RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MÁXIMO CARREGAMENO COM VARIÁVEIS DE CONTROLE DISCRETAS

Edilaine M. Soler, Edmea C. Baptista
Faculdade de Ciências, UNESP-Univ Estadual Paulista, Departamento de Matemática
Av. Eng. Luiz Edmundo C. Coube, 14-01, 17033-360, Bauru, SP, Brasil
edilaine@fc.unesp.br, baptista@fc.unesp.br

Vanusa A. Sousa
Centro de Ciências Exatas e da Tecnologia (CCET), Universidade Federal de São Carlos
Via Washington Luiz, Km 235, 13565-905, São Carlos, SP, Brasil
vanusa@ufscar.br

Geraldo R. M. da Costa
Dep. de Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo
Av. Trabalhador Sãocarlense, 400, Centro, 13566-590 São Carlos, SP, Brasil
geraldo@sc.usp.br

RESUMO

O problema de determinar o máximo carregamento de um sistema de potência pode ser formulado como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas. Na maioria das técnicas existentes na literatura baseadas na determinação do máximo carregamento via técnicas de otimização, os controles discretos são modelados como variáveis contínuas. Estas formulações não são realistas pois alguns controles somente podem ser ajustados por passos discretos. Este trabalho apresenta um tratamento eficiente para as variáveis discretas do problema via função penalidade, tornando o problema contínuo e diferenciável. Testes numéricos preliminares com os sistemas IEEE 14 e 30 barras são apresentados.

PALAVARAS CHAVE. Programação Não Linear. Variáveis Discretas. Problema de Máximo Carregamento.

Área principal: PO na Área de Energia

ABSTRACT

The problem of finding the maximum loading of a power system can be formulated as a mixed discrete nonlinear programming problem. In most techniques existing in the literature based on determining of the maximum loadability via optimization techniques, the discrete controls are modeled as continuous variables. These formulations are unrealistic because some controls can be only adjusted by discrete steps. This work presents an efficient handling of discrete variables by penalty function becoming the problem continuous and differentiable. Initial numerical tests using the IEEE 14 and 30-Bus test systems are presented.

KEYWORDS. Nonlinear Programming. Discrete Variables. Maximum Loadability Problem.

Main area: OR in Energy

1. Introdução

Nas últimas décadas, a instabilidade de tensão tem sido apontada como uma das principais razões dos blecautes ao redor do mundo. O colapso de tensão é a consequência final de um processo de instabilidade. Por causar enormes prejuízos a diferentes nações, tal fenômeno tem recebido a atenção de muitos pesquisadores e é uma das principais preocupações na operação de sistemas elétricos de potência. Existem diferentes abordagens para estimar a estabilidade de tensão do sistema. Uma destas abordagens é determinar a margem do ponto de operação corrente para o ponto de máximo carregamento do sistema (EL-Dib *et al.* (2006)), o qual é uma medida fundamental para se quantificar a proximidade de um colapso de tensão. Entre algumas das metodologias existentes para o cálculo do máximo carregamento temos os métodos diretos (Seydel (1994) e Cañizares e Alvarado (1993)), os métodos de continuação ((Seydel (1994), Iba *et al.* (1991) e Ajjarapu e Christy (1992)) e os métodos de otimização (Cutsem (1991), Irisarri *et al.* (1997), Barboza *et al.* (1998), EL-Dib *et al.* (2006), e Gnanambal e Babulal (2012)).

O problema de determinar o máximo carregamento em um sistema de potência pode ser formulado como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas.

Devido a dificuldade de resolução imposta pelas variáveis discretas em problemas de programação não linear, nos trabalhos existentes na literatura baseados na determinação do máximo carregamento via técnicas de otimização, comumente a natureza discreta dos controles é ignorada e o problema é modelado somente com variáveis contínuas. Estas formulações não são realistas pois alguns controles somente podem ser ajustados por passos discretos.

Recentemente, devido a eficiência e rápida convergência, métodos de pontos interiores e suas variações tem sido usados para resolver problemas de programação não linear de grande porte (Irisarri *et al.* (1997), Barboza *et al.* (1998), Baptista *et al.* (2005), Rosehart *et al.* (2006)). Métodos de Pontos Interiores combinados a abordagens para tratamento de variáveis discretas tem sido utilizados para resolver problemas de programação não linear com variáveis discretas e contínuas (M. Liu *et al*. (2002), Adibi *et al.* (2003), L. Liu *et al.* (2009) and Soler *et al.* (2012)).

Este trabalho propõe uma abordagem para a resolução do Problema de Máximo Carregamento quando modelado como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas. O método consiste no tratamento das variáveis discretas do problema por uma função penalidade tornando o problema contínuo e diferenciável, como proposto em Soler *et al.* (2012). O problema de programação não linear obtido é resolvido pelo Método de Pontos Interiores com Filro proposto em Wätcher e Biegler (2006) e implementado no *solver* IPOPT - *Interior Point OPTimizer* (https://projects.coin-or.org/Ipopt) e fornecido gratuitamente pelo projeto COIN *(Computacional Infrastructure for Operational Research*).

O trabalho está organizado como segue: a Seção 2 descreve a formulação matemática do Problema de Máximo Carregamento com variáveis discretas e contínuas; a Seção 3 apresenta a abordagem proposta para resolução deste problema; na Seção 4 são apresentados testes numéricos com a abordagem proposta na resolução do Problema de Máximo Carregamento para os sistemas teste IEEE 14 e 30 Barras. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção 5.

2. O problema de Máximo Carregamento

O objetivo do problema de Máximo Carregamento é determinar o máximo aumento de carga em um sistema elétrico de potência satisfazendo todas as restrições operacionais do sistema e de equipamentos, e pode ser modelado matematicamente como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas, dado por:

$$
\begin{array}{l}
Max\ \alpha \\
s.a: \begin{cases}
\Delta P_i(V,\theta,t,\alpha)=0, i=1,2,...,NBCCR \\
\Delta Q_j(V,\theta,t,b^{sh},\alpha)=0, j=1,2,...,NBC \\
\underline{Q_k} \leq Q_k(V,\theta,t,b^{sh}) \leq \overline{Q_k}, k=1,2,...,NBCR \\
\underline{V_p} \leq V_p \leq \overline{V_p}, p=1,2,...,NB \\
t_l \in D_{t_l}, l=1,2,...,NT \\
b_q^{sh} \in D_{b_q^{sh}}, q \in \{q_1,q_2,...,q_{NBSS}\}
\end{cases}
\end{array} \tag{1}
$$

em que:
NB é o número de barras do sistema elétrico;
NBC é o número de barras de carga;
NBCR é o número de barras de controle de reativo;
NBCCR é o número de barras de carga e de controle de reativos;
NT é o número de transformadores com *tap* variável;
NBSS é o número de barras conectadas com susceptância *shunt*;
$\{q_1,q_2,q_3,...,q_{NBSS}\}$ é o conjunto de barras conectadas com susceptância *shunt*;
$\underline{Q_k},\overline{Q_k}$ são os limites mínimos e máximos de geração de potência reativa;
$\underline{V_p},\overline{V_p}$ são os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões;
D_{t_l} é o conjunto de valores discretos que o *tap* do transformador *l* pode assumir;
$D_{b_q^{sh}}$ é o conjunto de valores discretos que a susceptância *shunt q* pode assumir;.

Variáveis:
α é a variável que representa o fator de carregamento;
$V=(V_1,V_2,...,V_{NB})^t$ é o vetor das magnitudes de tensão nas barras 1,2,...,NB;
$\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{NB})^t$ é o vetor dos ângulos de tensão nas barras 1,2,...,NB;
$t=(t_1,t_2,...,t_{NT})^t$ é o vetor dos *taps* dos transformadores 1,2,...,NT, respectivamente;
$b^{sh}=(b_{q1}^{sh},b_{q2}^{sh},...,b_{qNBSS}^{sh})^t$ é o vetor das susceptância *shunt* $q_1,q_2,q_3,...,q_{NBSS}$, respectivamente;

As seguintes equações descrevem em detalhes as funções que aparecem no Problema (P1). Considere:
Ω o conjunto de todas as linhas de transmissão;
Ω_k o conjunto de todas as barras vizinhas à barra k;
$g_{km},b_{km},b_{km}^{sh}$ a condutância e as susceptâncias da linha km, respectivamente;
P_k^G,P_k^C as potências ativas geradas e consumidas, respectivamente;
Q_k^G,Q_k^C as potências reativas geradas e consumidas, respectivamente.

Com isso tem-se:

$$\theta_{km}=\theta_k-\theta_m$$

As equações de balanço do sistema elétrico são dadas por:
- Balanço de potência ativa para as barras de carga e de controle reativo:

$$\Delta P_i(V,\theta,t,\alpha) = (P_i^G - P_i^C)(1+\alpha) - \sum_{m\in\Omega_i} P_{im}(V,\theta,t)$$

$$P_{im} = (t_{im}V_i)^2 g_{im} - (t_{im}V_i)V_m(g_{im}\cos\theta_{im} + b_{im}sen\theta_{im})$$

- Balanço de potência reativa para as barras de carga:

$$\Delta Q_j(V,\theta,t,b^{sh},\alpha) = (Q_j^G - Q_j^C)(1+\alpha) + b_j^{sh}V_j^2 - \sum_{m\in\Omega_j} Q_{jm}(V,\theta,t) = 0;$$

$$Q_{jm} = -(t_{jm}V_j)^2(b_{jm}+b_{jm}^{sh}) + (t_{jm}V_j)V_m(b_{jm}\cos\theta_{jm} - g_{jm}sen\theta_{jm}).$$

- Geração de potência reativa injetada nas barras de controle de reativo:

$$Q_k(V,\theta,t,b^{sh}) = Q_k^C - b_k^{sh}V_k^2 + \sum_{m\in\Omega_k}[-(t_{km}V_k)^2(b_{km}+b_{km}^{sh}) + (t_{km}V_k)V_m(b_{km}\cos\theta_{km} - g_{km}sen\theta_{km})].$$

Um método para ajustar as variáveis contínuas e discretas do Problema de Máximo Carregamento para seus valores ótimos é apresentado na próxima seção.

3. Método de Solução

O método proposto consiste em resolver uma sequência de problemas de programação não linear com variáveis contínuas somente. Uma função auxiliar apresentada em Soler *et al.* (2012), a qual penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas não assumem valores discretos, é utilizada. As soluções obtidas para os problemas de programação não linear convergem para a solução do problema de programação não linear com variáveis contínuas e discretas.

A seguir detalhamos o método proposto para resolução do problema dado em (1). Este problema é equivalente ao problema (2).

$$Min\ -\alpha$$
$$s.a:\begin{cases}\Delta P_i(V,\theta,t,\alpha)=0, i=1,2,...,NLRCB\\ \Delta Q_j(V,\theta,t,b^{sh},\alpha)=0, j=1,2,...,NLB\\ \underline{Q_k}\le Q_k(V,\theta,t,b^{sh})\le \overline{Q_k}, k=1,2,...,NRCB\\ \underline{V_p}\le V_p\le \overline{V_p}, p=1,2,...,NB\\ t_l\in D_{t_l}, l=1,2,...,NT\\ b_q^{sh}\in D_{b_q^{sh}}, q\in\{q_1,q_2,...,q_{NBSS}\}\end{cases} \qquad (2)$$

Assim, de forma geral, o problema de Máximo Carregamento dado em (2) pode ser representado por:

$$Min\ f(x)$$
$$s.t.\begin{cases}h(x,y)=0\\ g(x,y)\ge 0\\ \underline{x}\le x\le \overline{x}\\ y_i\in D_{y_i}, i=1,2,...,n_y\end{cases} \qquad (3)$$

onde $x=(x_1,x_2,...,x_{n_x})$ e $y=(y_1,y_2,...,y_{n_y})$ são variáveis de decisão; D_{y_i} representa o conjunto de valores discretos para a variável y_i, para ; $f(x,y)$, $h(x,y)=(h_1(x,y),h_2(x,y),...,h_m(x,y))$ e

$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y),..., g_p(x, y))$ são funções não lineares. Os vetores $\underline{x} \in R^{n_x}$ e $\overline{x} \in R^{n_x}$ representam, respectivamente, os limites inferior e superior da variável *x*.

Considere a função penalidade apresentada em Soler *et al.* (2012):

$$p(y) = \sum_{j=1}^{n_y} \left[\sin\left(\frac{y_j}{s_j^u - s_j^l} \pi + \lambda_j \right) \right]^2 \tag{4}$$

onde:

s_j^l representa o valor discreto mais próximo inferiormente de y_j;

s_j^u representa o valor discreto mais próximo superiormente de y_j;

λ_j representa uma constante tal que $0 \le \lambda_j < \pi$ determinada pela seguinte equação:

$$\lambda_j = \left(\left\lceil \frac{s_j^l}{s_j^u - s_j^l} \right\rceil - \frac{s_j^l}{s_j^u - s_j^l} \right) \pi$$

A função dada pela equação (4) é contínua e diferenciável e possui a seguinte característica:

$$p(y) = \begin{cases} 0, \text{ se y assume valores discretos} \\ \delta > 0, \text{ caso contrario} \end{cases} \tag{5}$$

isto é, $p(y)$ é positiva se, e somente se, y não assume valores discretos.

Considere o problema (6), que contem somente variáveis contínuas:

$$\begin{aligned} & Min\ f(x,y) + \gamma p(y) \\ & s.t. \begin{cases} h(x,y) = 0 \\ g(x,y) \ge 0 \\ \underline{x} \le x \le \overline{x} \\ \underline{y} \le y \le \overline{y} \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

em que $\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2,..., \underline{y}_{n_y})$, com $\underline{y}_i = \min D_{y_i}$, para $i = 1,2,...,n_y$, e $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2,..., \overline{y}_{n_y})$, com $\overline{y}_i = \max D_{y_i}$, para $i = 1,2,...,n_y$.

O método de solução proposto para resolução do Problema de Máximo Carregamento com variáveis discretas e contínuas como representado em (3) consiste em resolver uma seqüência de problemas de programação não linear com variáveis contínuas somente como dado em (6). Tomando γ inicial suficientemente pequeno, a medida que γ cresce gradualmente as soluções do problema (6) convergem para uma solução do problema (3). Neste trabalho, os problemas de programação (6) são resolvidos pelo Método de Pontos Interiores com Filtro apresentado em Wätcher e Biegles (2006) e implementado no *solver* IPOPT (https://projects.coin-or.org/Ipopt).

3.1 Algoritmo

Para resolver problemas como dado em (3) propomos o algoritmo a seguir. Neste algoritmo $\varepsilon > 0$ representa a tolerância adotada.

1- Entrada: $k \leftarrow 0$, $\gamma^{(1)}$

2- Resolver utilizando o *solver* IPOPT:

$$(x^*,y^*) \leftarrow \begin{cases} Min\ f(x,y) + \gamma^{(k)} p(y) \\ s.t. \begin{cases} h(x,y) = 0 \\ g(x,y) \geq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \\ \underline{y} \leq y \leq \overline{y} \end{cases} \end{cases}$$

3- **SE** $| y_j^* - y_j^{*'} | < \varepsilon$, para $j = 1,2,\ldots,n_y$ **ENTÃO**

PARE: (x^*, y^*) é uma solução ótima para o problema (3)

4- $\gamma^{(k+1)} = 1.3\gamma^{(k)}$

5 - k=k+1

6- Vá para o Passo 2

4. Testes Numéricos

A fim de avaliar a eficiência do método proposto para resolver o problema de Máximo Carregamento com variáveis discretas e contínuas, foram realizados testes numéricos com o método aplicado na resolução deste problema para os sistemas elétricos teste IEEE 14 e 30 Barras. Os dados destes sistemas elétricos foram obtidos em http://www.ee.washington.edu/research/pstca/. Todos os testes foram realizados em um computador com processador Intel Core i7, 3.40GHz e 16.0 GBytes de memória RAM. O *solver* IPOPT foi utilizado em interface com o programa GAMS (http://www.gams.com/).

4.1 Sistema elétrico IEEE 14 Barras

O sistema elétrico IEEE 14 Barras tem as seguintes características: 1 barra de geração (*slack*), 4 barras de controle de reativos, 9 barras de carga, 20 linhas de transmissão, 3 transformadores com *tap* variável, e 1 susceptância *shunt* variável na barra 9.

Neste teste foi considerado que a susceptância *shunt* variável (b_9^{sh}) deve pertencer ao conjunto discreto $D_{b_9^{sh}} = \{0,14;\ 0,16;\ 0,18;\ 0,2;\ 0,22\}$ *p.u.* e os *taps* ($t_{4,7}, t_{4,9}$ e $t_{5,6}$) devem pertencer ao conjunto $D_{t_{4,7}} = D_{t_{4,9}} = D_{t_{5,6}} = \{0,96;\ 0,98;\ 1;\ 1,02;\ 1,04\}$. Foi tomado $\gamma^{(1)} = 0,005$.

A solução discreta foi obtida na 11ª iteração. O tempo total de processamento foi 1,546 segundos. Na solução obtida as restrições de igualdade e desigualdade do problema são satisfeitas com uma precisão de 10^{-15}. Esta solução é apresentada na Tabela 1. Pode-se observar que nesta solução o fator de carregamento do sistema é 0,988, e a barra crítica é a barra 14, com magnitude de tensão de 0,657 *p.u.*, e, a barra 1 atingiu seu limite superior de tensão.

Tabela 1: Solução Obtida – Sistema Elétrico IEEE 14 Barras

Barra	Magnitude de Tensão	Ângulo de Tensão
1	1,100	0,000
2	0,956	-0,168
3	0,796	-0,540
4	0,825	-0,410
5	0,850	-0,336
6	0,762	-0,689
7	0,782	-0,610
8	0,833	-0,610
9	0,726	-0,724
10	0,710	-0,739
11	0,726	-0,723
12	0,717	-0,750
13	0,702	-0,755

14	0,657		-0,818
Controles discretos			
Tap		*Shunt*	
$t_{4,7}$	0,960	b_9^{sh}	0,180
$t_{4,9}$	1,000		
$t_{5,6}$	0,980		
Fator de Carregamento: 0,988			

4.2 IEEE 30-Bus System

O sistema elétrico IEEE 30 Barras tem as seguintes características: 1 barra de geração (*slack)*, 5 barras de controle de reativos, 24 barras de carga, 41 linhas de transmissão, 4 transformadores com *tap* variável, e 2 susceptâncias *shunt* variável (barras 10 e 24).

Neste teste foi considerado que as susceptâncias *shunt* devem pertencer aos conjuntos discretos $b_{10}^{sh} \in D_{b_{10}^{sh}} = \{0,14; 0,16; 0,18; 0,2; 0,22\}$ *p.u.* e $b_{24}^{sh} \in D_{b_{24}^{sh}} = \{0; 0,05; 0,1; 0,15\}$ *p.u.* e os *taps* ($t_{6,9}, t_{6,10}, t_{4,12}, t_{28,27}$) devem pertencer ao conjunto $D_{t_{69}} = D_{t_{6,10}} = D_{t_{4,12}} = D_{t_{28,27}} = \{0,96;\ 0,98;\ 1;\ 1,02;\ 1,04\}$. Foi tomado $\gamma^{(1)} = 0,005$.

Neste teste, a solução discreta foi obtida na 10ª iteração. O tempo total de processamento foi 1,409 segundos. Na solução obtida as restrições de igualdade e desigualdade do problema são satisfeitas com uma precisão de 10^{-15}. Esta solução é apresentada na Tabela 2, em que pode-se observar que nesta solução o fator de carregamento do sistema é 0,725, e a barra crítica é a barra 30, com magnitude de tensão de 0,601 *p.u.,* e, a barra 1 atingiu seu o limite superior de tensão.

Tabela 2: Solução Ótima – Sistema Elétrico IEEE 30 Barras

Barra	Magnitude de Tensão	Ângulo de Tensão
1	1,100	0,000
2	0,961	-0,158
3	0,893	-0,251
4	0,854	-0,313
5	0,818	-0,518
6	0,822	-0,382
7	0,801	-0,462
8	0,816	-0,415
9	0,797	-0,551
10	0,746	-0,645
11	0,855	-0,551
12	0,780	-0,619
13	0,821	-0,619
14	0,741	-0,669
15	0,728	-0,671
16	0,749	-0,646
17	0,734	-0,657
18	0,703	-0,705
19	0,697	-0,714
20	0,707	-0,699
21	0,713	-0,672
22	0,714	-0,671

23	0,697	-0,690	
24	0,677	-0,693	
25	0,674	-0,672	
26	0,625	-0,703	
27	0,696	-0,641	
28	0,799	-0,408	
29	0,636	-0,727	
30	0,601	-0,797	
Controles Discretos			
Tap		*Shunt*	
$t_{6,9}$	0,96	b_{10}^{sh}	0,18
$t_{6,10}$	1,02	b_{24}^{sh}	0,05
$t_{4,12}$	0,96		
$t_{28,27}$	1,02		
Fator de Carregamento: 0,725			

5. Conclusões

O problema de Máximo Carregamento pode ser modelado como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas, com restrições de igualdade e desigualdade. Neste trabalho um novo método que trata as variáveis discretas por uma função penalidade foi utilizado para resolução deste problema.

Testes numéricos preliminares utilizando os sistemas elétricos IEEE 14 e 30 Barras demonstram o potencial do método para resolução do problema de Máximo Carregamento, em um tempo computacional razoável.

Futuramente, serão realizados testes numéricos com o método aplicado na resolução do problema de Máximo Carregamento para os sistemas elétricos IEEE 118 e 300 Barras.

6. Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Referências

Adibi, M. M., Polyak, R. A., Griva, I. A. e Mili, L. (2003), Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented lagrangian method, *IEEE Transactions on Power Systems*, 18 (1), 251- 257.

Ajjarapu, V. e Christy C. (1992), The continuation power flow: a tool for steady state voltage stability analysis, *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(1), 416-423.

Baptista, E. C., Belati, E. A. e Costa, G. R. M. (2005), Logarithmic barrier-augmented Lagrangian function to the optimal power flow problem, *Electrical Power and Energy Systems*, 27, 528-532.

Barboza, L. V., Salgado, R. e Almeida, K. C. (1998), Estudo do máximo carregamento de sistemas de potência via algoritmos de pontos interiores, In: Congresso Brasileiro De Automática, Uberlândia, *Anais do Congresso Brasileiro de Automática.* Uberlândia, 2005-2010.

Cañizares, C. A. e Alvarado, F. L. (1993), Point of collapse and continuation methods for large ac/dc systems, *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(1), 1-8.

Cutsem, T. V. (1991), A method to compute reactive power margins with respect to voltage collapse, *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(1), 145-156.

EL-Dib, A. A., Youssef, H. K. M., EL-Metwally, M. M. e Osman, Z. (2006), Maximum loadability of power systems using hybrid particle swarm optimization, *Electric Power Systems Research*, 76, 485–492.

Gnanambal, K. e Babulal, C. K. (2012), Maximum loadability limit of power system using hybrid differential evolution with particle swarm optimization, *Electrical Power and Energy Systems*, 43, 150–155.

Iba, K., Suzuki, H., Egawa, M. e Watanabe, T. (1991), Calculation of critical loading condition with nose curve using homotopy continuation method, *IEEE Transactions on Power Systems*, 6 (2), 584-593.

Irisarri, G. D., Wang, X., Tong, J. e Moktari, S. (1997), Maximum loadability of power systems using interior point non-linear optimization method, *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(1), 162-172.

Liu, L., Wang, X., Ding, X. e Chen, H. (2009), A robust approach to optimal power flow with discrete variables, *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(3), 1182-1190.

Liu, M., Tso, S. K. e Cheng, Y. (2002), An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables, *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(4), 982-991.

Rosehart, W., Roman, C. e Behjat, L. (2006), Interior point models for power system stability problems, *European Journal of Operational Research*, 171, 1127-1138.

Seydel, R., *Practical bifurcation and stability analysis - From Equilibrium to Chaos*, 2ª ed, Springer-Verlag, New York, 1994.

Soler, E. M., Sousa, V. A. e Costa, G. R. M. (2012), A modified Primal-Dual Logarithmic-Barrier method for solving the Optimal Power Flow problem with discrete and continuous control variables, *European Journal of Operational,* 222, 616-622.

Wätcher, A. e Biegler, L. T. (2006), On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, *Mathematical Programming,* 1, 25-57.