

## RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FPO REATIVO VIA MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA BARREIRA MODIFICADA-PENALIDADE

**Guilherme Guimarães Lage**

Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo  
Av. Trabalhador São-carlense, 400 – São Carlos, SP, Brasil  
glage@usp.br

**Geraldo Roberto Martins da Costa**

Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo  
geraldo@sc.usp.br

### RESUMO

Problemas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) constituem uma ampla classe de problemas de análise estática de sistemas de energia elétrica cujo objetivo é a otimização de um dado desempenho operacional. No entanto, até o presente momento não existe uma abordagem realmente robusta, confiável e rápida para a resolução de problemas de FPO que, ao mesmo tempo, satisfaça todas as necessidades dos centros de operação das concessionárias de energia. Nesse contexto, este trabalho propõe uma nova abordagem para resolução do Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), denominada método da função Lagrangiana barreira modificada-penalidade. Tal abordagem se baseia na associação dos métodos primal-dual barreira logarítmica e de barreira modificada-penalidade. Para demonstrar a eficácia e robustez desta abordagem, foram realizados testes os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. Os resultados mostram que a abordagem proposta é bastante eficaz na resolução de problemas de FPOR.

**PALAVRAS CHAVE.** Fluxo de potência ótimo, Programação não linear, Função barreira modificada-penalidade.

### ABSTRACT

Optimal Power Flow (OPF) problems constitute an ample class of power system steady-state analysis problems whose objective is the optimization of a given operational performance. Nonetheless, up to the present, there is no actual robust, reliable and fast approach for solving OPF problems that, at the same time, satisfies all the needs of electric energy utilities. In this context, this work proposes a new approach for solving the Reactive Optimal Power Flow (ROPF), namely penalty-modified barrier Lagrangian function method. Such an approach is based on an association of the primal-dual logarithmic barrier and the penalty-modified barrier methods. The effectiveness and robustness of this approach were verified with the IEEE 14, 30, 57, 118 and 300-bus test systems. The results show that the proposed approach is very effective in solving ROPF problems.

**KEYWORDS.** Optimal power flow, Nonlinear programming, Penalty-modified barrier function.

## 1. Introdução

Problemas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) constituem uma ampla classe de problemas cujo objetivo é a otimização de um dado desempenho operacional de um Sistema de Energia Elétrica (SEE), sujeito ao balanço de potência ativa e reativa nas barras da rede, às restrições operacionais do sistema, aos limites das variáveis de controle etc. Um dos objetivos de um FPO é a determinação dos ajustes das variáveis de controle de um SEE responsáveis por otimizar um determinado desempenho operacional do sistema.

Através da resolução do problema minimização das perdas ativas na transmissão, determina-se, portanto, o conjunto de ações de controle que levam o sistema à uma operação mais eficiente e com menor custo operacional. Esse problema de otimização é formulado como um problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), no qual as variáveis de controle associadas à potência ativa são fixas e as variáveis associadas à potência reativa são ajustadas de forma a alcançar o desempenho desejado.

Matematicamente, o FPO é formulado como um problema de Programação Não Linear (PNL), não convexo, restrito, estático e de grande porte. Desde sua proposição inicial por Carpentier (1962), o FPO tem se mostrado como uma ferramenta essencial para o planejamento e a operação dos SEEs. Atualmente o FPO aparece como uma poderosa ferramenta para análise de SEEs graças ao desenvolvimento de metodologias eficientes (Huneault e Galiana, 1991; Momoh et al., 1999a,b) e à implementação de *solvers* robustos (Quintana et al., 2000).

No entanto, apesar de todo o progresso realizado na área, até o presente momento não há nenhuma abordagem realmente robusta, confiável e rápida para a resolução de problemas de FPO, a qual satisfaça todas as necessidades dos centros de operação das concessionárias de energia elétrica (de Sousa et al., 2008).

Métodos Lagrangianos são bastante eficazes quando aplicados à resolução de problemas de PNL com somente restrições de igualdade. Porém, na existência de restrições de desigualdade, exige-se que o conjunto das restrições ativas na solução seja conhecido, o que pode dificultar o processo de resolução do problema.

Nos métodos de barreira, problemas de PNL com somente restrições de desigualdade são transformados em um problema de barreira cuja função auxiliar cresce indefinidamente na fronteira da região factível, restringindo a busca da solução do problema ao interior dessa região. No entanto, essa característica pode causar problemas à medida que a solução se aproxima da fronteira da região factível: a matriz Hessiana da função auxiliar pode se tornar mal condicionada e a função barreira e suas derivadas de primeira e segunda ordem não são definidas na fronteira da região factível do problema.

Nos métodos de barreira modificada, essas dificuldades são superadas. Problemas de PNL com somente restrições de desigualdade são transformados em um problema de barreira modificada cuja região factível corresponde à do problema original relaxada. Nesses métodos, a matriz Hessiana da função barreira modificada permanece bem condicionada e as funções barreira modificada e suas derivadas de primeira e segunda ordem são definidas na fronteira da região factível do problema original.

No intuito de aproveitar as melhores qualidades desses métodos, de Sousa (2006) propôs uma nova abordagem para resolução de problemas de PNL restritos, denominada método da Função Lagrangiana Barreira Modificada (FLBM), baseada na associação dos métodos primal-dual barreira logarítmica (Fiacco e McCormick, 1968) e de barreira modificada (Polyak, 1992). Nela, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade a partir do acréscimo de variáveis de folga não negativas, cuja condição de

não negatividade é tratada pela função barreira modificada de Frisch (Polyak, 1992), e ao problema resultante associa-se uma função Lagrangiana.

Apesar de ser definida em uma região factível relaxada do problema original, a função barreira modificada de Frisch não é definida em pontos exteriores a essa região. Isso exige que o processo de atualização das variáveis durante a determinação do ponto estacionário da FLBM seja monitorado a cada iteração. Por esse motivo, a abordagem de resolução de problemas de PNL desenvolvida neste trabalho propõe a substituição da função barreira modificada por uma Função Barreira Modificada com Extrapolação Quadrática (FBMEQ) no método desenvolvido por de Sousa (2006). Dessa forma, os termos de barreira passam a ser definidos tanto no interior quanto no exterior da região factível relaxada do problema. A FBMEQ é, portanto, uma função definida por partes: ora é uma função barreira modificada, ora é uma função extrapolação quadrática.

A abordagem para resolução de problemas de PNL restritos apresentada neste trabalho, denominada método da Função Lagrangiana Barreira Modificada–Penalidade (FLBMP), é baseada na associação dos métodos primal–dual barreira logarítmica (Fiacco e McCormick, 1968) e de barreira modificada–penalidade (Breitfeld e Shanno, 1994, 1996). Nela, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade a partir do acréscimo de variáveis de folga não negativas, cuja condição de não negatividade é tratada por uma FBMEQ (Breitfeld e Shanno, 1994), e ao problema resultante associa-se uma função Lagrangiana.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é apresentada a formulação matemática do problema de FPOR. Na Seção 3 apresentam-se a definição da FLBMP e o método da FLBMP para resolução de problemas de PNL restritos. Na Seção 4 são apresentados os resultados obtidos para um exemplo numérico e para o FPOR, usando-se os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. E, finalmente, na Seção 5 apresentam-se as conclusões.

## 2. Formulação do Problema de FPO Reativo

Matematicamente, o problema de FPOR pode ser formulado como um problema de PNL restrito. Em (1), as magnitudes e os ângulos de fase da tensão nas barras e os *taps* dos transformadores em-fase são modelados como variáveis contínuas, e as susceptâncias equivalentes dos bancos de capacitores e reatores *shunt* são fixas. O desempenho operacional do sistema a ser otimizado é a minimização das perdas ativas na transmissão. Esse modelo de FPOR é, portanto, dado por:

$$\min \sum_{k,m \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}} g_{km} \left( \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (1a)$$

$$\text{s.a: } P_k - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{G}' \cup \mathcal{C} \quad (1b)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{C} \quad (1c)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta, t, b_k^{sh}) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G} \quad (1d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (1e)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (1f)$$

onde  $V$  e  $\theta$  são, respectivamente, os vetores das magnitudes e ângulos de fase da tensão nas barras do sistema;  $t$  é o vetor dos *taps* variáveis de transformadores em-fase;  $b^{sh}$  é o vetor das susceptâncias equivalentes dos bancos de capacitores e reatores *shunt* (que neste trabalho são consideradas fixas);  $P_k$  e  $Q_k$  representam, respectivamente, as injeções líquidas de potência ativa e reativa na barra  $k$ ;  $Q_{G_k}$  é a potência reativa gerada na barra  $k$ ;  $Q_k^{sh}$  é a injeção de potência reativa pelo *shunt* da barra  $k$ ;  $P_{km}$  e  $Q_{km}$  são os fluxos de potência ativa e reativa no ramo  $k-m$ ;  $\theta_{km}$  é a diferença entre os ângulos de fase da tensão nas barras  $k$  e  $m$ ; e  $g_{km}$  é a condutância série associada ao elemento de transmissão do ramo  $k-m$ .

Ainda, tem-se que  $\mathcal{B}$  é o conjunto de todas as barras do sistema;  $\mathcal{G}$  é conjunto das barras de geração;  $\mathcal{G}'$  é conjunto das barras de geração menos a barra *slack*;  $\mathcal{C}$  é conjunto das barras de carga;  $\mathcal{L}$  é o conjunto dos ramos  $k-m$  que representam linhas de transmissão;  $\mathcal{T}$  é conjunto dos ramos  $k-m$  que representam transformadores em-fase com *tap* variável; e, finalmente,  $\mathcal{V}_k$  é o conjunto das barras vizinhas à barra  $k$ .

### 3. Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada–Penalidade

Nesta seção são apresentados a definição da FLBMP, o método da FLBMP e seu algoritmo para resolução de problemas de PNL restritos.

#### 3.1. Definição da FLBMP

Considere o seguinte problema de PNL:

$$\min f(x) \quad (2a)$$

$$\text{s.a: } g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (2b)$$

$$h_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (2c)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , com  $p < n$ ; e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Considere também que as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  sejam de classe  $C^2$ .

Transformando as restrições de desigualdade em restrições de igualdade pelo acréscimo de variáveis de folga  $s$  não negativas, (2) pode ser reescrito como:

$$\min f(x) \quad (3a)$$

$$\text{s.a: } g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (3b)$$

$$h_i(x) + s_i = 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (3c)$$

$$s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (3d)$$

onde  $s \in \mathbb{R}^q$ .

No método da FLBM (de Sousa, 2006), a condição de não negatividade das variáveis de folga  $s$  é tratada pela função barreira de Frisch modificada (Polyak, 1992). Dessa forma, o problema (3) é transformado no seguinte problema:

$$\min f(x) - \mu \sum_{i=1}^q \sigma_i \ln(\mu^{-1} s_i + 1) \quad (4a)$$

$$\text{s.a: } g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (4b)$$

$$h_i(x) + s_i = 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (4c)$$

onde  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira modificada e  $\sigma \in \mathbb{R}^q$  é o vetor das estimativas dos multiplicadores de Lagrange associados às condições de não negatividade das variáveis de folga  $s$ , com  $\sigma_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, q$ .

Como a função barreira modificada (4a) só é definida para  $s > -\mu$ , Breitfeld e Shanno (1996) propuseram a extrapolação quadrática dos termos logarítmicos em (4a), resultando na FBMEQ. Nela, os termos de barreira são definidos pela função  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua e suave em  $y \in \mathbb{R}$ , da seguinte forma:

$$\phi(y) = \begin{cases} \ln(\mu^{-1}y + 1) & \text{se } y \geq -\beta\mu \\ \frac{1}{2}q_a y^2 + q_b y + q_c & \text{se } y < -\beta\mu \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro definido no intervalo (0; 1) e representa a tolerância da aproximação de  $y$  à singularidade da função logarítmica. De acordo com Chen e Vassiliadis (2003), esse parâmetro pode ser constante e igual a 0,9.

Como a função  $\phi$  é contínua em  $y \in \mathbb{R}$ , a FBMEQ é, portanto, definida tanto no interior quanto na fronteira e no exterior da região factível relaxada.

Os coeficientes  $q_a$ ,  $q_b$  e  $q_c$  em (5) são determinados de forma que os valores do termo da extrapolação quadrática de  $\phi$  e suas derivadas de primeira e segunda ordem sejam iguais aos do termo logarítmico de  $\phi$  e suas derivadas em  $y = -\beta\mu$  (Breitfeld e Shanno, 1994). Logo:

$$q_a = -\frac{1}{[\mu(1-\beta)]^2} \quad (6a)$$

$$q_b = \frac{1-2\beta}{\mu(1-\beta)^2} \quad (6b)$$

$$q_c = \frac{\beta(2-3\beta)}{2(1-\beta)^2} + \ln(1-\beta) \quad (6c)$$

Portanto, no método da FLBMP, a condição de não negatividade das variáveis de folga  $s$  é tratada pela função  $\phi$  definida em (5). Dessa forma, o problema (3) é transformado no seguinte problema:

$$\min \quad f(x) - \mu \sum_{i=1}^q \sigma_i \phi(s_i) \quad (7a)$$

$$\text{s.a:} \quad g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (7b)$$

$$h_i(x) + s_i = 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (7c)$$

Por fim, as restrições (7b) são incorporadas à função objetivo por multiplicadores de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ , com  $\lambda$  irrestrito, e as restrições (7c) são incorporadas à função objetivo por multiplicadores de Lagrange  $\pi \in \mathbb{R}^q$ , com  $\pi \geq 0$  na solução. Dessa forma, a FLBMP associada ao problema (2) é dada por:

$$\mathcal{L}(x, s, \lambda, \pi, \sigma) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^q \sigma_i \phi(s_i) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q \pi_j [h_j(x) + s_j] \quad (8)$$

### 3.2. Método da FLBMP

No método da FLBMP, a solução do problema (2) é encontrada por meio da resolução de uma sequência de problemas de barreira modificada-penalidade (7), até que

as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sejam satisfeitas. Aplicando-se as condições necessárias de otimalidade à FLBMP, obtém-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\nabla \mathcal{L}(x, s, \lambda, \pi, \sigma) = 0 \quad (9)$$

A solução do sistema de equações não lineares (9) é determinada pelo método de Newton, que, por sua vez, gera as direções de busca  $\Delta d = (\Delta x, \Delta s, \Delta \lambda, \Delta \pi)^T$  através de sucessivas resoluções de um sistema de equações lineares representado, em sua forma simplificada, por:

$$W \Delta d = -\nabla \mathcal{L} \quad (10)$$

onde  $W$  é a matriz Hessiana da FLBMP.

As variáveis  $x$ ,  $s$ ,  $\lambda$  e  $\pi$  são atualizadas por:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_p \Delta x^k \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha_p \Delta s^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_d \Delta \lambda^k \\ \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha_d \Delta \pi^k \end{aligned} \quad (11)$$

onde  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$  são os passos primal e dual utilizados na atualização das variáveis. O passo primal pode ser igual a 1 (passo puro de Newton), ou determinado através de um processo de busca linear satisfazendo, por exemplo, a condição de Armijo (Chen e Vassiliadis, 2003). O passo dual é calculado de forma que cada multiplicador  $\pi$  permaneça maior ou igual a zero, isto é (de Sousa, 2006):

$$\alpha_d = \min \left\{ \left( \min_{\Delta \pi < 0 \text{ e } \pi > 0} \frac{\pi}{|\Delta \pi|} \right), 1 \right\} \quad (12)$$

Os multiplicadores de Lagrange associados à condição de não negatividade das variáveis de folga  $s$  são atualizados de acordo com o esquema proposto por Breitfeld e Shanno (1994), da seguinte forma:

$$\sigma_i^{k+1} = \begin{cases} \mu \sigma_i^k (\mu^{-1} s_i^k + 1)^{-1} & \text{se } \sigma_i^k \geq -\beta \mu \\ \mu \sigma_i^k (q_a s_i^k + q_b) & \text{se } \sigma_i^k < \beta \mu \end{cases} \quad (13)$$

para  $i = 1, \dots, q$ . Esses multiplicadores são inicializados por  $\sigma_i^0 = 1$  (de Sousa, 2006).

Por fim, o parâmetro de barreira  $\mu$  é atualizado por uma simples regra de redução:

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\tau} \quad (14)$$

onde  $\tau > 1$  e geralmente  $\tau = 2$  ou  $\tau = 10$ . Como a FBMEQ é definida para qualquer valor de  $\mu$ , esse parâmetro é inicializado por um valor positivo arbitrário, geralmente igual a  $\mu^0 = 10^{-1}$  ou  $\mu^0 = 10^{-2}$  (Breitfeld e Shanno, 1994).

O método converge quando as seguintes condições forem satisfeitas (Torres e Quintana, 1998):

$$\begin{aligned} v_1^k &\leq \xi_1 \\ v_2^k &\leq \xi_2 \\ v_3^k &\leq \xi_3 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} \|g(x^k)\|_\infty &\leq \xi_1 \\ v_2^k &\leq \xi_2 \end{aligned} \quad (15)$$

onde:

$$v_1^k = \|\mathcal{L}(x, s, \lambda, \pi, \sigma)\|_\infty \quad (16)$$

$$v_2^k = \frac{|f(x^k) - f(x^{k-1})|}{1 + |f(x^k)|} \quad (17)$$

$$v_3^k = \max\{h_i(x^k)\} \quad \text{para } i = 1, \dots, q \quad (18)$$

Se os critérios  $v_1^k \leq \xi_1$ ,  $v_2^k \leq \xi_2$  e  $v_3^k \leq \xi_3$  forem satisfeitos, então a factibilidade primal e dual escalar estão garantidas, o que significa que na iteração  $k$ , tem-se uma solução que satisfaz as condições de KKT com precisão  $\xi_1$ . Quando problemas numéricos impedem o alcance destas, o método para assim que a factibilidade das restrições de igualdade for alcançada e as mudanças no valor da função objetivo forem desprezíveis. Além disso, as condições  $s_i \geq 0$  e  $\pi_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, q$  devem ser satisfeitas na solução.

### 3.2.1. Algoritmo do Método da FLBMP

- P1.** Dado o problema (2) construa a FLBMP (8);
- P2.** Faça  $k = 0$ ;  
Dê um valor inicial para as variáveis  $x^0$ ,  $s^0$ ,  $\lambda^0$  e  $\pi^0$ , tal que  $\pi_i^0 \geq 0$  para  $i = 1, \dots, q$ , e para o parâmetro  $\mu^0$ ;  
Dê uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange  $\sigma_i^0 \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, q$ ;  
Especifique um valor para o fator  $\tau > 1$  e as tolerâncias  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ ;
- P3.** Determine o gradiente  $\mathcal{L}$  e a matriz Hessiana  $W$  da FLBMP, e resolva (10);
- P4.** Atualize as variáveis do problema por (11), determinando  $x^{k+1}$ ,  $s^{k+1}$ ,  $\lambda^{k+1}$  e  $\pi^{k+1}$  e vá para o passo **P5**;
- P5.** Se o critério de parada do método de Newton for satisfeito, vá para o passo **P6**;  
Caso contrário, volte para o passo **P3**;
- P6.** Se as condições (15) forem satisfeitas para  $x^{k+1}$ ,  $s^{k+1}$ ,  $\lambda^{k+1}$ ,  $\pi^{k+1}$  e  $\sigma^k$ , e se  $s^{k+1} \geq 0$  e  $\pi^{k+1} \geq 0$ , **pare**.  
Caso contrário, atualize os multiplicadores de Lagrange  $\sigma$  por (13), determinando  $\sigma^{k+1}$ , e o parâmetro  $\mu$  por (14), faça  $k = k + 1$ , e volte para o passo **P3**.

## 4. Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados numéricos obtidos a partir da aplicação do método da FLBMP à resolução de um exemplo numérico e do problema de FPOR (1) para os sistemas IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras (UW Power Systems Test Case Archive, 1999).

A modelagem do exemplo numérico e dos problemas de FPOR, bem como a implementação do algoritmo do método da FLBMP, foram feitas em Matlab (Matlab, 2009).

### 4.1. Exemplo Numérico

Para exemplificar o uso do método da FLBMP, considere o seguinte problema:

$$\min \quad (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \quad (19a)$$

$$\text{s.a: } x_1 + x_2 = 3 \quad (19b)$$

$$x_1^2 - x_2 \leq 0 \quad (19c)$$

$$1,5 \leq x_2 \leq 2 \quad (19d)$$

Transformando as restrições de desigualdade em igualdades através da inserção de variáveis de folga  $s$  não negativas e tratando a condição de não negatividade dessas variáveis pela função  $\phi$  (5), o problema (19) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\min \quad (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 - \mu \sum_{i=1}^3 \sigma_i \phi(s_i) \quad (20a)$$

$$\text{s.a:} \quad x_1 + x_2 - 3 = 0 \quad (20b)$$

$$x_1^2 - x_2 + s_1 = 0 \quad (20c)$$

$$1,5 - x_2 + s_2 = 0 \quad (20d)$$

$$x_2 - 2 + s_3 = 0 \quad (20e)$$

onde  $\phi_i$ , para  $i = 1, \dots, 3$ , é dada por (5).

Para resolver o problema (19), o método da FLBMP foi inicializado com o ponto inicial no interior da região definida pelas restrições de desigualdade:  $x_1 = 1,1$  e  $x_2 = 1,7$ . As Tabelas 1 e 2 apresentam o processo de convergência do método da FLBMP. As variáveis  $s$  foram inicializadas, respectivamente, a partir das restrições (20c), (20d) e (20e) do problema modificado. Ainda, considerou-se  $\mu^0 = 10^{-1}$  e as tolerâncias para convergência foram  $\xi_1 = 10^{-5}$ ,  $\xi_2 = 10^{-4}$  e  $\xi_3 = 10^{-5}$ . Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ ,  $\pi$  e  $\sigma$  foram inicializados, respectivamente, por 0, 1 e 1.

**Tabela 1. Convergência do método da FLBMP aplicado ao problema (19), para  $x_1^0 = 1,1$  e  $x_2^0 = 1,7$  – Função objetivo, variáveis primais e parâmetro  $\mu$ .**

Iteração	F. Obj.	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu$
0	5,9461	1,1000	1,7000	0,4900	0,2000	0,3000	$10^{-1}$
1	4,3377	1,3228	1,6772	-0,0726	0,1772	0,3228	$10^{-1}$
2	4,5766	1,3053	1,6947	-0,0091	0,1947	0,3053	$10^{-2}$
3	4,6114	1,3028	1,6972	-0,0000	0,1972	0,3028	$10^{-3}$
4	4,6072	1,3031	1,6969	-0,0011	0,1969	0,3031	$10^{-4}$
5	4,6114	1,3028	1,6972	0,0000	0,1972	0,3028	$10^{-5}$

**Tabela 2. Convergência do método da FLBMP aplicado ao problema (19), para  $x_1^0 = 1,1$  e  $x_2^0 = 1,7$  – Variáveis duais.**

Iteração	$\lambda$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
0	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	-4,3518	3,6503	0,3608	0,2365	1,0000	1,0000	1,0000
2	-4,5010	3,8346	0,0018	0,0008	0,3650	0,0361	0,0237
3	-4,5099	3,8568	0,0000	0,0000	3,8346	0,0000	0,0000
4	-4,5089	3,8542	0,0000	0,0000	0,0039	0,0000	0,0000
5	-4,5099	3,8568	0,0000	0,0000	3,8542	0,0000	0,0000

Como pode ser visto, o método da FLBMP convergiu em 5 iterações, com a restrição de desigualdade (19c) ativa. Observe também que, na segunda e na quarta iteração, a variável  $s_1$  extrapola o limiar de troca entre as funções barreira logarítmica modificada e função extrapolação quadrática, pois  $s_1 < -\mu\beta$ . Nesses casos, a condição de não negatividade dessa variável é tratada pela função extrapolação quadrática.

O processo de convergência do método da FLBMP apresentado nas Tabelas 1 e 2 é representado graficamente na Figura 1. Nesta figura, a restrição de igualdade (19b) é

representada na cor azul, e as restrições de desigualdade (19c) e canalizada (19d) são representadas na cor vermelha. A região definida pelas restrições de desigualdade do problema é representada na cor vermelha suave.

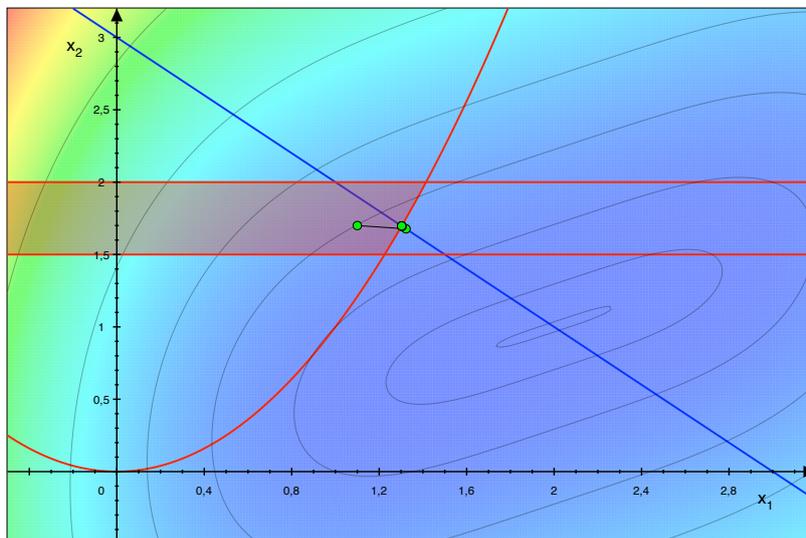


Figura 1. Convergência do método da FLBMP aplicado ao problema (19), para  $x_1^0 = 1,1$  e  $x_2^0 = 1,7$ .

Através da Figura 1, pode-se ver que, neste caso, a convergência se dá a partir da região infactível do problema (19).

## 4.2. Resolução do Problema de FPO Reativo

Para avaliar a eficácia desta abordagem para resolução do problema de FPO, foram realizados testes com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. Ainda, considerou-se que os limites mínimo e máximo da magnitude de tensão fossem, respectivamente, 0,95 e 1,05 p.u. Para o sistema de 300 barras considerou-se que o limite máximo da magnitude de tensão fosse 1,06 p.u. Além disso, para os sistemas de 14, 30, 57 e 118 barras, assume-se que os *taps* dos transformadores em-fase possam ser ajustados para valores dentro do intervalo de 0,88 e 1,12 p.u.

Em todos os testes realizados, o método da FLBMP foi inicializado com um ponto de operação definido pelo banco de dados. Além disso, considerou-se  $\mu^0 = 10^{-1}$  e as tolerâncias para convergência foram  $\xi_1 = 10^{-4}$ ,  $\xi_2 = 10^{-3}$  e  $\xi_3 = 10^{-4}$ . Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ ,  $\pi$  e  $\sigma$  foram inicializados, respectivamente, por 0, 1 e 1.

### 4.2.1. Sistema IEEE de 14 Barras

O sistema elétrico IEEE de 14 barras possui as seguintes características: 1 barra *slack*; 5 barras com controle de geração de reativos; 9 barras de carga; e 17 linhas de transmissão. Os três transformadores em-fase deste sistema foram considerados como transformadores com *tap* variável.

Para este sistema, o método da FLBMP convergiu em 4 iterações. O valor calculado para as perdas ativas na transmissão foi de 13,6419 MW, com um perfil médio de tensão de 1,0252 p.u.

As Figuras 2 e 3 apresentam a trajetória de convergência das magnitudes de tensão das barras de geração e dos *taps* dos transformadores em-fase.

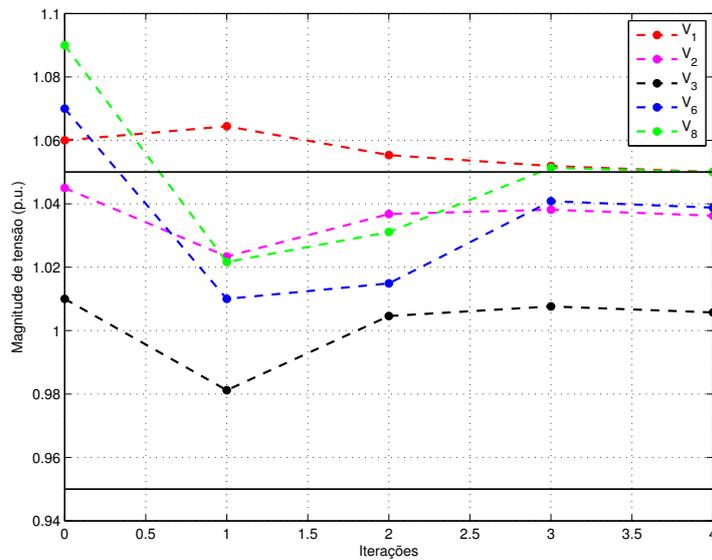


Figura 2. Evolução das magnitudes de tensão das barras de geração.

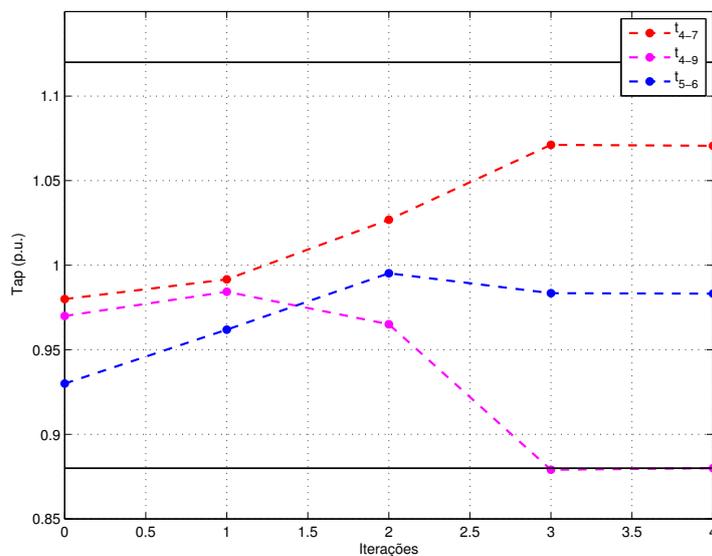


Figura 3. Evolução dos taps dos transformadores em-fase.

Pode-se observar nas Figuras 2 e 3 que as trajetórias de convergência das magnitudes de tensão  $V_1$  e  $V_8$  e do tap  $t_{4-9}$  se dão a partir da região infactível do problema. No caso específico da variável  $V_1$ , esta permanece no exterior da região factível durante todo o processo iterativo.

Diferentemente do método da FLBM, cuja trajetória de convergência depende relaxação da região factível do problema original atrelada ao valor de  $\mu$ , a trajetória de convergência do método da FLBMP não depende de  $\mu$ . Esta característica do método da FLBMP evidencia, portanto, sua robustez e uma certa independência do método com relação ao parâmetro de barreira.

#### 4.2.2. Demais Sistemas

As características dos sistemas de 30, 57, 118 e 300 barras, assim como as do sistema de 14 barras, são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3. Características do Sistemas Elétricos

Sistema Elétrico	Controle de Reativos	Linhas de Transmissão	<i>Taps</i>	Variáveis de Controle	Variáveis Dependentes
14 Barras	5	17	3	8	22
30 Barras	6	37	4	10	53
57 Barras	7	63	17	24	106
118 Barras	54	177	9	63	181
300 Barras	69	304	50	119	530

Os resultados obtidos a partir da resolução do problema de FPOR (1) pelo método da FLBMP são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4. Resultados Obtidos

Sistema Elétrico	Perdas (MW)	Perfil Médio de Tensão (p.u.)	Número de Iterações	Tempo (s)
14 Barras	13,6419	1,0252	4	0,08
30 Barras	17,8838	1,0065	4	0,10
57 Barras	20,0710	1,0220	5	0,35
118 Barras	118,0260	1,0330	5	1,20
300 Barras	399,4080	1,0224	5	11,52

Pela análise dos resultados apresentados, pode-se verificar que o método da FLBMP alcançou soluções ótimas em poucas iterações, mesmo para um sistema de maior porte e de difícil convergência como o de 300 barras. Isso se deve à sua característica de convergência herdada dos métodos de barreira modificada. De acordo com Polyak (1992), se os multiplicadores de Lagrange  $\sigma$  ótimos (ou uma aproximação suficientemente boa destes) forem conhecidos, métodos de barreira modificada convergem independentemente do valor de  $\mu$ .

#### 5. Conclusões

Este trabalho apresentou uma nova abordagem para a resolução do problema de FPOR. Nesta abordagem, denominada método da FLBMP, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade a partir do acréscimo de variáveis de folga não negativas, cuja condição de não negatividade é tratada por uma FBMEQ, e ao problema resultante associa-se uma função Lagrangiana. Para avaliar a eficácia desta abordagem, foram realizados testes numéricos com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. A modelagem dos problemas de FPOR e a implementação do algoritmo do método da FLBMP foram feitas em Matlab. Pelos resultados obtidos, pode-se concluir que esta abordagem de resolução de problemas de PNL se mostra bastante eficaz na resolução do problema de FPOR (1). A resolução de problemas de FPOR pelo método da FLBMP para sistemas elétricos de maior porte será abordada em trabalhos futuros.

## Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro das seguintes agências brasileiras de fomento à pesquisa: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

## Referências

- Breitfeld, M. G. e Shanno, D. F.** (1994). A globally convergent penalty-barrier algorithm for nonlinear programming and its computational performance. *Rutcor Research Report (RRR) 12-94*, pages 1–39.
- Breitfeld, M. G. e Shanno, D. F.** (1996). Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Annals of Operations Research*, 62(1):439–463.
- Carpentier, J. L.** (1962). Contribution à l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, 3(8):431–447.
- Chen, T. W. C. e Vassiliadis, V. S.** (2003). Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/modified barrier method with the use of exact Hessians. *Computers & Chemical Engineering*, 27(4):501–525.
- de Sousa, V. A.** (2006). *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo via método da função Lagrangiana barreira modificada*. Doutorado em engenharia elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- de Sousa, V. A., Baptista, E. C., e da Costa, G. R. M.** (2008). Fluxo de potência ótimo reativo via método da função Lagrangiana barreira modificada. *Revista Controle & Automação*, 19(1):83–92.
- Fiacco, A. V. e McCormick, G. P.** (1968). *Nonlinear programming*. Wiley.
- Frisch, K. R.** (1955). The logarithmic potential method of convex programming. *Memo-randum*.
- Huneault, M. e Galiana, F. D.** (1991). A survey of the optimal power flow literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(2):762–770.
- Matlab** (2009). Version 7.9.0.529 (r2009b). Ambiente de programação de alto nível para o desenvolvimento de algoritmos, análise e visualização de dados, e computação numérica.
- Momoh, J. A., El-Hawary, M. E., e Adapa, R.** (1999a). A review of selected optimal power flow literature to 1993. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):96–104.
- Momoh, J. A., El-Hawary, M. E., e Adapa, R.** (1999b). A review of selected optimal power flow literature to 1993. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):105–111.
- Polyak, R.** (1992). Modified barrier functions (theory and methods). *Mathematical Programming*, 54(1-3):177–222.
- Quintana, V. H., Torres, G. L., e Medina-Palomo, J.** (2000). Interior-point methods and their applications to power systems: a classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):170–176.
- Torres, G. L. e Quintana, V. H.** (1998). An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(4):1211–1218.
- UW Power Systems Test Case Archive** (1999). Disponibiliza sistemas-teste IEEE para validação de metodologias e algoritmos de análise computacional de sistemas de energia elétrica. Disponível em: <<http://www.ee.washington.edu/research/pstca>>. Acesso em: 26 dez. 2011.