

## ANÁLISE QUANTITATIVA DE MAPAS COGNITIVOS PARA ESTRUTURAÇÃO DE PROBLEMA ENVOLVENDO DECISÃO EM GRUPO

**Anielli Araújo Rangel Cunha**

Universidade Federal de Pernambuco  
Cx. Postal 7462, Recife-PE, 50.630-970  
annielli.rangel@yahoo.com.br

**José Leão e Silva Filho**

Universidade Federal de Pernambuco  
Cx. Postal 7462, Recife-PE, 50.630-970  
zeleao@gmail.com

**Danielle Costa Morais**

Universidade Federal de Pernambuco  
Cx. Postal 7462, Recife-PE, 50.630-970  
dcmorais@ufpe.br

### RESUMO

A abordagem *soft* da pesquisa operacional fornece suporte para a análise dos aspectos qualitativos do processo de decisão, através dos Métodos de Estruturação de Problemas. A forma que os indivíduos interpretam um problema e a relação de causalidade entre os eventos podem ser representadas através de Mapas Cognitivos. Este artigo propõe um método para agregar mapas cognitivos individuais em um único mapa que represente a compreensão do grupo sobre o problema e a partir deste apresentar um método para a identificação de caminhos críticos em um mapa cognitivo, onde incidirá os maiores esforços na busca de consenso. Assim, o modelo proposto é dividido em duas fases: primeiramente um método de agregação baseado na medida de distância entre dois mapas e a intensidade das relações associadas a cada evento e por fim um método de identificação de caminhos críticos baseado na variância dos efeitos dos caminhos.

**PALAVRAS CHAVE.** Mapas Cognitivos, Relação de Distância, Caminho Crítico.

**ADM - Apoio à Decisão Multicritério,**

### ABSTRACT

The soft approach of operational research provides a means for the analysis of the qualitative aspects of decision making, through the Problem Structuring Methods. The way in which people interpret a problem and the causality between events can be represented by cognitive maps. This article proposes a model to identify critical paths in a cognitive map, which must focus greater efforts to reach consensus. This requires that the individual cognitive maps are aggregated into a common map that represents the understanding of the group regarding a problem. Thus, the proposed model is divided into two phases: first, a aggregation method based on the magnitudes of the distance between two maps and the intensity of relationships associated with each event, and finally a method of identifying critical paths based on the variance of the paths effects.

**KEYWORDS.** Cognitive maps. Distance Ratio. Crucial Paths.

**ADM - Multicriteria Decision Support**

## 1. Introdução

Uma modelagem adequada de problemas de decisão em grupo exige uma compreensão dos aspectos concernentes ao problema, às preferências e aos objetivos individuais de cada participante do processo decisório, considerando a complexidade que envolve as decisões, onde os atores podem possuir diferentes pontos de vista e interesses conflitantes.

Para isso, a pesquisa operacional possui uma abordagem considerada *soft*, voltada para a estruturação dos problemas de decisão, que objetiva trabalhar com os aspectos qualitativos do processo. Essa abordagem possibilita um melhor entendimento do problema, pois é possível identificar a percepção dos diferentes atores, analisando de forma individual e/ou conjunta a fim de delinear os aspectos cognitivos que levam a reflexão das consequências das futuras escolhas e decisões presentes possibilitando a compreensão do problema, aprendizado e ajustes.

Assim, os Métodos de Estruturação de Problemas (PSM – *Problem Structuring Methods*) foram desenvolvidos para apoiar o processo de decisão em grupo possibilitando que os atores compreendam o problema em foco e se comprometam com uma ação consequente. Os métodos mais comuns são: *Strategic Development and Analysis* (SODA), *Soft Systems Methodology* (SSM), *Strategic Choice Approach* (SCA) e *Value-Focused Thinking* (VFT) (ALMEIDA et al, 2012).

O SODA, dentre esses métodos, é o único que trabalha com mapas cognitivos, buscando a identificação do problema, e permitindo com isso a aprendizagem sobre o mesmo. Neste sentido, os Mapas Cognitivos estabelecem um meio de representar a forma que um indivíduo pensa acerca de um problema através de sua estrutura em forma de rede, onde os nós e arcos são conectados, e a direção do arco representa uma crença de causalidade (EDEN, 2003). Para problemas de decisão em grupo, a estruturação do problema pode se dar através da agregação dos Mapas Cognitivos individuais. No entanto, comumente isso é realizado por um facilitador que utiliza o bom senso para manter as relações hierárquicas na composição de um mapa final (ALMEIDA et al, 2012).

O mapa cognitivo é originalmente um recurso de natureza qualitativa que traz informações úteis a análise do problema. No entanto, alguns esforços têm sido dedicados no desenvolvimento de meios compreensivos de comparar quantitativamente mapas individuais e diminuir ao máximo o nível de conflito na busca de um consenso entre o grupo (Septer et al, 2012; Langfield-Smith & Wirth, 1992; Hart, 1973). Partindo dessa perspectiva, o objetivo desse trabalho é apresentar um método que auxilia a formação de um mapa cognitivo grupal e contribui para a redução das divergências entre os participantes do grupo. Este método alinha a característica qualitativa dos mapas cognitivos a ferramentas quantitativas a fim de obter resultados consistentes e que auxiliem o processo de estruturação.

Para isso, esse trabalho apresentará inicialmente uma revisão bibliográfica focada no desenvolvimento de métodos para medir diferenças entre mapas cognitivos. Em seguida o modelo proposto será descrito e posteriormente utilizado em uma simulação de um problema de expansão de sistema de abastecimento de água.

## 2. Mapeamento Cognitivo

Mapa cognitivo pode ser definido como uma rede a qual os nós representam conceitos e os arcos que ligam os nós representam as consequências que os conceitos causam aos outros (Septer et al, 2012). Sob esta estrutura, os mapas cognitivos causais são analisados de duas perspectivas básicas: o conteúdo e a estrutura de cada mapa. Esta definição inicial relativamente simples é oriunda do estudo dos mapas mentais do ser humano, no fim dos anos 40. Já nos anos 70 houve um grande impulso no desenvolvimento desta área que perdura até os dias atuais.

Hart (1973) e Axelrod (1976) apresentam trabalhos pioneiros sobre os mapas cognitivos e que servem como referência até os dias atuais. O primeiro autor utilizou os mapas para avaliar três políticos do Brasil e Venezuela. Os mapas cognitivos versam sobre os mais diversos temas e possuem entre os nós finais a utilidade para a nação e para as forças armadas. Já o segundo focou em elites políticas em geral para o seu trabalho. Nestes trabalhos são apresentados conceitos fundamentais da área como Balanceamento do caminho dentro do mapa cognitivo além da

avaliação da consistência (definida com um subconjunto dentro de situações especiais), a frequência e a densidade do mapa cognitivo.

O artigo de Montibeller & Belton (2006) apresenta uma revisão onde se discorre sobre diversos conceitos que auxiliam a análise dos mapas cognitivos. É um artigo fundamental nesta área de estudo, por aglutinar várias abordagens e ferramentas diferentes dentro dos conceitos de mapas cognitivos. Alguns dos conceitos destacados pelos autores são: a indeterminação e a indistinção de causa, potência e impacto de um caminho e busca do caminho mais curto, avaliação quantitativa e qualitativa dos pontos fortes. Já em Montibeller et al (2005) é apresentado o *Reasoning Map*, um sistema que avalia via multicritério utilizando uma estrutura causal, como a dos mapas cognitivos.

As avaliações de desempenho também possuem uma importância grande entre os mapas cognitivos (Eden e Ackermann, 1998). Estes é o foco dos artigos de Suwiginjo et al (2000) que apresentam os QMPMS (*Quantitative Models for Performance Measurement Systems*). Nestes modelos, os mapas cognitivos são unidos e representados em diagrama de árvore e utilizada a Análise Hierárquica do Processo (AHP) para apresentar o desempenho do mapa. Eden e Ackermann (1998) também apresentam uma forma de calcular o desempenho, utilizando a estrutura visual do mapa cognitivo e destacando alguns nós, tomando por base critérios estabelecido pelos autores. Esta abordagem também é citada em Montibeller (2006), mas os autores citam várias críticas e limitações que deixam esta medida de desempenho com um espaço de utilização bastante resumido.

Dentre os artigos mais recentes, alguns podem ser destacados. Aguillar (2012) estuda a adaptação dos mapas cognitivos considerando a ideia que a relação causa-efeito pode sofrer mudanças durante a execução do processo de estruturação do problema. Esta condição é natural. O mapa cognitivo é um retrato dos conceitos no momento da sua construção, o que não impede de que haja mudanças de interpretação dos nós e dos arcos com o passar do tempo. Já Kang et al (2012) apresenta uma estrutura que apresenta gráficos e avalia a incerteza de causa ao realizar a comparação das combinações dos mapas cognitivos com a teoria da evidência de Dempster-Shafer (generalização da teoria da probabilidade bayesiana) trazendo bons resultados nas avaliações de incerteza. Nem sempre as conexões dos nós dos mapas cognitivos podem ser definidas diretamente por estarem vinculados a um evento probabilístico. Portanto, é importante que haja estudos e alternativas que considerem a incerteza dentro da escolha dos mapas cognitivos.

### 3. Modelo Proposto para a Análise de Mapas Cognitivos

O modelo apresentado será dividido em duas fases que focam o objetivo proposto. A primeira fase visa o estabelecimento de um mapa cognitivo final, obtido pela agregação dos mapas individuais e que considera a força das crenças de causalidade entre os nós. Depois de definido um mapa comum, a segunda fase apresenta uma medida de identificação dos caminhos críticos que merecem mais atenção na busca por acordos.

#### 3.1. Agregação dos Mapas Individuais

Um mapa cognitivo pode ser representado por um conjunto de nós e arcos. Esses elementos representam as ideias ou conceitos relativos ao problema e podem ser identificados por números. Os arcos entre os nós representam a relação de causalidade entre os conceitos. A causalidade percebida pode ainda indicar um relacionamento positivo ou negativo entre os elementos do mapa. A força da crença da relação de causalidade entre os conceitos é representada por números, que podem ser colocados acima dos arcos. Dessa forma, uma forte percepção positiva de relacionamento ou uma forte percepção negativa são representadas por +3 e -3; uma moderada percepção positiva de relacionamento ou moderada percepção negativa, indicadas por +2 e -2; fracos relacionamentos por +1 e -1; e zero indica a inexistência de relacionamento entre dois elementos.

Esses mapas são obtidos através de um processo de elicitação estruturado onde é permitido aos participantes verificar ou modificar a construção do mapa e ajustá-lo a suas crenças.

Para apresentar as medidas de força e causalidade entre os elementos de um mapa cognitivo é utilizada uma matriz  $N \times N$  onde,  $N$  é o número de nós considerado por um dado ator, e as células da matriz preenchidas pelo grau de crença de relacionamento entre dois elementos. É importante destacar que cada ator pode possuir um mapa cognitivo com diferentes quantidades de nós.

### 3.1.1 Medindo as diferenças entre dois mapas

Após a definição dos mapas individuais e suas respectivas matrizes, um *score* pode ser obtido para avaliar a distância entre um par de mapas cognitivos. Essa medida fornece um indicador global de diferença em um conjunto de nós e o relacionamento causal entre os dois mapas. Quanto maior a distância medida, maior a diferença entre dois mapas (LANGFIELD-SMITH & WIRTH, 1992).

Ao comparar dois mapas cognitivos as divergências de opinião podem ser classificadas, segundo a sua natureza, da seguinte forma:

- Existência de elementos ( $r_0$ ): um indivíduo considera um conceito como importante, representado por um nó, que outro indivíduo não considera e, portanto não o adiciona ao mapa.
- Existência de relação ( $r_1$ ): os mapas podem divergir sobre a existência ou não de uma relação de causa entre dois nós.
- Sentido ( $r_2$ ): a avaliação de uma relação entre dois nós podem divergir conforme o efeito entre eles. Por exemplo, um mapa cognitivo pode avaliar determinada relação como efeito positivo enquanto o outro pode avaliar como efeito negativo.
- Intensidade ( $r_3$ ): no caso da intensidade, os nós podem concordar conforme o sentido, mas podem divergir conforme a intensidade desta relação. Por exemplo, uma avaliação pode ser definida como “forte” enquanto outra avaliação pode ser tida como “fraca”.

Quando ocorre diferença do tipo  $r_0$ , o cálculo da distância entre duas matrizes deve considerar o tamanho das matrizes analisadas, já que a magnitude do *score* de distância é parcialmente função da quantidade de elementos assumidos. Dessa forma, a distância entre um par de matrizes não pode ser diretamente comparada com outro par de matrizes com tamanhos diferentes.

Por essa razão, a Relação de Distância (RD) entre dois mapas é obtida pela razão entre a matriz de distância (MD) e a distância máxima ( $D_{max}$ ), que tem a função de relativizar as distâncias quando o número de elementos é diferente.

Logo a relação de distância entre duas matrizes é dada como

$$RD = \frac{MD}{D_{Max}} \quad 3.1$$

A Matriz de distância (MD) é usada para medir a distância entre um par de mapas cognitivos. Assim, sejam duas matrizes quadradas  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ , onde  $1 \leq i, j \leq p$ , onde  $p$  é o número de elementos resultante da união dos elementos dos dois mapas, a matriz de distância pode ser definida, de acordo com Langfield-Smith & Wirth (1992), como :

$$DM = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{ij} - b_{ij}| \quad 3.2$$

Essa formulação pode ser decomposta, de forma que a distância entre duas matrizes será igual a:

- a) Diferença na intensidade da relação ( $r_3$ ); mais
- b) Diferença devido à existência ou não existência de relações envolvendo elementos comuns ( $P_c$ ) aos dois mapas ( $r_1$ ); mais
- c) Diferença devido à crença de relação em elementos não comuns aos dois mapas, isso é, que apenas um dos atores considera importante ( $r_0$ ).

Segundo Langfield-Smith & Wirth (1992) a equação 3.2 pode ser reescrita, considerando a decomposição das distâncias como:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{ij} - b_{ij}| = \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ i,j \in Pc \\ a_{ij}, b_{ij} \neq 0}}^p |a_{ij} - b_{ij}| \quad \text{a)} + \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ i,j \in Pc \\ a_{ij}, b_{ij} = 0}}^p |a_{ij} - b_{ij}| \quad \text{b)} + \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ i \text{ ou } j \notin Pc}}^p |a_{ij} - b_{ij}| \quad \text{c)}$$

No entanto, essa formulação recebe críticas, pois os valores dos componentes b) e c) podem ser exagerados pela força das relações dos elementos considerados importantes para apenas um ator. Para lidar com esse inconveniente, o seguinte ajuste pode ser adicionado:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij} > 0 \text{ e } i \text{ ou } j \notin Pc \\ -1 & \text{se } a_{ij} < 0 \text{ e } i \text{ ou } j \notin Pc \\ a_{ij} & \text{noutros casos} \end{cases}$$

$b_{ij}$  segue um padrão similar. Assim, os elementos não comuns a ambos os mapas, cuja escala variava entre [-3, +3] passa a variar ente [-1, +1].

A outra medida necessária para o cálculo da relação de distância entre um par de mapas cognitivos é a distância máxima, dada por:

$$D_{Max} = 6pc^2 + 2pc(pu_1 + pu_2) + pu_1^2 + pu_2^2 - (6pc + pu_1 + pu_2) \quad 3.4$$

Onde:  $pc$  = número de elementos comuns as duas matrizes;

$pu_1$  = número de elementos únicos na matriz A

$pu_2$  = número de elementos únicos na matriz B

Essa medida fornece uma formulação adequada, pois a força de relacionamento é considerada apenas para os elementos que são comuns a ambos os mapas. Dessa forma, o máximo conteúdo na célula da matriz de distância será +6 e o máximo valor nas células dos elementos únicos para um ou ambos os mapas cognitivos será +1.

Sendo assim, Langfield-Smith & Wirth (1992) apontam a relação de distância entre dois mapas cognitivos como:

$$RD = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{ij} - b_{ij}|}{6pc^2 + 2pc(pu_1 + pu_2) + pu_1^2 + pu_2^2 - (6pc + pu_1 + pu_2)} \quad 3.5$$

A relação de distância fornece um meio quantitativo para avaliar as diferenças de crenças no relacionamento entre elementos de diferentes mapas cognitivos. Essa medida pode ser utilizada para captar similaridades e divergências entre os julgamentos dos atores do processo de decisão e, com isso, possibilitar um processo de discussão entre os participantes, voltado à eliminação de divergências, promovendo o entendimento sobre as mudanças necessárias para se chegar a um mapa comum que agregue as opiniões e crenças de todos os participantes.

Além do cálculo das relações de distância, outra informação que pode servir de aporte para esse processo de revisão é a classificação dos nós.

Três classificações separam os tipos de nós identificados no levantamento dos mapas cognitivos individuais:

- Nós de consenso global: são aqueles elementos considerados por todos os atores;
- Nós de consenso relativo: são elementos considerados importantes por uma parte dos atores;
- Nós de importância restrita: são elementos considerados em apenas um mapa cognitivo.

Os nós de importância restrita merecem atenção especial. Isso porque causas antagônicas podem justificar a presença desses nós nos mapas cognitivos. Por um lado pode ser resultado de conhecimento, experiência ou informações que os demais atores não possuem. Por outro lado, pode ser devido a uma reflexão imatura sobre a real importância do elemento.

### 3.1.2 Identificando um Mapa Cognitivo Comum

As decisões relativas à obtenção de um mapa cognitivo comum estão relacionadas às definições dos elementos (nós) e das relações (arcos) que representam a forma que o grupo de decisão entende o problema e as causas e consequências entre os elementos.

A definição dos nós inicia-se com a identificação dos nós de consenso e consenso relativo que podem ser imediatamente incorporados ao mapa cognitivo comum. Os nós de importância restrita ficam sujeitos à análise.

Algumas das medidas que podem auxiliar na determinação dos nós que devem compor o mapa comum e os nós que não são relevantes para o processo de decisão do grupo são descritas a seguir:

- a) *Força das relações: baseado no grau de crença das conexões que chegam e saem do nó.*

A força de relação de um nó, para um mapa cognitivo individual, pode ser calculada como:

$$f_{i\alpha} = \frac{\sum |a_{ie}| + \sum |a_{ki}|}{e + k} \quad 3.6$$

Assim, o primeiro termo da equação representa a força das relações que saem do nó  $i$  e que vão até o nó  $e$  e o segundo termo na equação refere-se aos arcos que saem do nó  $k$  e chegam ao nó  $i$ ,  $\alpha$  é o mapa cognitivo analisado, em que  $1 \leq \alpha \leq n$ , onde  $n$  é o número total de mapas cognitivos.

A força de relação de um nó para todo o grupo é dado como a média das forças para cada mapa individual:

$$F_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{f_{i\alpha}}{n} \quad 3.7$$

Assim, um critério sugerido para apoiar a decisão sobre a inclusão ou não dos nós é:

$F_i < 1$ , o nó  $i$  deve ser excluído

$F_i > 2$ , o nó  $i$  deve ser incluído

$1 \leq F_i \leq 2$ , o nó  $i$  deve ser levado a discussão

Logo, de uma forma global, se um nó não possui relação com outros nós de forma a obter ao menos uma força de relação fraca na visão de todo o grupo, esse nó pode ser excluído. Por outro lado, se no cômputo da força de relação de um nó com os demais, a média for maior que 2, há razões para crer que esse nó gera relações de força no mínimo moderada com outros nós.

- b) *Maioria dos atores: quantidade mínima de indivíduos ( $\frac{N}{2} + 1$ ) que consideram o elemento relevante.*

Outra maneira de decidir se um nó pode deixar de ser incluído no mapa cognitivo comum é através da maioria simples. Considerando que todos os atores possuem o mesmo peso, é identificada a quantidade de indivíduos que considera importante.

No entanto, essa regra desconsidera o grau de importância que se atribui a uma relação. Dessa forma, podem-se excluir elementos que são importantes para a minoria dos atores, mas que, no entanto essa importância era estrita.

Assim, de posse das informações sobre a RD, a Classificação dos Nós e a força de cada nó, os atores são incentivados a revisarem seus mapas. Esse processo vai permitir que os próprios participantes incluam elementos cuja importância não havia sido refletida anteriormente e eliminem elementos que considerem de pouca relevância na sua estrutura de compreensão do problema, objetivando uma composição mais alinhada com o grupo.

Após a identificação dos nós que devem compor o mapa final, o próximo passo é a definição dos arcos e o sentido da relação entre eles. Os arcos que são únicos para os atores e que indicam uma relação fraca podem ser excluídos. Já os arcos comuns devem ser mantidos. Em caso de divergência de orientação, a relação de causalidade deve ser discutida com os participantes, onde se deve buscar uma convergência sobre o que é causa e o que é consequência.

Assim, definidos os nós e os arcos, um esboço do mapa cognitivo comum deve ser apresentado aos participantes e levado à discussão até a sua aprovação. É importante que o mapa final seja definido de maneira acíclica para que a análise continue sendo realizada.

Finalmente, os participantes devem revisar a força atribuída à relação entre dois elementos para o novo mapa cognitivo que representa a forma que o grupo estrutura o problema. Além disso, os participantes também devem definir para os nós receptores uma medida de importância numérica que represente os pesos de cada um destes nós.

Deve-se salientar que os recursos quantitativos de agregação dos mapas, servem para auxiliar o processo. No entanto esses mecanismos não devem valorizar uma rigidez que se sobreponha as opiniões e percepções dos participantes.

### 3.2. Caminho crítico

Esta etapa foca no caminho crucial. Um caminho crucial é definido como uma conexão ou um pequeno grupo de conexões cujo alinhamento de opiniões contribui largamente para o consenso (Septer et al, 2012). A fim de entender o cálculo do caminho crucial, alguns conceitos serão apresentados. Sendo dois nós  $v_1$  e  $v_2$ ,  $P$  um caminho que parte de  $v_1$  e termina em  $v_2$ , e  $l$  a quantidade de conexões neste caminho, tem-se:

Efeito Parcial [ $EP(P_{ij}^q)$ ]: representa a intensidade do caminho  $q$  dentre os possíveis caminhos que ligam  $v_i$  a  $v_j$ . Matematicamente, o EP foi definido, adaptado de Septer et al (2012), como:

$$EP(P_{ij}^{[q]}) = \frac{1}{3^{l-1}} \prod a_{ij} \quad 3.8$$

O Efeito Total (ET) é um fator importante para a avaliação do caminho crucial. Ele pode ser definido como a média ponderada dos efeitos parciais que o compõe. Porém, para poder ser feita uma comparação dentre os efeitos totais, é necessário acrescentar na soma ponderada todos os possíveis caminhos, inclusive os de importância nula, para um determinado mapa. Desta forma, fazendo uma adaptação de Septer et al (2012), a equação do efeito total pode ser apresentada como:

$$ET(P_{ij}) = \frac{\left[ \sum_{l=2}^{n-1} \frac{W^l}{3^{l-1}} \right]_{ij}}{R_{ij}} \quad 3.9$$

Onde  $W$  é o conjunto de  $a_{ij}$  entre os nós  $v_i$  e  $v_j$  e  $R_{ij}$  é o número total de caminhos indiretos possíveis entre os nós  $v_i$  e  $v_j$ .

Com estas informações, é possível calcular os efeitos de cada um dos caminhos dentro do mapa cognitivo, mas o caminho crucial ainda não fica evidente. Para encontrá-lo, ainda é necessário apresentar o conceito do Resultado Total (RT).

$$RT(v) = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} s_{g_i} \cdot ET(P_{v,g_i})}{\sum_{i=1}^{n_g} s_{g_i}} \quad 3.10$$

Nesta fórmula, baseada em Septer et al (2012),  $s_{g_i}$  representa a importância do objetivo  $g_i$  para um mapa cognitivo, gerado pela ocorrência de um evento emissor  $v$ .  $RT(v)$  representa a importância média de cada caminho que parte do nó emissor  $v$  e vai até o objetivo  $g_i$  que é um nó receptor. Esta medida representa quão satisfeito está o criador do mapa no caso de todas as consequências possíveis para se chegar ao objetivo aconteçam simultaneamente.

Com a definição do RT, é possível definir uma formulação para o caminho crucial. O objetivo é encontrar os nexos causais dentre as estimativas dos mapas cognitivos que mais contribuem para a diversidade de opiniões.

A medida de divergência assumida é a variância do resultado total:

$$\sigma^2(RT) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \left( RT^\alpha - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n RT^{[k]} \right)^2 \quad 3.11$$

Onde  $RT^\alpha$  define o resultado total do indivíduo  $\alpha$ . Com a suposição de que os valores de  $a_{ij}$  coletivos entre  $v_i$  e  $v_j$  deva tender à média ponderada,  $w_{ij}^{[\alpha]}$  é definida como  $\bar{w}_{ij}$ . Para

calcular o link crucial deve-se calcular a variância de todos os RT utilizando o  $\bar{w}$  como referência.

$$\sigma^2(RT|a_{ij}^{[\alpha]} = \bar{a}_{ij}) \quad 3.12$$

Quanto menor a variância, mais importante o caminho é. É importante ressaltar que há uma diferença de interpretação fundamental entre a variância do resultado total e o resultado do cálculo do caminho crítico. Ainda pode ser calculado mais de um caminho simultaneamente.

As duas formulações apresentadas aqui são distintas ao se calcular os valores entre  $v_i$  e  $v_j$  específicos. Septer et al (2012) definem a equação (3.11) como uma medida de divergência nas atitudes. Esta equação apresenta a diferença de intensidade de opinião entre as conexões. É um cálculo considerado antes de a proposta de acordo ser definida.

Por outro lado, a equação (3.12) define o conceito de caminho crítico. Esta equação realiza a substituição de um dos caminhos pelos valores de consenso (definida pela média ponderada das intensidades dos caminhos) e recalcula os RTs. Se após esta troca, a variância apresentar o valor muito baixo, o caminho pode ser considerado crítico.

### 3.2.1. Análise do caminho crítico

Após a apresentação dos conceitos sobre caminho crítico, é importante discutir como deve ser a sua utilização a fim de alinhar o discurso para a obtenção de um consenso:

- Cálculo dos links cruciais e das variâncias: Todos os nós emissores e seus caminhos diretos e indiretos para os receptores devem ter a sua variância calculada. O resultado será uma tabela com todos os valores dos links cruciais e o analista deve usa-lo como referência.
- Calcular os ET dos caminhos mais relevantes: Os efeitos totais dos caminhos de cada mapa cognitivo devem ser calculados a fim de se evidenciar as diferenças de opinião. A interpretação do ET deve ser cuidadosa e alguns erros devem ser evitados.
- Ajustes finais nos mapas cognitivos: Com as diferenças classificadas e bem definidas, os mapas individuais podem ser ajustados. Os cálculos são refeitos e espera-se que o consenso tenha sido alcançado. Caso contrário, esta etapa deve ser refeita.

## 4. Simulação do Modelo Proposto

Para ilustrar a aplicação do método proposto, será apresentada uma simulação do processo de estruturação de problemas para a avaliação de uma situação de expansão do sistema de abastecimento de água em uma região. Foram propostos três mapas cognitivos de referência, que representavam a perspectiva do governo, da sociedade civil e do setor produtivo da economia. Os mapas obtidos foram sintetizados nas Tabelas 1, 2 e 3, onde as células preenchidas com zero indicam nenhuma relação de causalidade entre elementos e os valores entre -3 e 3 indicam a existência de relação e a intensidade desta relação. A primeira linha e primeira coluna de cada matriz representam os elementos que são discriminados na Tabela 4:

**Tabela 1 - Matriz do Governo**

	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	2	3	0	0	0	0	3	2	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0
4	0	0	-2	0	-1	0	2	0	2	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
8	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	3	3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	2
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Tabela 2 - Matriz dos Produtores**

	1	2	3	6	10	13	14	17	19
1	0	0	3	-2	3	0	0	2	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	3	0
6	0	0	0	0	0	-3	-2	0	0
10	0	0	0	0	0	2	2	2	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	-2	-2	0	0
19	0	0	0	0	0	3	1	0	0

**Tabela 3 - Matriz da Sociedade**

	1	2	3	6	9	10	11	13	14	16	17	18
1	0	0	2	1	0	3	1	0	0	1	3	-3
2	0	0	0	2	0	1	2	0	0	-1	-1	0
3	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
17	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0

**Tabela 4 - Legenda dos elementos das matrizes**

<b>1</b>	Uso de manancial
<b>2</b>	Sistema Integrado
<b>3</b>	Desapropriação
<b>4</b>	Investimentos requeridos
<b>6</b>	Cobrança de uso
<b>7</b>	Sistema autossustentável
<b>8</b>	Geração de empregos
<b>9</b>	Apoio e satisfação social
<b>10</b>	Água em quantidade necessária
<b>11</b>	Água na qualidade necessária
<b>12</b>	Saúde e bem Estar
<b>13</b>	Desenvolvimento econômico
<b>14</b>	Desenvolvimento social
<b>16</b>	Sustentabilidade do sistema
<b>17</b>	Degradação ambiental
<b>18</b>	Conservação de áreas de interesse público
<b>19</b>	Confiabilidade do sistema

O Cálculo das relações de distância entre os mapas cognitivos dos participantes são apresentados na Tabela 5, da maior para a menor diferença:

**Tabela 5 - Relação de Distância**

Sociedade e produtores	$RD = \frac{8 + 12 + 16}{6 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8(4 + 1) + 4^2 + 1^2 - (6 \cdot 8 + 4 + 1)}$	RD = 0,0841
Governo e produtores	$RD = \frac{2 + 2 + 27}{6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7(6 + 2) + 6^2 + 2^2 - (6 \cdot 7 + 6 + 2)}$	RD = 0,07828
Sociedade e Governo	$RD = \frac{3 + 2 + 22}{6 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9(4 + 3) + 4^2 + 3^2 - (6 \cdot 9 + 4 + 3)}$	RD = 0,04687

Outra informação útil para a definição do mapa comum é a identificação e classificação dos nós. Dessa forma, foram obtidos os seguintes dados:

- Nós de consenso: 1, 2, 3, 6, 10, 13 e 14;
- Nós de importância relativa: 9, 11 e 17;
- Nós de importância estrita: 4, 7, 8, 12, 16, 18 e 19.

Os nós de importância relativa e de consenso são incluídos ao mapa cognitivo comum. Cabe a decisão sobre os nós de importância restrita que permanecerão ou serão excluídos. Para isso, é utilizada a equação 3.6 que fornece os seguintes resultados:

$$f_4 = \frac{7 + 4}{6} = 1,83 \quad f_{16} = \frac{2 + 2}{3} = 1,33$$

$$f_7 = \frac{2 + 3}{2} = 2,50 \quad f_{18} = \frac{3 + 3}{2} = 3,00$$

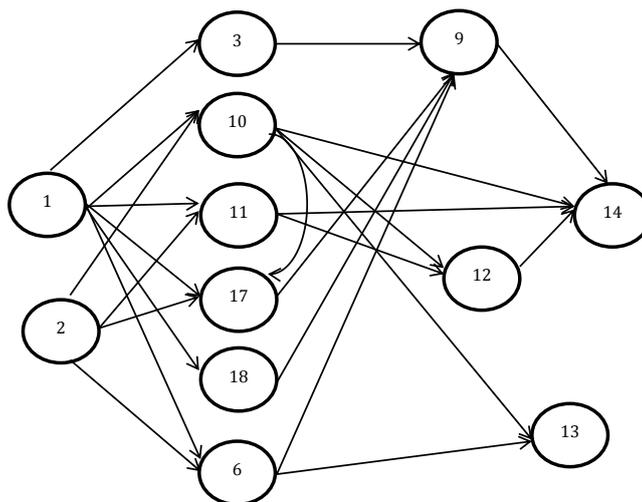
$$f_8 = \frac{9 + 2}{4} = 2,75 \quad f_{19} = \frac{4 + 2}{4} = 1,50$$

$$f_{12} = \frac{3 + 6}{3} = 3,00$$

Pelo critério apresentado na seção 3.1.2, os nós 7, 8, 12 e 18 podem ser incluídos no mapa comum e os nós 4, 16 e 19 devem ser analisados.

De posse dessas informações, os participantes são incentivados a revisar os seus mapas e definir que nós podem ser retirados sem prejuízo, para que os mapas cognitivos possam convergir a um mapa comum que represente a estrutura de pensamento do grupo.

Após a tentativa individual de alinhamento dos mapas, as relações de distância e a força dos nós foram calculadas novamente e serviram para auxiliar o processo de discussão em grupo. Esse debate resultou na exclusão dos nós 7 e 8 e na definição dos arcos que relacionam os nós. Dessa forma, obteve-se o mapa cognitivo comum representado na Figura 1:



**Figura 1 - Mapa cognitivo Comum**

Em seguida, os participantes atribuíram peso aos objetivos, identificados pelos nós receptores 13 e 14 que representam o desenvolvimento econômico e social, respectivamente, conforme apresentado na Tabela 6.

**Tabela 6 - Peso dos objetivos**

Ator	Peso	
	13	14
Sociedade	1	3
Governo	3	3
Produtores	3	1

Além disso, a intensidade da relação entre dois nós foi reexaminada e expressa por todos os participantes para o mapa comum, conforme apresentado na Tabela 7.

**Tabela 7 - Matrizes individuais para o Mapa Cognitivo Comum**

Sociedade																		Governo																		Produtores																	
	1	2	3	6	9	10	11	12	13	14	17	18		1	2	3	6	9	10	11	12	13	14	17	18		1	2	3	6	9	10	11	12	13	14	17	18															
1	0	0	2	-1	0	3	1	0	0	0	0	3	-3	1	0	0	2	0	0	3	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	-2	0	3	0	0	0	0	3	0													
2	0	0	0	2	0	1	2	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	-3	0	2	0	0	0	0	1	0														
3	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0														
6	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	-2	0	0														
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0														
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0														
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0															
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0															
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0															
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0															
17	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	0	0															
18	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0															

Através da Figura 1 são identificados nove caminhos ligando os nós 1 ao 14 e sete caminhos ligando os nós 2 ao 14. Para o nó 13, são identificados dois caminhos saindo do nó 1 e dois caminhos saindo do nó 2. Sendo um total de 20 possíveis caminhos, designados na Tabela 8.

**Tabela 8 – Definição dos caminhos**

Caminhos					
A	1-3-9-14	H	1-18-9-14	O	2-17-9-14
B	1-10-14-	I	1-6-9-14	P	2-6-9-14
C	1-10-12-14	J	2-10-14-	Q	1-10-13-
D	1-10-17-9-14	K	2-10-12-14	R	1-6-13-
E	1-11-12-14	L	2-10-17-9-14	S	2-10-13-
F	1-11-14-	M	2-11-12-14	T	2-6-13-
G	1-17-9-14	N	2-11-14-		

Com isso, os caminhos críticos são calculados de forma a identificar, para cada um dos participantes, quais são os nexos causais responsáveis pela diversidade de opiniões, e com isso, melhorar o processo de debate e possibilitar o alinhamento de pensamentos para o consenso necessário.

Assim, o primeiro cômputo necessário é o Efeito Parcial para cada caminho, conforme a equação 3.8, seguido do cálculo dos efeitos totais partindo dos nós emissores 1 e 2 para os objetivos identificados pelos nós 13 e 14, aplicando a equação 3.9 e depois o Resultado Total para os efeitos dos eventos 1 e 2, de acordo com a equação 3.10.

O próximo passo é encontrar o caminho crítico, ou seja, o caminho onde a obtenção do consenso reduz a discordância global do problema. O primeiro passo nesta investigação foi calcular as variâncias dos caminhos a partir dos nós fundamentais 1 e 2. Os resultados obtidos foram  $\sigma_{(1)} = 0,0654$  e  $\sigma_{(2)} = 0,4994$ .

A informação obtida com o cálculo da variância demonstra que os caminhos que partem do nó 2 apresentam uma divergência de opiniões bastante alta e pode ser um bom ponto para investigar qual caminho e que acordo deve ser procurado. Os caminhos não nulos que partem de 2 são os J, L, N, O, P, S e T. Foi feito o cálculo do caminho crítico com estes caminhos e os resultados são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 - Variância dos caminhos

Caminho	J	L	N	O	P	S	T
$\sigma_{(1)}$	0,06159	0,06412	0,0488	0,06695	0,04772	0,01363	0,13485
$\sigma_{(2)}$	0,2299	0,2434	0,57342	0,43939	0,06224	0,39156	0,04548

Observa-se que o acordo em torno do caminho P foi capaz de baixar a variância dos dois caminhos indicando assim que este é o caminho crítico. Após a sua discussão o mapa cognitivo grupal foi aceito pelos participantes.

## 5. Conclusão

Os mapas cognitivos possuem uma boa estrutura que auxilia na exposição na construção das ideias. Vários artigos surgiram propondo melhorias aos mapas, mas boa parte dos esforços vem de maneira isolada, sem apresentar uma continuidade de propósito.

Este artigo procura interligar alguns conceitos desta área a fim de apresentar uma solução robusta e que ajudasse os grupos a criar um mapa cognitivo único que represente todas as partes e com um baixo índice de divergência. Também são apresentados neste artigo alguns conceitos e ideias novas para dar suporte à estrutura proposta, como o critério eliminação de nós para a agregação de mapas cognitivos baseado na identificação da força do nó para o grupo.

Os resultados foram testados em uma simulação numérica, com um problema proposto. Os resultados obtidos foram satisfatórios. A reunião dos mapas cognitivos deu-se de forma eficiente e a intervenção diretamente no caminho crítico ocasionou a redução das divergências entre os participantes com relação à causalidade dos eventos representados no mapa.

Para trabalhos futuros, são sugeridas mais aplicações deste método, além de estudos dos conceitos apresentados em outras metodologias que utilizam os mapas cognitivos, como o SODA.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro concedido.

## Referências

- Aguillar, J.** Different dynamic causal relationship approaches for cognitive maps *Applied Soft Computing* v13 pp271–282 2013
- Almeida, A. T., Morais, A. C., Costa, A. P. C. S., Alencar, L. H., e Daher, S. F. D.,** *Decisão em grupo e Negociação: Métodos e Aplicações*, Editora Atlas, São Paulo, 2012.
- Axelrod R.,** *Structure of Decision: The Cognitive Maps of Political Elites*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1976
- Eden, C.,** Analyzing cognitive maps to help structure issues or problems. *European Journal of Operational Research*, 159, 673–686. 2004
- Eden, C., Ackermann, F.,** Making Strategy - *The Journey of Strategic Management*. 1998
- Hart J. A.:** Cognitive Maps of Three Latin American Policy Makers. *World Politics*, 30, pp 115-140 1977
- Kang B., Deng, Y., Sadic, R., Mahadevan, S.** Evidential cognitive maps. *Knowledge-Based Systems* 35 (2012) 77–86
- Langfield-Smith, K., Wirth A.,** Measure differences between cognitive maps. *The Journal of the Operational Research Society*. Vol. 43, No. 12, pp. 1135-1150 1992
- Montibeller, G., Belton, V., Ackermann, F. and Ensslin, L.** Reasoning maps for decision aid: an integrated approach for problem-structuring and multi-criteria. *Journal of the Operational Research Society*, 59 (5). pp. 575-589 2008
- Suwignjo, P., Bititci U. S., Carrie, A.S.,** Quantitative models for performance measurement system. *Int J Product Econ* 64: 231–241. 2000
- Tjosvold D.,** The conflict-positive organization: it depends upon us. *Journal of Organizational Behavior* 29: 19–28 2008