

## Estratégia de localização de *hubs* no transporte aéreo brasileiro

Guina Sotomayor Alzamora

Fernanda M.P. Raupp

Nelio Domingues Pizzolato

e-mail: {guinas@gmail.com, fraupp@puc-rio.br, ndp@puc-rio.br}

Departamento de Engenharia Industrial

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

### RESUMO.

O problema de localização de *hubs* visa encontrar pontos de concentração de fluxo numa determinada rede, de modo que a soma das distâncias das ligações compartilhadas entre os pontos da rede seja minimizada. Neste trabalho, o problema de localização de *hubs* no sistema de transporte aéreo brasileiro é abordado através de um método heurístico de duas fases, em vista de reduzir o tempo de resposta. Na primeira fase da heurística proposta, são identificados *hubs* regionais via resolução do modelo da *p*-mediana. Utilizando os resultados da primeira fase na segunda fase, procede-se à identificação de *hubs* centrais resolvendo um modelo *q*-hub-mediana numa rede de aeroportos menor, porém de mesmo fluxo de passageiros. Experimentos computacionais com o problema de localização de *hubs* tendo como instância o sistema de transporte aéreo brasileiro com 150 aeroportos são realizados, variando o número de *hubs* regionais (*p* medianas) de 10 a 40 na primeira fase, e o número de *hubs* centrais (*q* medianas) de 2 a 6, na segunda fase. Ainda, o diagrama de Voronoi juntamente com outros recursos gráficos são usados na visualização dos resultados obtidos.

**Palavras-chaves:** problema de localização de *hubs*, modelo *p*-mediana

**Área principal:** L&T - Logística e Transportes

### ABSTRACT.

The hub location problem aims to find points of concentration of a given flow network so that the sum of the distances of the connections shared between grid points is minimized. In this paper, the problem of locating hubs in the Brazilian air transportation system is approached through a two-phase heuristic method, in order to reduce the response time. In the first phase of the proposed heuristic, the regional hubs are identified through the resolution of the *p*-median model. Using the results of the first phase in the second phase, the identification of central hubs by solving a *q*-hub-median model is proceeded in a smaller airport grid but of the same passenger flow. Computational experiments with the hub location problem having the Brazilian air transportation system with 150 airports as instance are performed, varying the number of regional hubs (*p* medians) from 10 to 40 in the first stage, and the number of central hubs (*q* medians) from 2 to 6 in the second stage. Further, the Voronoi diagram together with other graphical features are used in the visualization of the results.

**Keywords:** hub location problem, *p*-median

**Main area:** L & T - Logistics and Transport

## 1 Introdução

O fluxo do transporte aéreo brasileiro vem crescendo nos últimos anos. No Brasil, mais de 193 milhões de movimentos aeroportuários foram realizados no 2012 (INFRA-ERO, 2012), 7% a mais do que no ano anterior, exigindo uma racionalização no sistema de transporte aéreo. Neste contexto, há desafios a serem enfrentados para servir à crescente demanda, uma vez que a infraestrutura aeroportuária que prevalece no Brasil é deficitária, sendo de senso comum que aeroportos mais movimentados enfrentam problemas de congestionamento e a maior parte deles não possui espaço físico disponível para expansão. Desta forma, a estratégia de inserção de *hubs* poderia melhorar a eficiência do sistema de transporte aéreo brasileiro.

Segundo Alumur e Kara (2008), *hubs* são instalações especiais, as quais servem como pontos de transbordo, troca e triagem de sistemas de distribuição, atuando como pontos de concentração, de importância ou de interesse numa determinada rede de fluxos. Assim, Contreras e Fernandez (2011) consideram que problemas de localização de *hubs* podem ser entendidos como problemas de projeto ou desenho de redes de fluxo, que são modelados, em geral, por uma variante do modelo clássico da  $p$ -mediana. Ademais, é sabido que encontrar soluções ótimas para problemas de localização de *hubs* em redes com mais de 30 pontos ou nós é uma tarefa difícil (Figueiredo et al., 2012). Esta dificuldade é evidenciada em algoritmos que sofrem não só pela sua limitada e não expansível quantidade de memória, mas também pela maior latência de acesso.

Uma visão geral da pesquisa sendo desenvolvida sobre problemas de localização de *hubs* pode ser encontrada em Drezner (1995), Drezner e Hamacher (2004) e Campbell e O'Kelly (2012). Neste último, se faz um *overview* dos 25 anos de pesquisa de localização de *hubs* e fornece reflexões sobre suas origens, comentários sobre o presente, e sugere direções promissoras para os próximos 25 anos. Outros trabalhos de revisão da literatura são Klincewicz (1998), Alumur e Kara (2008), Hekmatfar e Pishvaei (2009) e Campbell et al. (2009), onde pode-se verificar que muitos modelos sofisticados têm sido propostos.

Neste trabalho, um novo projeto para o sistema de transporte aéreo brasileiro é apresentando via introdução de *hubs*. O problema de localização de *hubs* no sistema de transporte aéreo brasileiro é abordado através de um método heurístico de duas fases, em vista de reduzir o tempo de resposta. Na primeira fase da heurística proposta, são identificados os pontos de concentração de fluxo de pequenos aeroportos em regiões com baixo número de passageiros através da resolução do modelo da  $p$ -mediana, e, na segunda fase, utilizando os resultados da primeira fase, procede-se à identificação de *hubs* centrais com uso de um modelo de  $q$ -hub-mediana. Para tal foi considerada uma rede de 150 aeroportos e/ou aeródromos brasileiros com suas localizações geográficas (latitude e longitude) e o fluxo de passageiros em vôos domésticos, utilizando dados fornecidos pela ANAC (2011). Observa-se que muitos desses aeroportos não têm uma quantidade significativa de tráfego nem boa infraestrutura em termos de terminais de passageiros.

No método heurístico proposto toda a rede de aeroportos é considerada na primeira fase. A fim de identificar primeiramente os *hubs* regionais, resolve-se o modelo da  $p$ -mediana, em que o valor de  $p$  é fixado, a distância entre cada par de aeroportos é conhecida, assim como o fluxo de passageiros de cada par origem-destino. Após a identificação dos aeroportos de concentração regional de passageiros, agora com uma rede de aeroportos em número menor, mas mantendo o mesmo fluxo de passageiros, parte-se para a segunda fase do método em que aeroportos de maior concentração de passageiros, ou seja, *hubs* centrais são identificados com o auxílio do modelo de  $q$ -hub-mediana, fixando o valor de  $q$  e necessitando *a priori* do cálculo das distâncias entre os aeroportos e dos fluxos de passageiros da nova rede. Nessa abordagem, os aeroportos que concentram o fluxo regional de passageiros

são integrados aos aeroportos que concentram o fluxo central de passageiros do sistema, considerando ainda todos os trajetos de origem e/ou destino não finalizados.

Experimentos computacionais tendo como instância o sistema de transporte aéreo brasileiro com 150 aeroportos para o problema de localização de *hubs* são realizados, variando o número de *hubs* regionais ( $p$  medianas) de 10 a 40 na primeira fase, e o número de *hubs* centrais ( $q$  medianas) de 2 a 6, na segunda fase. Os modelos matemáticos da  $p$ -mediana e de  $q$ -hub-mediana foram resolvidos com o software CPLEX versão 12.4 disponível no pacote AIMMS versão 12.1. Observa-se que a escolha dos aeroportos candidatos a serem *hubs* regionais e centrais é feita baseada no fluxo mínimo de passageiros anual. Como estudado por Costa et al. (2010), o número de *hubs* no sistema de transporte aéreo brasileiro deve ser de 3 a 6 devido à adequação do grau de agrupamento de aeroportos na rede. Recursos gráficos são usados juntamente com a técnica de diagrama de Voronoi para visualizar a rede de aeroportos com *hubs* inseridos.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 são apresentados conceitos básicos e revisões bibliográficas, relacionados com o problema de localização de *hubs*. Uma breve introdução sobre a Diagrama de Voronoi é feita na Seção 3. Resultados numéricos do método proposto são delineados na Seção 4. Finalmente, na Seção 5 são apresentados os comentários finais deste trabalho.

## 2 Problemas de localização

Problemas de localização tratam de decisões sobre onde instalar facilidades, de modo que clientes sejam atendidos via a otimização de algum critério, (Drezner, 1995). Neste estudo, o termo facilidades é substituído por aeroportos concentradores de voos, enquanto que clientes se referem a passageiros.

Apesar de ser em geral um problema difícil, o problema de localização desperta interesse amplo e tem gerado uma vastidão de artigos e pesquisas. Dentre os artigos do tipo revisão da literatura estão Brandeau e Chiu (1989), ReVelle e Eiselt (2005) e Reese (2006), e dentre os livros destacam-se Farahani e Hekmatfar (2009), Drezner e Hamacher (2004) e Daskin (1995).

### 2.1 O modelo da $p$ -mediana

O modelo matemático mais popular associado ao problema de localização é o modelo da  $p$ -mediana e suas primeiras formulações foram apresentadas por Hakimi (1964) e Kariv e Hakimi (1979). Na versão simplificada do modelo, fixa-se o número de instalações  $p$  a serem localizadas no conjunto de pontos dados, de modo a minimizar a soma ponderada das distâncias dos clientes, centrados em pontos do conjunto, às instalações disponíveis.

Aplicações do problema de localização que utilizam o modelo da  $p$ -mediana, variantes desse modelo e métodos de solução são apresentados em trabalhos como Pizzolato et al. (2012) e Mladenovic et al. (2007). Reese (2006) anuncia métodos de solução para o modelo da  $p$ -mediana, mas seu trabalho se notabiliza pela diversificada gama de aplicações suplementares desse modelo.

Sejam  $N$  o conjunto de  $n$  pontos dados;  $i \in N$  um ponto dado;  $j \in N$  uma mediana;  $p$  ( $< n$ ) o número de medianas a serem localizadas;  $w_i$  o peso associado a cada ponto  $i$ ;  $[d_{ij}]_{n \times n}$  a matriz simétrica das distâncias, em que cada elemento é a distância do ponto  $i$  ao ponto  $j$ , com  $d_{ii} = 0$ ,  $\forall i$ ;  $[x_{ij}]_{n \times n}$  a matriz de alocações, onde  $x_{ij} = 1$  se o ponto  $i$  é alocado a  $j$ , e  $x_{ij} = 0$ , caso contrário;  $x_{jj} = 1$  indica que  $j$  é uma mediana e  $x_{jj} = 0$ , caso contrário. Então, o modelo da  $p$ -mediana pode ser formulado como segue:

$$\text{minimizar } \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_i d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} - x_{jj} \leq 0 \quad i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N, \quad (5)$$

onde o objetivo (1) é minimizar a soma ponderada das distâncias entre os pontos dados e os pontos selecionados como medianas; as restrições em (2) indicam que cada ponto  $i$  é conectado somente a uma única mediana  $j$ ; a restrição (3) garante que há exatamente  $p$  medianas; as restrições em (4) afirmam que um ponto deve ser atribuído a uma mediana, e, finalmente, variáveis de decisão binárias são impostas em (5).

Observa-se que em lugar de localização, o modelo acima pode ser interpretado como modelo de zoneamento, em que se busca dividir o espaço em  $p$  zonas de acordo com o peso atribuído a cada zona.

Neste trabalho, o modelo da  $p$ -mediana foi usado para localizar *hubs* regionais no sistema aéreo brasileiro, correspondente a primeira fase do método proposto.

## 2.2 O modelo $q$ -hub-mediana

O estudo formal do problema de localização de *hubs* foi introduzido por O'Kelly (1987), que apresenta um modelo de programação não-linear para o problema, e propõe dois métodos heurísticos baseados em enumeração para resolvê-lo.

Segundo Campbell e O'Kelly (2012) problemas de localização de *hubs* envolvem a localização de nós de uma rede através dos quais fluxos (passageiros) são encaminhados a partir de nós origem a nós destino (cidades). As viagens que começam em nós origem e terminam em nós destino são caminhos na rede, que em geral podem estar conectados de forma direta ou através de caminhos que passam por *hubs*. As instalações *hubs* possuem duas principais funções: (i) de troca, classificação ou conexão, permitindo que os fluxos sejam redirecionados a um nó *hub* através de ligações, e (ii) de consolidação ou carga fracionada, permitindo os fluxos serem agregados ou desagregados. Campbell (1994) adiciona duas características no problema de localização de *hubs*: (a) caminhos entre pares origem-destino visitam no máximo dois *hubs* e (b) fluxos origem-destino diretos não são permitidos, e define este "problema como problema de localização de *hubs* fundamental".

Usando como justificativa que o modelo de relaxação linear proposto por Campbell (1994) resultava em soluções muito fracionadas, Skorin-Kapov et al. (1996) propuseram um modelo de programação inteira mista para resolver problemas simples de localização de *hubs*, baseado no modelo da  $p$  mediana. Defina  $y_{ijkm}$  como a fração de fluxo do nó  $i$  ao nó  $j$  que é encaminhado através de *hubs* no nó  $k$  e  $m$  nesta ordem,  $c_{ij}$  o custo unitário de transporte entre os vértices  $i$  e  $j$ ,  $\alpha$  o fator de desconto para o transporte entre *hubs*,  $q$  o número de *hubs* a serem localizados,  $x_{ik} = 1$  se o nó  $i$  é alocado ao *hub*  $k$  e  $x_{ik} = 0$  caso contrário,  $x_{kk} = 1$  se  $k$  é um *hub* e  $x_{kk} = 0$ , caso contrário. Então, o modelo de  $q$ -hub mediana é formulado por

$$\text{minimizar } \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} \sum_{k \in P} \sum_{m \in P} w_{ij} (c_{ik} + c_{jm} + \alpha c_{km}) y_{ijkm} \quad (6)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{k \in P} x_{kk} = q \quad (7)$$

$$\sum_{k \in P} x_{ik} = 1 \quad i \in P \quad (8)$$

$$\sum_{m \in P} y_{ijkm} = x_{ik} \quad i, j, k \in P \quad (9)$$

$$\sum_{k \in P} y_{ijkm} = x_{jm} \quad i, j, m \in P \quad (10)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj} \quad i, j \in P \quad (11)$$

$$y_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in P, \quad (12)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i, k \in P \quad (13)$$

onde a função objetivo (6) a ser minimizada representa os custos envolvidos no transporte entre cada par origem-destino. Por (7) um número fixo de *hubs* devem ser localizados. Em (8) as restrições asseguram que cada nó é alocado a exatamente um único *hub*. As restrições (9) asseguram que  $x_{ik}$  é factível se a instalação  $i$  é alocada ao *hub*  $k$  independente do destino, enquanto que as restrições em (10) asseguram que o caminho é factível somente se  $j$  é alocado no *hub*  $m$  independente da origem. Em (11) as restrições garantem que um nó somente é atribuído a um *hub* já localizado. As restrições em (12) indicam que as decisões de fluxo são não negativas, enquanto que as restrições em (13) definem variáveis de decisão de tipo binário.

Neste trabalho, o modelo de  $q$ -*hub*-mediana foi usado para localizar *hubs* regionais no sistema aéreo brasileiro, correspondente a segunda fase do método proposto.

### 3 Técnica de diagramas de Voronoi

Proposto originalmente por Georgy Voronoi na metade do século XIX (Aurenhammer, 1991), o diagrama de Voronoi foi re-descoberto por Okabe et al. (2000). Ele é um tipo especial de partição do espaço métrico determinado por distâncias Euclidianas a partir de um conjunto específico de pontos sementes no espaço bi-dimensional. Esta partição, com pelo menos 2 pontos sementes, resulta em polígonos convexos bi-dimensionais onde, cada polígono contém exatamente um ponto semente e pontos interiores que estão mais próximos a esse ponto semente do que a qualquer outro ponto semente. Como em Boots e South (1997), o diagrama ordinário de Voronoi pode ser definido como segue.

Seja  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  um conjunto de  $p$  pontos sementes conhecidos em  $\mathbb{R}^2$ . A região  $V(x_j) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_j\|_2 \leq \|x - x_i\|_2, j \neq i, i, j = 1, \dots, p\}$  é chamada de polígono ordinário de Voronoi do ponto semente  $x_j$ , onde  $\|\cdot\|_2$  denota a norma Euclidiana. De fato,  $V(x_j)$  contém todos os pontos que estão mais próximos ao ponto semente  $x_j$  do que a qualquer outro ponto. O conjunto  $\Gamma(P) = \{V(x_1), \dots, V(x_p)\}$  é uma partição de  $\mathbb{R}^2$ , chamado de diagrama ordinário de Voronoi do conjunto de pontos sementes.

Neste trabalho, juntamente com recursos gráficos, o diagrama de Voronoi será utilizado para facilitar a visualização do novo projeto da rede de aeroportos brasileiros com a introdução de *hubs*, como veremos na próxima Seção.

Tabela 1: Critério para a escolha de *hub* regionais

total de <i>hubs</i> regionais	fluxo de passageiros mínimo
10	5.000.000
19	2.000.000
24	1.000.000
34	500.000
40	330.000

#### 4 Experimentos Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais obtidos com o método heurístico proposto para resolver o problema de localização de hubs no sistema aéreo brasileiro.

De fato, os resultados foram obtidos através do uso do *solver* CPLEX versão 12.4, disponível no pacote AIMMS versão 12.1. O método de solução aplicado foi o algoritmo de *branch-and-cut*, que vem a ser o método de solução padrão do CPLEX dos problemas de programação inteira mista. A implementação do sistema de visualização gráfica foi programado na linguagem Visual C++ versão 9.0, usando as ferramentas Qt para a interface gráfica e CGAL para os diagramas de Voronoi. Além disso, os experimentos numéricos foram efetuados num computador Intel PC Celeron com 2,7 GHz e 512MB RAM, sob o sistema operacional de 32 Bits Windows Vista.

Os dados da instância teste foram extraídos do último anuário estatístico disponibilizado pela ANAC, correspondente ao ano 2010 (ANAC, 2011), que resultaram em uma rede de 150 aeroportos e/ou aeródromos que ofereceram transporte de passageiros. Devido à ampla extensão do território Brasileiro, as distâncias entre os aeroportos foi calculada usando a fórmula de Haversine (Sinnot, 1984), que determina uma distância entre dois pontos sobre uma esfera (neste caso, a Terra) a partir das coordenadas geográficas (latitude e longitude).

Na segunda fase do método proposto a matriz de distância é determinada de maneira similar a primeira fase, eliminando da rede os aeroportos que foram alocados aos *hubs* regionais, resultando em uma matriz com menos elementos em relação a da primeira fase.

Para determinar a matriz de pesos da primeira fase do método proposto, considerou-se como peso de um aeroporto o somatório dos fluxos de passageiros de voos domésticos que chegam e que partem desse aeroporto. Com relação a matriz de pesos da segunda fase do método, aos pesos já calculados na primeira fase foram adicionados os fluxos de passageiros dos caminhos de origem e/ou destino que não foram finalizados.

A determinação dos *hubs* regionais na rede brasileira de aeroportos é realizada na primeira fase do método a partir da resolução do modelo da *p*-mediana. Foram testados os valores fixos de  $p = 10, 19, 24, 34, 40$ . A Tabela 1 mostra o critério para a escolha de *hubs* regionais na primeira fase do método proposto. Dependendo do total de *hubs* regionais, uma quantidade mínima é exigida para o fluxo de passageiros anual no aeroporto candidato.

Na segunda fase do método procede-se à localização de *hubs* centrais com o auxílio do modelo de *q*-hub-mediana (6)-(13), fixando o valor de  $q$ . Costa et al. (2010) sugerem que o número total de *hubs* na rede de transporte aéreo Brasileiro seja de 3 a 6, devido ao grau adequado de aglomeração da rede. Assim, nos experimentos os valores testados são  $q = 2, 3, 4, 5, 6$ . Ainda, semelhante a Figueiredo et al. (2012), foi considerado o fator de desconto  $\alpha = 0.6$  no modelo *q*-hub-mediana (6)-(13).

A Tabela 2 apresenta os resultados dos experimentos com o software CPLEX na segunda fase do método, considerando  $p = 10, 19, 24, 34, 40$  e  $q = 2, 3, 4, 5, 6$  na rede de 150 aeroportos brasileiros. Na terceira coluna, são informados os tempos, em segundo, para encontrar os valores ótimos da função objetivo em (6), os quais são apresentados na quarta coluna.

Para efeito de análise dos resultados dos experimentos realizados, a Tabela 3 apresenta os *hubs* centrais localizados em todos os testes. Mesmo variando  $p$  e  $q$  os resultados se mostraram consistentes e semelhantes, com diferença de no máximo 1 *hub* central.

A Figura 1 mostra o resultado gráfico da primeira fase do método proposto, quando são localizados na rede de 150 aeroportos os *hubs* regionais através da resolução do modelo da  $p$ -mediana (1)-(5). Os pontos em vermelho representam os aeroportos e os pontos em preto representam 24 *hubs* regionais localizados, que possuem um fluxo anual de mais de um milhão de passageiros. Os segmentos de reta azuis mostram a alocação dos aeroportos aos *hubs* regionais localizados. Finalmente, tomando como sementes os *hubs* regionais, o diagrama de Voronoi mostra as regiões de abrangência de cada *hub* regional em turquesa.

A Figura 2 mostra o resultado gráfico referente à segunda fase do método proposto, quando são localizados numa rede com menos aeroportos os *hubs* centrais através da resolução do modelo da  $q$ -*hub* mediana (6)-(13). Os pontos em preto representam os *hubs* regionais já localizados na fase anterior, e os pontos em mostarda são os *hubs* centrais localizados. Os segmentos de reta verdes mostram os aeroportos alocados aos *hubs* centrais localizados, e os segmentos de reta em lilás mostram a conexão entre os *hubs* centrais. Dos resultados computacionais, os aeroportos a servirem de *hubs* centrais no Brasil são: SBSV-Aeroporto Internacional Deputado Luis Eduardo Magalhães, em Salvador, BA, SBBR-Aeroporto Internacional Presidente Juscelino Kubitschek, em Brasília, DF, SBSP-Aeroporto Congonhas, SP, e SBGL-Aeroporto Internacional Antônio Carlos Jobim, conhecido como Galeão, em Rio de Janeiro, RJ.

## 5 Conclusões

A introdução em duas fases de *hubs* regionais, que concentram o fluxo de aeroportos de regiões menos densas populacionalmente, e de *hubs* centrais, que concentram fluxos maiores, mostra-se como uma alternativa interessante para melhorar o sistema de transporte aéreo brasileiro que agrega 150 aeroportos. A abordagem proposta garante que tipos diferentes de *hubs* possam ser introduzidos, ao passo que facilita a resolução de um problema difícil, considerando a localização de *hubs* em uma rede de tamanho razoável.

Como trabalho futuro, planeja-se introduzir o conceito de confiança de sistemas (*reliable systems*) no sistema de transporte aéreo brasileiro. A idéia é, partindo da inviabilidade de operação de um aeroporto, devido a más condições de tempo, por exemplo, reconfigurar o sistema, oferecendo rotas aéreas alternativas em tempo razoável. Mais a frente, pretende-se considerar também os vôos internacionais, e assim estudar a capacidade real dos aeroportos, e procurar *hubs* alternativos que possam albergar um maior fluxo de passageiros.

Tabela 2: Resultados dos testes na segunda fase para  $p = 10, \dots, 40$  e  $q = 2, \dots, 6$

$p$	$q$	CPLEX	
		tempo(s)	FO
10		21	1.65167e+010
	2	0.27	7.5318109005e+10
	3	0.25	6.191732759e+10
	4	0.26	5.650088782e+10
	5	0.27	5.650088782e+10
	6	0.27	4.993805865e+10
19		10	6.11995e+009
	2	7.64	8.643783326e+10
	3	7.07	7.311755742e+10
	4	7.30	6.768124053e+10
	5	8.92	5.404634153e+10
	6	6.93	6.029925946e+10
24		8	4.02646e+009
	2	44.27	8.895166805e+10
	3	47.32	7.521588096e+10
	4	38.14	6.97485676e+10
	5	46.74	6.611369925e+10
	6	37.55	6.236798217e+10
34		7	1.72131e+009
	2	728.20	9.288088348e+10
	3	597.16	7.821307101e+10
	4	591.36	7.280016354e+10
	5	690.766	6.783838708e+10
	6	615.66	6.431841269e+10
40		5	1.069e+009
	2	3906.72	9.437078575e+10
	3	3602.48	7.968798069e+10
	4	2831.90	7.417253818e+10
	5	4099.52	6.890212635e+10
	6	2643.56	6.517307217e+10



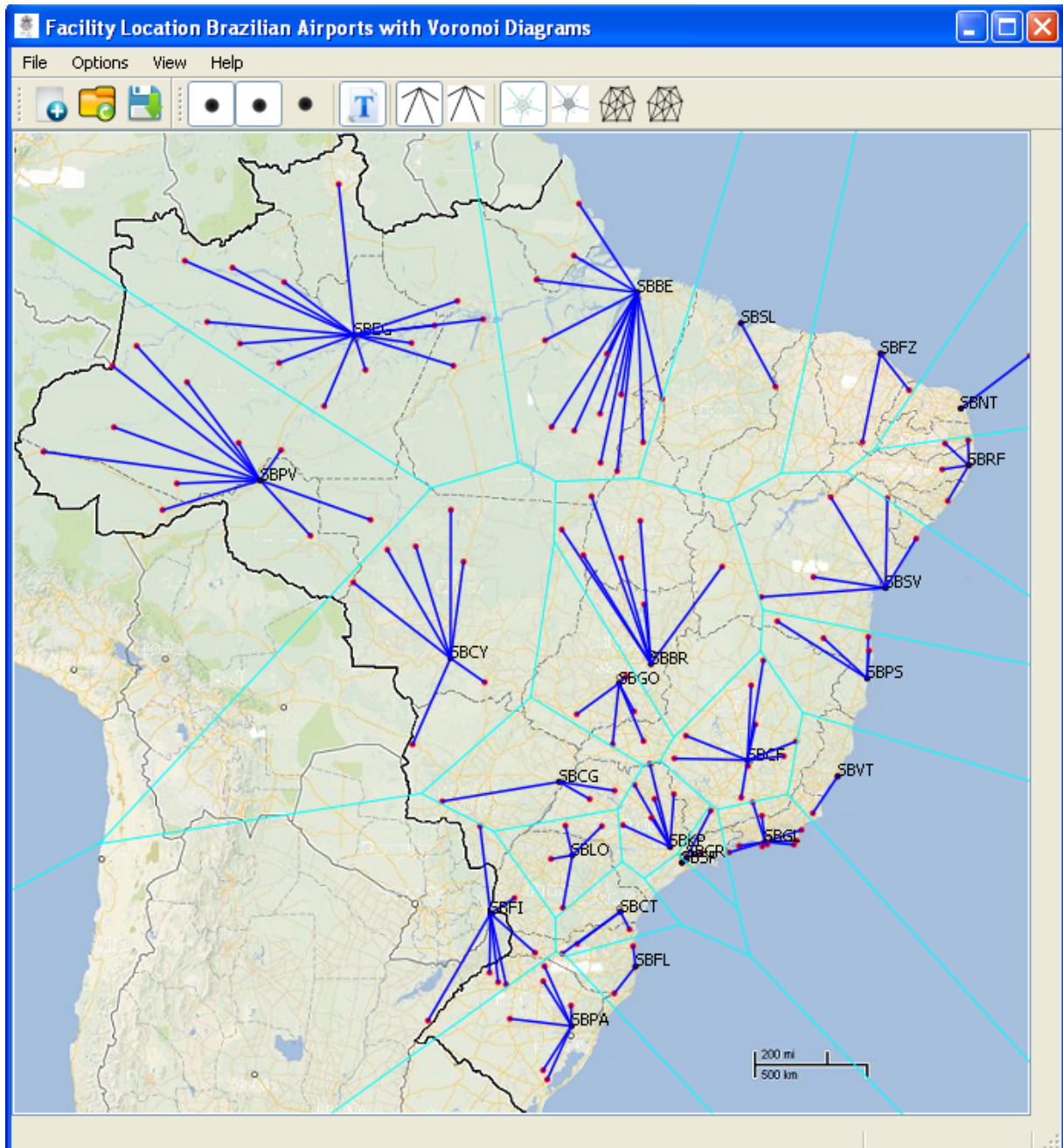


Figura 1: Resultado da primeira fase com  $p = 24$ : localização de *hub* regionais

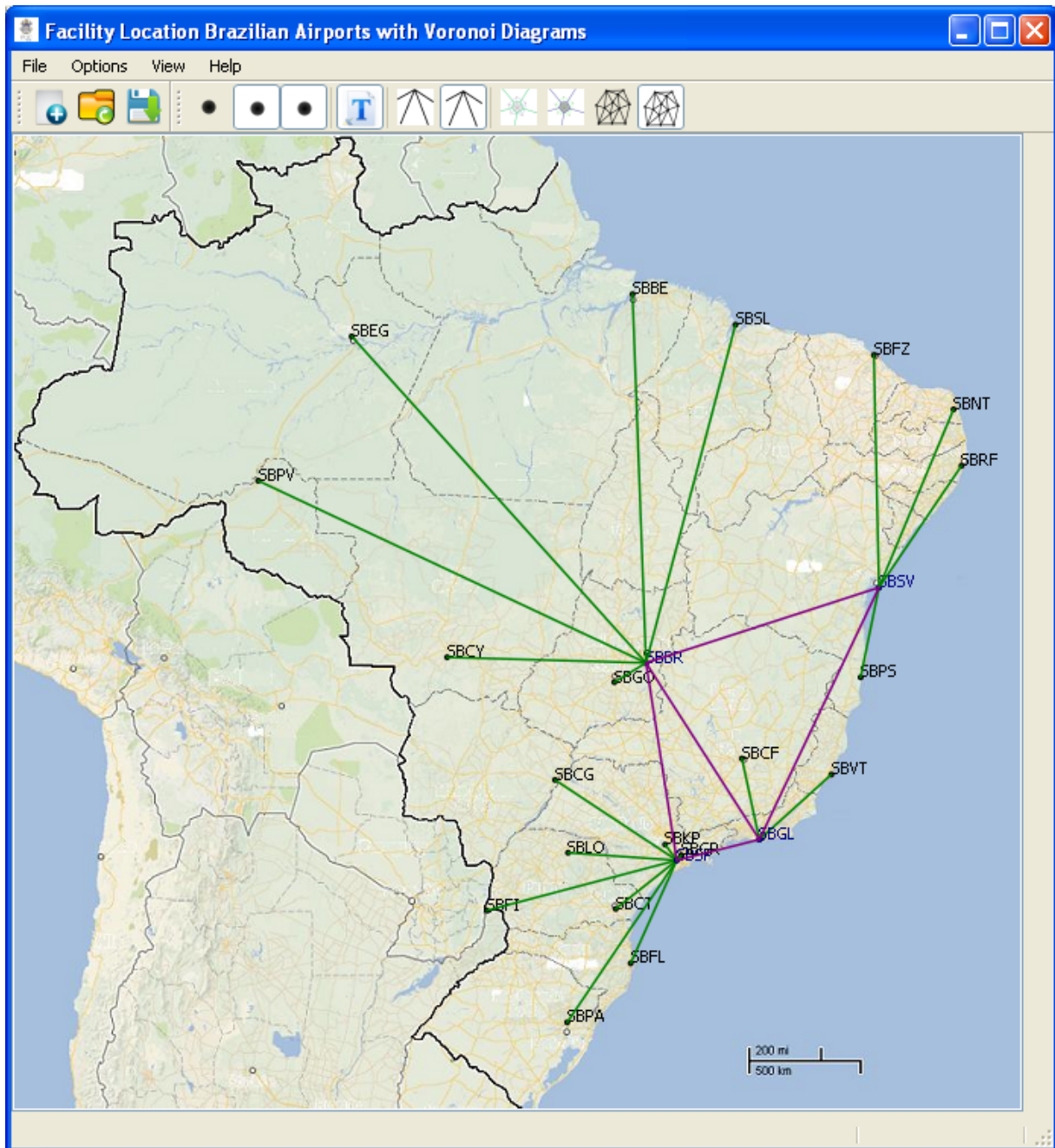


Figura 2: Resultado da segunda fase com  $p = 24$  e  $q = 4$ : localização de *hubs* centrais

Tabela 3: Análise de resultados dos testes efetuados para o conjunto de *hubs* centrais de  $p = 10, \dots, 40$  com  $q = 2, \dots, 6$

$q$ -hubs	código ICAO dos Aeroportos	medianas
2	SBSV, SBGR	$p = 10, 19, 24, 34, 40$
3	SBSV, SBGR, SBBR	$p = 10, 19, 24, 34, 40$
4	SBSV, SBBR, SBGL, SBGR	$p = 10, 19, 40$
	SBSV, SBBR, SBGL, SBSP	$p = 24, 34$
5	SBSV, SBBR, SBGL, SBRF, SBGR	$p = 10, 19$
	SBSV, SBBR, SBGL, SBRF, SBSP	$p = 24$
	SBSV, SBBR, SBGL, SBMA, SBSP	$p = 34, 40$
6	SBSV, SBBR, SBGL, SBRF, SBGR, SBBE	$p = 10, 19$
	SBSV, SBBR, SBGL, SBRF, SBSP, SBBE	$p = 24$
	SBSV, SBBR, SBGL, SBRF, SBSP, SBMA	$p = 34$
	SBSV, SBBR, SBGL, SBRF, SBSP, SBMA	$p = 40$

## Referências

- Alumur, S. e Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: the state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190(1):1–21.
- ANAC (2011). Anuário do transporte aéreo 2010. Internet. [www.anac.gov.br](http://www.anac.gov.br).
- Aurenhammer, F. (1991). Voronoi diagrams - A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23:345–405.
- Boots, B. e South, R. (1997). Modeling retail trade areas using higher-order, multiplicatively weighted voronoi diagrams. *Journal of Retailing*, 73:519–536.
- Brandeau, M. L. e Chiu, S. S. (1989). An overview of representative problems in location research. *Management Science*, 35(6):645–674.
- Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72:387–405.
- Campbell, J. F., Ernst, A., e Krishnamoorthy, M. (2009). *Hub Location Problems*, chapter 12, pages 373–407. Springer.
- Campbell, J. F. e O’Kelly, M. E. (2012). Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science*, 46:153–169.
- Contreras, I. e Fernandez, E. (2011). General network design: A unified view of combined location and network design problems. *European Journal of Operational Research*, 219:680–697.
- Costa, T. F. G., Lohmann, G., e Oliveira, A. V. M. (2010). A model to identify airport hubs and their importance to tourism in brazil. In *Research in Transportation Economics*, pages 3–11.
- Daskin, M. S., editor (1995). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. Springer Series in Operations Research. John Wiley and Sons, New York.

- Drezner, Z., editor (1995). *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*. Springer Series in Operations Research. Springer Verlag, New York.
- Drezner, Z. e Hamacher, H. W., editors (2004). *Facility Location: Applications and Theory*. Springer, New York.
- Farahani, R. Z. e Hekmatfar, editors (2009). *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies: Contributions to Management Science*. Physica-Verlag Heidelberg.
- Figueiredo, R. M. A., O'Kelly, M. E., e Pizzolato, N. D. (2012). A two stage hub location model for air transportation on brazil. submitted to International Transactions in Operational Research (ITOR).
- Hakimi, S. L. (1964). Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12:450–459.
- Hekmatfar, M. e Pishvae, M. (2009). *Hub Location Problem*, chapter 11, pages 243–270. Physica-Verlag Heidelberg.
- INFRAERO (2012). Internet. [www.infraero.gov.br/images/stories/Estatistica/2012/dez.pdf](http://www.infraero.gov.br/images/stories/Estatistica/2012/dez.pdf).
- Kariv, O. e Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. ii: The  $p$ -medians. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 37:539–560.
- Klincewicz, J. G. (1998). Hub location in backbone/tributary network design: A review. *Location Science*, 6:307–335.
- Mladenovic, N., Brimberg, J., Hansen, P., e Moreno-Perez, J. (2007). The  $p$ -median problem: a survey of metaheuristic approaches. *European Journal of Operational Research*, 179:927–939.
- Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., e Chiu, S. N. (2000). *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. John Wiley and Sons, LTD.
- O'Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32(3):393–404.
- Pizzolato, N. D., Raupp, F. M. P., e Alzamora, G. S. (2012). Revisão de desafios aplicados em localização com base em modelos da  $p$ -mediana e suas variantes. *PODES, Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 4(1):13–42.
- Reese, J. (2006). Solution methods for the  $p$ -median problem: An annotated bibliography. *Networks*, 48(3):125–142.
- ReVelle, C. S. e Eiselt, H. A. (2005). Location analysis: A synthesis and survey. *European Journal of Operational Research*, 165(1):1–19.
- Sinnot, R. W. (1984). Virtues of the haversine. *Sky & Telescope*, page 159.
- Skorin-Kapov, D., Skorin-Kapov, J., e O'Kelly, M. (1996). Tight linear programming relaxations of uncapacitated  $p$ -hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94:582–593.