas

$$\pi(G) = [\pi(1), \dots, \pi(n)]$$

sendo $\pi(i) = (x_i, v_i, u_i)$, $i = 2, \dots, n$, tal que

1. $x_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$;
2. $v_i = u_j$, $j < i$;
3. $u_i \neq u_k$, $1 \leq k \leq i - 1$;

e $\pi(1)$ é uma tripla inicial $(\emptyset, \emptyset, u_1)$ onde o símbolo \emptyset denota a ausência de parâmetro.

O grafo $G[\{u_1, \dots, u_i\}]$ é denotado $G_{(i)}$, $1 \leq i \leq n$; $G_{(0)} = (\emptyset, \emptyset)$ and $G_{(n)} = G$. De acordo com o Teorema 6, quando x_i é igual a (γ) , v_i deve ser um vértice simplicial no subgrafo $G_{(i-1)}$.

Algumas subclasses podem ser facilmente identificadas. Considere $\pi(G)$ uma *seu* de um grafo ptolemaico G . Se ela é composta apenas por extensões dos tipos (α) e (γ) , o grafo G é uma árvore e se ela é composta somente de extensões tipo β , o grafo G é um grafo completo.

As sequências *seu* e *eep* podem ser relacionadas e o Teorema 7 mostra como.

Teorema 7 *Dada uma seu de um grafo ptolemaico $G = (V, E)$, existe um eep associado.*

Prova: Considere $\pi(G) = [(\emptyset, \emptyset, u_1), (x_2, v_2, u_2), \dots, (x_n, v_n, u_n)]$ uma *seu* de um grafo ptolemaico G . Ela expressa uma maneira iterativa de construir G .

Seja $G_{(1)} = (\{u_1\}, \emptyset)$. O vértice u_1 pode ser considerado o último vértice no *peo* de G , i.e., $\sigma(n) = u_1$.

Observe que u_i , $2 \leq i \leq n$, é um vértice simplicial no grafo $G_{(i)}$ quando x_i é de um dos seguintes tipos: (α) , (γ) ou (β) aplicada a um vértice simplicial v_i de $G_{(i-1)}$. O vértice u_i pode ser incluído diretamente no *eep* como $\sigma(n - i + 1)$.

Consideremos agora o caso em que x_i é uma extensão tipo (β) aplicada a vértice não simplicial v_i de $G_{(i-1)}$. Os vértices v_i e u_i são gêmeos verdadeiros em $G_{(i)}$. O vértice v_i não é simplicial em $G_{(i-1)}$ nem em $G_{(i)}$, assim como, o vértice u_i também não é simplicial em $G_{(i)}$. Então, a posição de u_i no *eep* precisa ser determinada; ele aparece imediatamente antes ou depois do vértice v_i no *eep*, pois u_i é gêmeo verdadeiro de v_i . Dependendo do caso, é necessário deslocar alguns vértices. Desta forma a definição do *eep* é mantida. ■

Considere o grafo ptolemaico da Figura 1 e a seguinte *seu*:

$$\begin{aligned} \pi(G) = [(\emptyset, \emptyset, a), (\alpha, a, b), (\beta, b, c), (\gamma, b, d), (\beta, b, e), (\alpha, e, f), (\beta, f, g), \\ (\beta, a, h), (\alpha, c, i), (\beta, e, j), (\alpha, f, k), (\beta, k, l), (\gamma, l, m)]. \end{aligned}$$

Aplicando a demonstração do Teorema 7, obtemos o *eep*

$$\sigma(V) = [m, l, k, i, g, f, j, e, d, c, b, h, a].$$

Harary (1963) definiu *grafos bloco* como sendo um grafo conexo onde cada componente biconexa é um grafo completo (uma componente biconexa de G é um subgrafo maximal de G tal que ou é uma aresta ou dois vértices distintos são ligados por pelo menos dois caminhos).

O corolário que se segue apresenta uma propriedade para esta subclasse dos grafos ptolemaicos.

Corolário 8 *Seja G um grafo ptolemaico. Se G é um grafo bloco então um eep é obtido revertendo a ordem de uma seu.*

Prova: Todos os separadores minimais de vértices de um grafo bloco são conjuntos unitários. Uma vez que a extensão do tipo (β) aplicada a um vértice não simplicial aumenta a cardinalidade dos separadores minimais de vértices, as possibilidades para x_i , $2 \leq i \leq n$, de uma seu são somente extensões de vértice único (α) , (γ) ou (β) aplicada a um vértice simplicial. Então, pelo Teorema 7, o eep é obtido revertendo a ordem da seu. ■

5. Conclusões

Neste trabalho, estudamos algumas propriedades de grafos ptolemaicos como grafos cordais. Partindo do fato de que grafos cordais admitem representação por árvores de cliques, apresentamos uma nova caracterização para esta classe baseada nos grafos de interseção de cliques e nos grafos de cliques reduzido - um grafo síntese de todas as representações por árvores de um grafo cordal.

Usando a construção indutiva por extensões de vértice único de grafos ptolemaicos, definimos uma sequência que está diretamente relacionada com um esquema de eliminação perfeita. Esta sequência oferece ainda possibilidades interessantes e pretendemos continuar explorando-a. Por exemplo, é possível caracterizar uma classe simplesmente por sua seu? Dado um grafo, quantas sequências associadas existem?

Agradecimentos: Os autores agradecem ao CNPq (Processos 305372/2009-2 e 473798/2012-3) pelo financiamento parcial desta pesquisa.

Referências

- Bandelt, H.-J., Mulder, H.M.** (1986), Distance-hereditary graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 41:182–208.
- Blair, J.R.S., Peyton, B.** (1993), An introduction to chordal graphs and clique trees. In: George, J.A., Gilbert, J. R., Liu, J. W. H. (eds.), *Graph theory and sparse matrix computation*. Springer Verlag, IMA 56, 1-30.
- Golumbic, M.C.** (2004), *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. 2nd edition, Academic Press, New York.
- Habib, M., Stacho, J.** (2012), Reduced clique graphs of chordal graphs. *European J. Combin.* 33:712–735.
- Harary, F.** (1963), A characterization of block graphs. *Canad. Math. Bull.* 6 1-6.
- Howorka, E.** (1981), A characterization of ptolemaic graphs, *J. Graph Theory* 5: 323-331.
- Kay, D.C., Chartrand, G.** (1965), A characterization of certain ptolemaic graphs. *Canad. J. Math.* 17:342-246.
- Uehara, R., Uno, Y.** (2009), Laminar structure of ptolemaic graphs with applications. *Discrete Appl. Math.* 157:1533-1543.