MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA FRONTEIRA DEA BCC PARA ESTUDAR AS DMUS EFICIENTES POR DEFAULT

Luana Carneiro Brandão
Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, Niterói
luanabrandao@id.uff.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello
Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, Niterói
jccbsmello@id.uff.br

RESUMO

O presente trabalho propõe aprimoramentos aos modelos da Teoria da Suavização em DEA BCC, que substitui a fronteira DEA original por outra suavizada. Através dessa teoria, propõe-se tratamento para as distorções causadas pelas DMUs eficientes por *default* do modelo BCC tradicional. O presente propõe ainda um índice para identificar o quanto da eficiência tradicionalmente calculada pelo BCC decorre dessas distorções. Um segundo aprimoramento no modelo DEA BCC suavizado garante que nenhum alvo de DMU apresente *inputs* negativos. Essa situação poderia ocorrer nos modelos anteriores de suavização, mas se torna muito mais provável após o tratamento das eficiências por *default* deste trabalho.

PALAVARAS CHAVE. Suavização DEA BCC, Eficiência por *default*, Alvos de DMUs.

Área principal: DEA

ABSTRACT

This work proposes improvements to the Smooth DEA BCC Theory, that replaces the original DEA frontier with a smooth one. We use this theory to correct the distortions caused by the default efficiencies of the traditional DEA BCC model. We also propose an index that identifies which portion of the traditional BCC efficiency relates to these distortios. This work also proposes an improvement that guarantees that no DMU projection has negative inputs. This situation was possible in previous smooth DEA models, but it becomes much more frequent after implementing the corrections for the default efficiencies that we propose.

KEYWORDS. Smooth DEA BCC, Default efficiency, DMU projection.

Main area: DEA

1. Introdução

Análise Envoltória de Dados (DEA – *Data Envelopment Analysis*) é uma técnica de programação linear para medir a eficiência de unidades produtivas (DMUs – *Decision Making Units*), as quais utilizam múltiplos *inputs* para produzir múltiplos *outputs*. A mesma constrói uma fronteira de eficiência, formada pelas DMUs com as melhores relações produto/insumo, conhecida como envelope ou envoltória. Ao contrário dos métodos tradicionais de cálculo da eficiência, essa técnica possibilita ignorar os aspectos financeiros.

Inicialmente, Charnes, *et al*., (1978) propõem o modelo DEA CCR, o qual considera rendimentos de escala constantes e assume que um incremento proporcional dos *inputs* de uma DMU resulta no mesmo incremento proporcional de seus *outputs*. Em 1984, Banker, Charnes e Cooper propõem o modelo BCC (Banker*et al*., 1984), o qual considera rendimentos de escala variáveis e substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*, pelo axioma da convexidade (Soares de Mello, 2002).

Existem duas formulações equivalentes e duais para esses modelos DEA clássicos (Cooper*et al*., 2000): o Modelo dos Multiplicadores, que trabalha com a razão de somas ponderadas de produtos e recursos, e o Modelo do Envelope, que trabalha com uma distância (não euclidiana) de cada DMU à fronteira de eficiência.

A formulação dos Multiplicadores permite, em tese, o cálculo das taxas de substituição (*trade-offs*) entre os diversos recursos e produtos, quanto a variação de um recurso afeta a produção, bem como o cálculo de *shadow prices* (Coelli*et al*., 1998). Entretanto, a multiplicidade de soluções ótimas não permite esse cálculo para as DMUs extremo-eficientes (Lins & Angulo Meza, 2000), as quais formam os “cantos” da fronteira eficiente e não podem ser expressas como combinação linear de outras DMUs. Essa impossibilidade de cálculo torna-se uma lacuna para o conhecimento do decisor, além de ser um obstáculo ao uso de DEA como ferramenta de multicritério (Nacif, 2005).

O objetivo do presente trabalho é dar continuidade à Teoria de Suavização para DEA BCC desenvolvida em Soares de Mello (2002), Soares de Mello *et al.* (2004), Nacif (2005) e Nacif *et al.* (2009), que consiste em uma solução para o problema apresentado. Essa Teoria é baseada na substituição da fronteira original do Modelo do Envelope, que é linear por partes, por uma suavizada, com derivadas contínuas em todos os pontos.

Soares de Mello *et al.* (2001 e 2002) propuseram uma suavização da fronteira por partes, isto é, calculando uma hipersuperfície diferente para cada segmento de fronteira em DEA original. Apesar de ser desenvolvida para casos mais gerais, a complexidade de seus cálculos permite aplicação apenas para o caso BCC bidimensional. Soares de Mello *et al.* (2004) propõem uma suavização única para toda a fronteira BCC, o que permite aplicações para casos com 1 *output* e n *inputs*, bem como, feitas algumas adaptações, para casos com m *outputs* e 1 *input*. Nacif *et al*. (2009) generalizam ainda mais para o caso BCC multidimensional de n *inputs* e m *outputs*.

Gomes *et al*. (2004) aplicaram a técnica de Soares de Mello *et al.* (2004) para facilitar os cálculos, uma vez que propõem uma extensão do modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) para quando há necessidade de reduzir os insumos utilizados junto à redução dos *outputs* (para que a soma seja constante). Além disso, outros autores, como Kozyreff Filho & Millioni (2004), Avellar *et al*. (2004, 2005, 2007), Gomes & Avellar (2005), Milioni *et al* (2011), Silveira *et al* (2011) e Silveira (2011) propõem outros tipos de fronteira de eficiência que já é originalmente suavizada em modelos DEA Hiperbólico, Esférico, Elipsoidal e Parabólico, o que pode ser considerado como uma versão suavizada e paramétrica de DEA-GSZ (Lins*et al.*, 2003; Gomes & Lins, 2008).

A fronteira suavizada deve ser tão próxima quanto possível da fronteira original, bem como manter propriedades básicas de DEA, como convexidade, monotonicidade crescente dos *inputs* com os *outputs*, atribuição de pesos diferentes por cada DMU. Em trabalhos anteriores, a fronteira suavizada também buscava manter as mesmas DMUs eficientes da fronteira tradicional.

Entretanto, o presente modifica essa última característica para atuar no problema associado às DMUs eficientes por *default* do modelo BCC, e também propõe um índice associado. Usando a terminologia de Gomes *et al* (2012) diz-se que DMU é eficiente por *default* quando deve a sua eficiência ao fato de ser a única a apresentar a menor (maior) quantidade de um dos *inputs* (*outputs*)ou a maior quantidade de um dos *outputs*. Com a relaxação de algumas restrições do problema de suavização pode-se verificar quais das DMUs eficientes por *default* são verdadeiramente eficientes. A solução aqui proposta aumenta a possibilidade de algumas DMUs serem projetadas em alvos inexistentes. Esse problema já estava presente em formas anteriores de suavização, porém em escala consideravelmente menor. Assim, o presente também propõe tratamento para essa situação.

Outros trabalhos também atuam na identificação e solução de problemas associados à formulação DEA BCC. Soares de Mello *et al* (2013) propõem tratamento para eficiências negativas em modelos BCC de Avaliação Cruzada. Outros trabalhos (Bana e Costa *et al*., 2002; Ferreira, 2003; Po *et al*., 2009; Appa *et al.*, 2010; Castro, 2012) usam a técnica de clusters dinâmicos como modelo DEA-CCR, com o intuito de evitar problemas ligados aos retornos de escala do modelo DEA-BCC.

2. Referencial Teórico

2.1 Formulação do Modelo Suavizado

Para aproximar a fronteira suavizada à fronteira original, utiliza-se a diferença entre os seus comprimentos de arco. Como a fronteira original é composta por segmentos de reta, e como o segmento de reta apresenta o menor comprimento de arco entre dois pontos fixos, basta minimizar o comprimento de arco da fronteira suavizada, dado por L em (1), em que $\mathrm{Z(x)}$ é a equação da fronteira suavizada, e $\mathrm{x_1}$ e $\mathrm{x_2}$ são seus limites inferior e superior.

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (1)$$

Assim, a suavização consiste em procurar a função que minimize o comprimento do arco (ou sua generalização multidimensional, quando houver mais de duas variáveis). Para possibilitar o problema, restringe-se o universo das funções “candidatas” (aproximantes) a funções polinomiais, com grau previamente definido. A solução encontrada será assim um ótimo do conjunto considerado, e não um ótimo global (SOARES DE MELLO, 2002).

A função deve ainda obedecer às seguintes restrições: conter as DMUs eficientes e apresentar derivadas parciais de segunda ordem em todos os pontos. Quanto à primeira restrição, destaca-se que a nova fronteira não deve conter as DMUs fracamente eficientes, as quais estão na fronteira original, mas que são dominadas por outras DMUs. Entretanto, para evitar inviabilidades, a nova fronteira deve conter apenas as DMUs extremo-eficientes (Soares de Mello *et al.*, 2001).

Como duas funções distintas podem ter o mesmo comprimento de arco – como ocorre com uma simples translação ou por simetria em relação a dois pontos fixos – devem ser acrescentadas restrições adicionais ao problema de minimização de arco, de forma a evitar soluções indesejáveis. Assim, é acrescentada a restrição de convexidade para atender às características do modelo DEA BCC (2).

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2} \leq 0 \qquad (2)$$

Ao acrescentar (2) ao problema de suavização, obtém-se o Teorema da Inexistência de Solução Ótima, desenvolvido em Soares de Mello *et al.* (2002). Esse teorema indica que não existe um ótimo para a suavização da fronteira BCC, mas existem boas aproximações que respeitam as restrições.

Para o caso BCC com 1 *output* (Z) e 2 *inputs* (x e y), a formulação do problema de programação quadrática para a fronteira suavizada encontra-se em (3).

$$Min\left\{\int_{x_{min}}^{x_{max}}\int_{y_{min}}^{y_{max}}\left[1+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right]dy\,dx\right\} \qquad (3.1)$$

$$sujeito\,a$$

$$Z(x_{ef},y_{ef}) = Z_{ef},\ \forall DMU extremo-eficiente \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x_{max},y_{max}) \geq 0 \qquad (3.3) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}(x_{max},y_{max}) \geq 0 \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \leq 0,\ \forall x,y \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \leq 0,\ \forall x,y \qquad (3.6)$$

A função objetivo em (3.1) aproxima a fronteira suavizada à fronteira original. Cabe ressaltar que a função minimiza o *quadrado* do comprimento do arco, para facilitar o cálculo computacional, sem alterar o resultado. As restrições de igualdade em (3.2) garantem que a fronteira passe pelas DMUs extremo-eficientes. (3.3) e (3.4) garantem monotonicidade crescente em relação a ambos *inputs*, desde que garantida a convexidade da fronteira, conforme (3.5) e (3.6).

Dependendo do grau do polinômio, pode não ser possível garantir (3.5) e (3.6), tornando-se necessário impor restrições mais fortes, isto é, que todos os termos da função sejam convexos, a saber$d, f, g, h, i, j, \ldots \leq 0$.

Ressalte-se que o grau do polinômio Z é definido em função do número de DMUs extremo-eficientes do modelo DEA BCC, de modo que o número de coeficientes do polinômio (variáveis de liberdade) seja maior que o número de DMUs extremo-eficientes (restrições de igualdade), conforme Soares de Mello *et al.* (2004).

2.2 Vantagens e Limitações da Fronteira Suavizada

Soares de Mello (2002) afirma que o modelo de suavização foi desenvolvido para resolver o problema da indeterminação dos pesos. Assim, pode-se citar como primeira e grande vantagem a existência de multiplicadores únicos, em vez de um intervalo de variação como em Rosen *et al.* (1998), e com cálculo relativamente simples, diferente do modelo de Charnes *et al.* (1985). Além disso, cada DMU apresenta os multiplicadores mais apropriados às suas características, mesmo sendo valores únicos, e sem a necessidade de escolhas subjetivas sobre formulações agressivas ou benevolentes, ao contrário do modelo de avaliação cruzada de Doyle & Green (1995).

A suavização fornece uma variação gradual dos multiplicadores, ao contrário do método das médias ponderadas de Charnes *et al.* (1985), que encontra grandes variações para os multiplicadores, dadas pequenas alterações nas variáveis.Os rendimentos de escala também são graduais na suavização, ao contrário do BCC, que assume rendimentos constantes em cada face, mas com variações bruscas nos vértices, o que é pouco natural.

Soares de Mello *et al.* (2002) identificaram que a suavização facilita bastante o cálculo de alvos, em especial não radiais. Isso porque os modelos tradicionais de DEA consideram que a DMU atinge a fronteira eficiente mantendo *inputs* constantes e aumentando todos os *outputs* na mesma proporção (orientação a *output*), ou alternativamente congelando os *outputs* e reduzindo todos os *inputs* na mesma proporção (orientação a *input*). Entretanto, existem na realidade diversas outras formas mais naturais e mais simples de se atingir eficiência, mas utilizá-las nos modelos tradicionais torna o problema extremamente complicado. Assim, outra grande vantagem da fronteira suavizada é permitir o cálculo de alvos muito mais realistas, como o alvo euclidiano (aquele com a menor distância euclidiana à DMU ineficiente), o alvo de Tchebychev (aquele com a menor distância de Tchebyshev à DMU ineficiente), dentre outros, podendo incluir ainda restrições adicionais que incorporem preferências do decisor (Soares de Mello, 2002).

Outras vantagens podem ser identificadas como a existência de uma única fronteira eficiente, seja qual for a DMU analisada, ao contrário do modelo de supereficiência de Andersen & Petersen (1993).A suavização tampouco requer o desenvolvimento das equações da região a ser suavizada, apenas das suas coordenadas.

Soares de Mello (2002) também aponta para a vantagem de inexistir regiões fracamente eficientes na fronteira suavizada. Ao contrário do trabalho de González-Araya (2002), que também altera a fronteira para eliminar essas regiões, a suavização limita os valores de eficiência à unidade, bem como apresenta as DMUs mais eficientes com os maiores valores.

Os alvos em que DMUs ineficientes são projetadas representam uma diferença fundamental entre a suavização e outros modelos, como os tradicionais, o de González-Araya (2002), o de Andersen & Petersen (1993), etc. Ao contrário desses últimos, o alvo na suavização é uma DMU extremo-eficiente. Essa característica não é necessariamente uma desvantagem. Soares de Mello (2002) afirma que o aumento do número de DMUs extremo-eficientes torna a fronteira convencional mais próxima da suavizada, ressaltando que, no limite, a fronteira BCC tenderia a ser suave. Nessa situação, os alvos seriam todos DMUs extremo-eficientes.

Por outro lado, uma limitação real da suavização é a inexistência de fronteira ótima, conforme identificado no Teorema da Inexistência de Solução Ótima, apenas uma melhor fronteira dentre o conjunto de funções admitido.

Além disso, o modelo define novo conjunto de possibilidades de produção P (região de viabilidade das DMUs, delimitada pela fronteira eficiente). A diferença do novo conjunto P em relação ao BCC tradicional é dada pela região compreendida entre as duas fronteiras. Vale ressaltar que redefinições como essas são comuns em DEA, como ocorreu ao passar do CCR para o BCC e, em seguida, para o FDH (*Free Disposal Hull* – DEPRINS *et al.*, 1984). Entretanto, nos casos anteriores, restringia-se o conjunto P, gerando aumento das eficiências das DMUs. A suavização amplia o conjunto e assim diminui (ou mantém) o valor das eficiências.

Essa característica pode ser indicada como uma limitação, ao considerar o "postulado de extrapolação mínima" de Banker *et al.* (1984), que estabelece que o conjunto de possibilidades de produção estimado por um modelo DEA deve ser o menor conjunto que atenda aos postulados assumidos. Em outras palavras, o índice de eficiência deve ser o mais favorável que as restrições permitem (Charnes*et al.*, 1978). Entretanto, vale lembrar que a introdução de restrições aos multiplicadores nos modelos tradicionais já implicava em relaxar o postulado de extrapolação mínima (Lang*et al.*, 1995).

3. Aprimoramentos Na Fronteira Suavizada

3.1 Eficiência por *Default*

Um dos motivos que levam ao uso do CCR mesmo quando não há proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*, é a baixa capacidade discriminatória do BCC, parcialmente justificada pelas DMUs eficientes por *default* do modelo. Pode-se utilizar a suavização da fronteira BCC para tratar esse problema, através do relaxamento das restrições de igualdade (3.2) nesses pontos. Assim, a nova fronteira pode passar por pontos de maior eficiência que as DMUs eficientes por *default*, mas sendo mantida a obrigação de conter as demais DMUs eficientes no BCC. Dessa maneira, as DMUs eficientes por *default* no BCC podem ter eficiência de 100% ou menos no novo modelo.

Entretanto, pode haver uma DMU muito próxima da DMU eficiente por *default* que só não terá sua eficiência questionada por causa da existência desta última, mas que, caso contrário, seria ela própria eficiente por *default*. Para evitar essa situação indesejável, devem ser relaxadas as restrições de igualdade das DMUs "menores" que a menor DMU eficiente no CCR ou "maiores" que a maior DMU eficiente no CCR. Diz-se então que o conceito eficiência por *default* foi ampliado.

Uma DMU é, nesse momento, definida como "menor" que outra, caso apresente pelo menos um input menor; e será considerada "maior" caso apresente pelo menos um output maior. Essa definição deve-se à característica da eficiência por *default*, isto é, eficiência máxima para toda DMU que apresentar o menor *input*x_i $(\forall i)$ ou o maior *output*z_j $(\forall j)$.

Propõe-se ainda um índice de eficiência por *default*, calculado como em (4), que indica a parcela da eficiência da DMU no BCC tradicional que é consequência das eficiências por *default*. Esse índice será grande para DMUs indevidamente privilegiadas pelo BCC tradicional, e pequeno para aquelas cuja eficiência no modelo suavizado se aproxima à eficiência no modelo tradicional.

$$\%\text{Eficiência}_{\text{default}} = \frac{\%\text{Eficiência}_{\text{BCC}} - \%\text{Eficiência}_{\text{suavizada}}}{\%\text{Eficiência}_{\text{BCC}}} \quad (4)$$

3.2 Existência do Alvo

Ao suavizar a fronteira e, portanto, alterar o seu formato, surge a preocupação de que DMUs podem estar sendo projetadas em regiões com *input* negativo, isto é, numa situação impossível de consumo negativo de recursos. Essa preocupação existia mesmo ao suavizar a fronteira incluindo todas as DMUs eficientes, uma vez que não se tinha controle da fronteira na região de DMUs menores que a menor DMU eficiente no BCC – não havia restrições para essa região. Entretanto, a mesma se torna consideravelmente mais relevante ao implementar as propostas do presente, uma vez que o controle é perdido para toda a região de DMUs menores que a menor DMU eficiente no CCR.

Ressalte-se que essa preocupação é válida apenas para a orientação a *input*, quando os *inputs* das DMUs ineficientes serão reduzidos até atingir a fronteira, podendo tornar-se negativos. No caso de orientação a *output*, os *outputs* das DMUs serão *aumentados* até atingir a fronteira eficiente, mantendo-se os *inputs* constantes. Como os *outputs* originais das DMUs são positivos, os alvos calculados com orientação a *output* nunca terão valores negativos.

Para evitar alvos com *inputs* negativos, doravante denominados alvos inexistentes, deve-se incluir restrição que garanta que os *inputs* na fronteira sejam não negativos para quaisquer valores de *outputs*. Como os *inputs* na fronteira crescem com os *outputs* – devido às restrições (3.3) a (3.6) do problema de suavização –, basta garantir *inputs* não negativos no ponto da fronteira com os menores valores dos *outputs*. Isso será visto adiante.

3.2.1 *Output* Único e Múltiplos *Inputs*

Para o caso de n *inputs* x_i $(i = 1,2, \dots, n)$ e um *output* z, a fronteira com equação de grau g será:

$z_g = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a + \sum_k a_k x_1^{ci_{1k}} x_2^{ci_{2k}} \dots x_n^{ci_{nk}}\ \forall ci_{ik}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} ci_{ik} \leq g$, que pode ser reescrita como:

$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a + f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sendo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função sem termo independente de x_i. Então, pode-se afirmar (5).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \text{ se } x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Sendo $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) - a$, então: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Como $\frac{\partial F}{\partial x_i} \geq 0$ (restrição presente no modelo) e, portanto, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$, então se pode afirmar (6).

$$f(x_{1A}, x_{2A}, \dots, x_{nA}) \geq f(x_{1B}, x_{2B}, \dots, x_{nB}) \text{ sempre que } x_{iA} \geq x_{iB}, \forall i = 1 \dots n \quad (6)$$

De (5) e (6), obtém-se (7).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \text{ se } x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Considerando (7), garante-se que a projeção de toda DMU tenha *inputs* $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ (objetivo inicial), através de (8).

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a + f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq a \quad (8)$$

Basta incluir a restrição para $z = z_{min}$, como em (9), que todos os outros valores de z estarão obedecendo à restrição (8).

$$z_{min} \geq a \tag{9}$$

3.2.2 *Input* Único e Múltiplos *Outputs*

O modelo de suavização para o caso múltiplos *outputs* e *input* único é análogo ao apresentado em (3) e pode ser encontrado em Nacif *et al.* (2009). Com m*outputs* z_j $(j = 1,2,\ldots,m)$ e um *input* x, a fronteira com equação de grau g será:

$$x_g = H(z_1, z_2, \ldots, z_m) = b + \sum_k b_k z_1^{co_{1k}} z_2^{co_{2k}} \ldots z_m^{co_{mk}} \; \forall cjk \text{ tal que } \sum_{j=1}^{m} co_{jk} \leq g$$

Para $x = H(z_1, z_2, \ldots, z_m) \geq 0$, sempre no intervalo, basta garantir $x_{min} \geq 0$.

Sendo $\frac{\partial H}{\partial z_j} \geq 0, \forall j = 1,2,\ldots,m$(restrição do modelo) então:

$H(z_{1A}, z_{2A}, \ldots, z_{mA}) \geq H(z_{1B}, z_{2B}, \ldots, z_{mB})$ sempre que $z_{jA} \geq z_{jB}, \; \forall j = 1,\ldots,m$.

Assim, $x = H(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ será mínimo para $z_j = z_{jmin}$, sendo $z_{jmin} \leq z_j, \; \forall j = 1,2,\ldots,m$. Portanto, basta garantir que o input associado à DMU com os menores outputs seja maior ou igual a zero, como em (10).

$$H(z_{1\,min}, z_{2\,min}, \ldots, z_{mmin}) \geq 0 \tag{10}$$

De fato, não é possível garantir que exista uma DMU com todos os *outputs* mínimos, mas tal DMU pode ser criada, como em (10). Essa restrição é mais forte do que o necessário para garantir a existência de todos os alvos, mas a mesma se torna interessante por questões de simplicidade. A alternativa seria acrescentar uma restrição para toda e cada DMU com o menor output $z_j, \forall j = 1,2,\ldots,m$.

3.3 Formalização do Modelo de Suavização

3.3.1 *Output* Único e Múltiplos *Inputs*

O modelo de suavização que incorpora as propostas apresentadas nas seções 2.1 e 2.2, para casos com *output* único e múltiplos *inputs* é apresentado em (11).

$$min\left\{\int_{x_{1\,min}}^{x_{1\,max}} \ldots \int_{x_{nmin}}^{x_{nmax}} \left[1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\right] dx_n \ldots dx_1\right\} \quad (11.1)$$

$$sujeito a$$

$$F(x_{1\,efi} \ldots x_{nefi}) \geq z_{efi} \forall DMU eficiente por default \quad (11.2)$$

$$F(x_{1\,efi} \ldots x_{nefi}) = z_{efi} \forall demais DMUs BCC eficientes \quad (11.3) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_{1\,max}, \ldots, x_{nmax}) \geq 0, \; \forall i = 1,\ldots,n \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial {x_i}^2} \leq 0, \; \forall i = 1,\ldots,n \quad (11.5)$$

$$z_{min} \geq a \quad (11.6)$$

A função objetivo em (11.1) minimiza o quadrado do comprimento de arco da fronteira. O conjunto de equações em (11.2) garante que a fronteira contenha,ou seja mais eficiente que, todas as DMUs BCC eficientes por *default*. Vale lembrar que o conceito de eficiência por *default* foi ampliado para incluir todas as DMUs eficientes apenas no BCC "menores" que a menor DMU eficiente no CCR, bem como todas as DMUs eficientes apenas no BCC "maiores" que a maior DMU eficiente no CCR. As demais DMUs Pareto eficientes no BCC deverão estar contidas na fronteira, conforme equações (11.3). Aqui também pode ser necessário impor restrição mais forte que em (11.5), impondo convexidade aos termos polinomiais. A restrição (11.6) garante que todas as projeções sejam existentes.

O cálculo da eficiência nesse modelo segue os conceitos de DEA tradicional. Com orientação a *output*, a eficiência é a divisão entre o valor do *output* da DMUo (isto é, z_o) e o valor do *output* projetado (isto é, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$), como em (12).

$$Ef_{output} = \frac{z_o}{F(x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{no})} \qquad (12)$$

Com orientação a *input*, a eficiência é o fator α, com ($0 < \alpha \leq 1$), que multiplica todos os *inputs* da DMUo até atingir a fronteira, ou seja, $z_o = F(\alpha x_{1o}, \alpha x_{2o}, \dots, \alpha x_{no})$.

3.3.2 *Input* Único e Múltiplos *Outputs*

De modo semelhante, o modelo de suavização com as novas propostas, para casos com *input* único e múltiplos *outputs* é apresentado em (13), análogo a (12).

$$min\left\{\int_{z_{1\,min}}^{z_{1\,max}} \dots \int_{z_{mmin}}^{z_{mmax}} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial H}{\partial z_j}\right)^2 dz_m \dots dz_1\right\} \qquad (13.1)$$

$$sujeitoa$$

$$H(z_{1\,efi} \dots z_{nefi}) \leq x_{efi} \forall DMUeficientepordefault \qquad (13.2)$$

$$H(z_{1\,efi} \dots z_{nefi}) = x_{efi} \forall demaisDMUsBCCeficientes \qquad (13.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_j}(z_{1\,min}, \dots, z_{mmin}) \geq 0, \ \forall j = 1 \dots m \qquad (13.4) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial {z_j}^2} \leq 0, \ \forall j = 1, \dots, m \qquad (13.5)$$

$$H(z_{1\,min}, z_{2\,min}, \dots, z_{mmin}) \geq 0 \qquad (13.6)$$

O valor da eficiência com orientação a *input* deve ser a divisão entre o valor do *input* projetado (isto é, $H(z_{1o}, z_{2o}, \dots, z_{mo})$) e o valor do *input* da DMUo (x_o), como em (14).

$$Ef_{input} = \frac{H(z_{1o}, z_{2o}, \dots, z_{mo})}{x_o} \qquad (14)$$

Com orientação a *output*, a eficiência é o inverso do fator α ($\alpha \geq 1$), que multiplica todos os *outputs* da DMUo até atingir a fronteira, ou seja, $x_o = H(\alpha z_{1o}, \alpha z_{2o}, \dots, \alpha z_{mo})$.

4. Exemplo Numérico

Para exemplificar o método, pode-se utilizar o exemplo numérico de Gomes *et al.* (2004). A tabela 1 apresenta os valores de *inputs* e *outputs* para o exemplo, bem como os valores de eficiência nos modelos DEA tradicionais BCC e CCR, calculados com orientação a *input* e a *output*, através do software SIAD (Angulo Meza et al., 2005). Vale ressaltar que o CCR obrigatoriamente apresenta os mesmos valores de eficiência para todas as DMUs, em ambas as orientações.

DMUs	Input 1	Input 2	Output	Eficiência BCC Output	Eficiência BCC Input	Eficiência CCR
A	1	1	18.5	100%	100%	100%
B	2	5	26.0	100%	100%	70%
C	3	4	33.5	100%	100%	60%
D	4	1	22.0	100%	100%	100%
E	5	3	25.0	84%	59%	40%

Tabela 1 – Valores de *Inputs*, *Outputs* e Eficiências nos modelos DEA tradicionais para o exemplo numérico

Com 2 *inputs* e um *output*, as 4 DMUs BCC eficientes exigem polinômio de grau 2, da forma $Z = F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$, resultando no problema de suavização

(15).

$$min\left\{\int_1^5\int_1^5 [1+(b+2dx+ey)^2+(c+ex+2fy)^2]\,dydx\right\}$$
$$sujeitoa$$
$$a+b(1)+c(1)+d(1)^2+e(1)(1)+f(1)^2=18.5$$
$$a+b(2)+c(5)+d(2)^2+e(2)(5)+f(5)^2\geq 26$$
$$a+b(3)+c(4)+d(3)^2+e(3)(4)+f(4)^2\geq 33.5 \qquad (15)$$
$$a+b(4)+c(1)+d(4)^2+e(4)(1)+f(1)^2=22$$
$$b+2d(5)+e(5)\geq 0$$
$$c+e(5)+2f(5)\geq 0$$
$$d,f\leq 0$$
$$a\leq 18.5$$

Vale notar que as DMUs B e C podem ser eficientes por *default* no BCC tradicional por serem ineficientes no modelo CCR e apresentarem *outputs* maiores que a DMU D – a maior DMU eficiente no CCR. Por isso, as restrições referentes a ambas foram relaxadas.

Os resultados da suavização, calculados como exposto na seção 2, com orientação a *output* e a *input* são apresentados na tabela 2. Ressalte-se que o polinômio da fronteira suavizada resultou aproximadamente em:$Z=F(x,y)=9.74+2.22x+7.42y-0.20x^2-0.04xy-0.64y^2$.

	Dados			Orientação a Output			Orientação a Input		
DMUs	Input 1	Input 2	Output	Output suavizado	Eficiência Suavizada	Eficiência por Default	Input 1 suavizado	Input 2 suavizado	Eficiência (alfa)
A	1	1	18.5	18.5	100%	0%	1.00	1.00	100%
B	2	5	26.0	34.0	76.5%	24%	0.98	2.46	49%
C	3	4	33.5	33.5	100%	0%	3.00	4.00	100%
D	4	1	22.0	22.0	100%	0%	4.00	1.00	100%
E	5	3	25.0	31.7	78.9%	6%	2.84	1.70	57%

Tabela 2 – Dados e resultados no modelo suavizado, com orientação a output e a input.

Da mesma forma que no modelo BCC tradicional, as eficiências suavizadas são diferentes, a depender da orientação utilizada, exceto para as DMUs na fronteira. Conforme esperado, a suavização resulta em eficiências menores ou iguais ao modelo BCC tradicional.

O resultado demonstra que a DMU B é eficiente por *default* no modelo BCC tradicional, por apresentar o maior *output*, sendo considerada eficiente de forma “indevida”. Mais precisamente, 24% de sua eficiência se deve a essa distorção. Isso afeta toda a região de grandes *outputs*, inclusive a DMU E, que também é indevidamente beneficiada. Apesar de não ser considerada eficiente no modelo tradicional, 6% da eficiência da DMU E no modelo BCC tradicional é devida a essa distorção na fronteira pelo *default*.

No outro extremo, a DMU A, que apresenta os menores *inputs*, não pode ser considerada eficiente por *default*, sendo inclusive eficiente no CCR. Ademais, a DMU C, apesar de menos eficiente que a DMU B no CCR, é considerada eficiente no modelo BCC suavizado. Isso significa que a mesma não sofre influência da distorção na fronteira pelo *default* do BCC, e que essa não é a justificativa para a diferença entre os valores de eficiência dos modelos BCC e

CCR tradicionais. A interpretação correta é que a DMU C está numa região retornos de escala ineficiente, segundo o modelo CCR, mas apresenta gestão eficiente, segundo o modelo BCC. Por conta do resultado suavizado, sabe-se que sua gestão é "verdadeiramente" eficiente, pois o julgamento não é influenciado pela distorção do*default* no BCC tradicional.

A interpretação dos alvos das DMUs é equivalente à tradicional. Para se tornar eficiente, a DMU B precisa produzir 34 unidades de *output*, mantendo os mesmos *inputs*, ou utilizar 0,98 unidade do *input* 1 e 2,46 do *input* 2, mantendo o mesmo *output*. Já a DMU E precisa produzir 31,7 unidades de *outputs*, mantendo os mesmos *inputs*, ou utilizar 2.84 do *input* 1, e 1.7 do *input* 2, mantendo o mesmo *output*, para se tornar eficiente. Soluções intermediárias, em quese aumentam os *outputs* e reduzem-se os inputs não somente são possíveis com a suavização, porém mais facilmente calculadas, conforme identificado por Soares de Mello (2002).

5. Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi propor aprimoramentos aos modelos da Teoria da Suavização em DEA BCC desenvolvida em Soares de Mello (2002), Soares de Mello *et al*. (2001, 2002, 2004), Nacif (2005) e Nacif *et al.* (2009). A suavização substitui a fronteira DEA original (linear por partes) por outra suavizada (com derivadas contínuas), a fim de obter multiplicadores únicos para toda a fronteira e eliminar regiões fracamente eficientes.

Através da suavização, o presente propõe tratamento para as DMUs eficientes por *default*, isto é, aquelas consideradas eficientes no modelo BCC, por apresentarem o menor de um dos *inputs* ou o maior de um dos *outputs*. Esse conceito é ampliado neste trabalho para incluir todas as DMUs eficientes no BCC menores que a menor eficiente no CCR, e aquelas eficientes no BCC maiores que a maior eficiente no CCR. Calcula-se ainda um índice para identificar, para cada DMU, o quanto da eficiência tradicionalmente calculada pelo BCC é decorrente da distorção da fronteira pelo *default* do modelo.

O presente também propõe solução para garantir que todos os alvos de DMUs sejam existentes, isto é, não apresentem *inputs* negativos. Essa situação poderia ocorrer nos modelos anteriores de suavização, porém a mesma se torna muito mais provável ao relaxar as restrições relacionadas às DMUs eficientes por *default*, conforme proposto neste trabalho.

Por fim, analisa-se um exemplo numérico, proposto por Gomes *et al.* (2004), com o intuito de ilustrar o modelo de suavização proposto pelo presente, bem como apresentar maneiras de se interpretar alguns resultados.

Estudos futuros podem propor aprimoramentos semelhantes ao modelo com múltiplos *inputs* e *outputs* de Nacif *et al.* (2009). Outra oportunidade de estudo é a suavização para o modelo CCR, desenvolvido em Soares de Mello (2002) e Soares de Mello *et al.* (2002), mas não pelos demais estudos de suavização ou pelo presente.

6. Agradecimentos

Ao CNPq e à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências

Andersen, P., Petersen, N.C.(1993), A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis, Management Science, 39, 1261-1264.

Angulo Meza, L., Biondi Neto, L., Soares de Mello, J. C. C. B., Gomes, E. G.(2005), ISYDS – Integrated System for Decision Support (SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão): A software package for Data Envelopment Analysis model, Pesquisa Operacional, 25, 493-503.

Appa, G., Yue, M.(1999), On Setting Scale Efficient Targets in DEA, Journal of the Operational Research Society, 50, 60-69.

Avellar, J.V.G., Milioni, A.Z., Marchi, M.M., Pinto, M.J. (2004), Distribuição de Horas de Vôo no COMAER Utilizando um Modelo DEA de Fronteira Hiperbólica, Pesquisa Naval, 17, 45-50.

Avellar, J.V.G., Milioni, A.Z., Rabello, T.N. (2005), Modelos DEA com Variáveis Limitadas ou Soma Constante, Pesquisa Operacional, 25, 135-150.

Avellar, J.V.G., Milioni, A.Z., Rabello, T.N.(2007), Spherical Frontier DEA Model based on a Constant Sum of Inputs, Journal of the Operational Research Society, 58, 1246-1251.

Bana e Costa, C.A., Ferreira, F.C, Chagas, M.P., Appa, G(2002), Metodologia de análise de desempenho operacional de concessionárias de distribuição de energia elétrica, Relatório Final, Fundação Padre Manuel França, PUC, Rio de Janeiro.

Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984) Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, Management Science, 30, 1078-1092.

Castro, P.G.S.A.(2012), Performance Measurement in Portuguese Public Hospitals: Combining Data Envelopment Analysis, Dynamic Clustering And Multiple Criteria Decision Analysis Methods To Analyze Hospital Efficiency And Quality, Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B.E., Seiford, L., Stutz, J. (1985), Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions, Journal of Econometrics, 30, 91-107.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.(1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, European Journal of Operational Research, 2, 429-444.

Coelli, T., R.A.O., D.S.P., Battese, G.E., (1998), An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis, Boston, Kluwer Academic Publishers.

Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K.(2000), Data Envelopment Analysis – A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Boston, Kluwer Academic Publishers.

Deprins, D., Simar, L., Tulkens, H.(1984), Measuring Labour Efficiency in Post Offices, In: Marchand, M., Petiseau, P., & Tulkens, H. (eds.) The Performance of Public Enterprises, Amsterdam, North-Holland.

Doyle, J.R., Green, R.H.(1995), Cross-Evaluation in DEA: Improving Discrimination Among DMU's, INFOR, 33, 205-222.

Farlow, S.J. (1993), Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Mir Publishers, Moscow.

Ferreira, F.C. (2003), Regulação Econômica, Fronteira Eficiente e Clusters Dinâmicos: Desenvolvimento e Aplicação para o Cálculo do Fator X, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 137 p.

Gomes, E.G., Abreu, U.G.P., Soares de Mello, J.C.C.B., Carvalho, T.B., Zen, S. (2012), DEA performance evaluation of livestock systems in Brazil. In: V. Charles; M. Kumar. (Org.). Data Envelopment Analysis and Its Applications to Management. 1ed.Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 224-238.

Gomes, E.G., Avellar, J.V.G. (2005), Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Variáveis de Soma Constante: Teoria e Aplicação, Pesquisa Naval, 18, 99-104.

Gomes, E.G., Lins, M.P.E. (2008), Modelling Undesirable Outputs with Zero Sum Gains Data Envelopment Analysis Models, Journal of the Operational Research Society, 59, 616-623.

Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E. (2004),Redistribuição de Inputs e Outputs em Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero, Pesquisa Operacional, 24, 269-284.

Gonzalez-Araya, M.C.(2003), Projeções Não Radiais em regiões fortemente eficientes da fronteira DEA - Algoritmos e aplicações, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Kozyreff Filho, E., Milioni, A.Z. (2004), Um Método para Estimativa de Metas DEA, Produção, 14, 90-101.

Lang, P., Yolalan, O.R., Kettani, O. (1995), Controlled Envelopment by Face Extension in DEA, Journal of the Operational Research Society, 46, 473-491.

Lins, M.P.E., Angulo Meza, L. (2000**)**, Análise Envoltória de Dados e Perspectivas de Integração no Ambiente de Apoio à Decisão, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Lins, M.P.E., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Soares De Mello, A.J.R. (2003), Olympic Ranking Based on a Zero Sum Gains DEA Model, European Journal of Operational Research, 148, 85-95.

Milioni, A. Z., Avellar, J.V.G., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. (2011), An Ellipsoidal Frontier Model: allocating input via parametric DEA, European Journal of Operational Research, 209, 113-121.
Nacif, F.B. (2005), Suavização da Fronteira DEA: Modelo Geral BCC N-Dimensional, Dissertação de Mestrado, UFF, Niterói.
Nacif, F.B., Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, L. (2009), Choosing Weights in Optimal Solutions for DEA-BCC Models by means of a N-dimensional Smooth Frontier, Pesquisa Operacional, 29, 623-642.
Po, R., Guh, Y., Yang, M. (2009), A new clustering approach using data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 199, 276-284.
Rosen, D., Schaffnit, C., Parado, J. (1998), Marginal Rates and Two-dimensional Level Curves in DEA, Journal of Productivity Analysis, 9, 202-232.
Silveira, J.Q. (2011), Alocação Eficiente de Recursos: Um Modelo DEA Paramétrico com Retornos Variáveis de Escala, Dissertação de Mestrado, UFF, Niterói.
Silveira, J.Q., Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, L.(2011) Fronteira parabólica baseada na soma constante de inputs: Um estudo de ecoeficiência. Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Ubatuba, Anais.
Soares de Mello, J.C.C.B. (2002), Suavização da Fronteira DEA com o uso de Métodos Variacionais, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, L., Silveira, J.Q., Gomes, E.G.(2013), About Negative Efficiencies in Cross Evaluation BCC Input Oriented Models, European Journal of Operational Research, 229, 732-737.
Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi Neto, L., Lins, M. P. (2004), Suavização da Fronteira DEA: O Caso BCC Tridimensional, Investigação Operacional, 24, 89-107.
Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E., Gomes, E.G.(2001), Estimativa de Planos Tangentes à Fronteira DEA em DMUs Extremo-Eficientes, Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – SBPO, Campos do Jordão, SP, Brasil, Novembro.
Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E, Gomes, E.G. (2002), Construction of a Smoothed DEA Frontier, Pesquisa Operacional, 22, 183-201.