

A Complexidade do Problema do Corte Máximo para Grafos Fortemente Cordais

Rubens Sucupira¹

Luerbio Faria¹

Sulamita Klein²

1- IME/UERJ

UERJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil

rasucupira@oi.com.br, luerbio@cos.ufrj.br

2 - Instituto de Matemática e COPPE/Sistemas

UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil

sula@cos.ufrj.br

Resumo

Em 1985, David Johnson apresentou no Journal of Algorithms uma coluna listando alguns problemas envolvendo grafos e suas complexidades restritas a certas classes de grafos. Muitos desses problemas permanecem em aberto. O problema SIMPLE MAX CUT foi um dos problemas listados na coluna Johnson como problema aberto para grafos cordais e fortemente cordais. Em 1999, Bodlaender e Jansen provaram que SIMPLE MAX CUT é NP-completo para grafos cordais. Nesse artigo provamos que SIMPLE MAX CUT é NP-completo para grafos fortemente cordais.

Palavras-Chave: simple max-cut, grafos fortemente cordais, np-completo.

Abstract

In 1985, David Johnson presented in the Journal of Algorithms a column listing some problems involving graphs and its complexity restricted for special graph classes. Many of these problems still remain open. The SIMPLE MAX CUT PROBLEM was one of the problems listed in Johnson's column as an open problem for chordal and strongly chordal graph classes. In 1999, Bodlaender and Jansen proved that the SIMPLE MAX CUT PROBLEM is NP-complete for chordal graphs. In this paper we solve the open problem of Johnson's column establishing that SIMPLE MAX CUT is NP-complete for strongly chordal graphs.

Keywords: simple max-cut, strongly chordal graphs, np-complete.

1 Introdução

O problema MAX P -CUT é um problema combinatório sobre grafos, que pode ser formulado como problema de decisão no qual são dados como entrada um grafo simples $G = (V, E)$ com pesos nas arestas e um inteiro positivo k . A pergunta a ser respondida é se existe uma partição do conjunto V dos vértices de G no máximo em P subconjuntos disjuntos chamados de partes dessa partição tais que a soma dos pesos das arestas que possuem extremos em partes diferentes é pelo menos k . No caso $P = 2$, o problema MAXIMUM 2-CUT é o mesmo que o problema MAX CUT anteriormente citado. Consideramos o problema SIMPLE MAX CUT que é uma variação de MAX CUT na qual todas as arestas têm peso um.

O problema SIMPLE MAX CUT tem várias aplicações que podemos encontrar em Barahona et al (1988), Chang e Du (1987), Chen et al (1983) e Pinter (1982), como por exemplo em design de circuitos, telefonia móvel e física estatística.

Em 1985, David Johnson publicou no Journal of Algorithms alguns problemas importantes restritos a determinadas classes de grafos, colocando-os como problemas desafiadores. Entre essas classes estavam os grafos Cordais e Fortemente Cordais. A seguir reproduzimos as duas linhas da coluna Johnson correspondentes a essas classes:

| | CHRDOM | HAMCIR | DOMSET | MAX CUT | STTREE | GRAISO |
|------------------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|
| Chordal | O | N | N | O | N | I |
| Strongly Chordal | O | O | P | O | P | O |

KEY TO THE ABBREVIATIONS. P = "Polynomial-time solvable.", N = "NP-complete.", I = "Open, but equivalent in complexity to general GRAPH ISOMORPHISM", O = "Open."

Em 1999, Bodlaender e Jansen usaram o problema NP-completo MAX2SAT para provar que SIMPLE MAX CUT é NP-completo para grafos cordais. A partir de uma instância $((X, C), k)$ de MAX2SAT, na qual X é um conjunto de variáveis, C é uma coleção de cláusulas de tamanho 2, e k é um inteiro positivo, produziram, em tempo polinomial, uma instância (G', k') de SIMPLE MAX CUT na qual G' é um grafo cordal e k' é um inteiro positivo tais que existe uma atribuição de valores lógicos para os elementos de X satisfazendo pelo menos k cláusulas de C se, e somente se, existe uma partição (V_1, V_2) de V com pelo menos k' arestas com um extremo em V_1 e o outro em V_2 . Nesse artigo provamos que o grafo G' que compõe a instância de SIMPLE MAX CUT é fortemente cordal. Para tal, exibimos um esquema de eliminação forte de G' , resolvendo assim um problema em aberto da coluna Johnson e estabelecendo que SIMPLE MAX CUT é NP-completo para grafos fortemente cordais.

2 Preliminares

Um grafo é *cordal* se todo ciclo de comprimento maior que três possui uma *corda*, ou seja, uma aresta unindo dois vértices que não são adjacentes no ciclo. Alternativamente podemos dizer que um grafo é cordal se, e somente se, existe uma árvore $T = (W, F)$ tal que pode-se associar a cada vértice $v \in V$, uma subárvore $T_v = (W_v, E_v)$ de T , tal que $(v, w) \in E$ se, e somente se, $W_v \cap W_w \neq \emptyset$. Isto equivale a dizer que todas as cliques maximais de G podem ser arrumadas em uma árvore T , tal que para todo vértice v , as cliques que contém v formam uma subárvore conexa de T .

Um grafo é *fortemente cordal* se é cordal e todo ciclo de comprimento par maior ou igual a seis tem uma *corda ímpar*, isto é, uma aresta que conecta dois vértices não adjacentes no ciclo que estão a uma distância ímpar um do outro sobre este ciclo.

Grafos fortemente cordais podem ser caracterizados através de subgrafos proibidos como os grafos que não possuem como subgrafo induzido um *n-sol*.

Um *n-sol* é um grafo cordal que possui um ciclo hamiltoniano $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$, $(n \geq 3)$ no qual cada x_i tem grau dois, isto é, o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ tais que cada vértice x_i em X tem exatamente dois vizinhos y_i e $y_{(i+1) \bmod n}$. É fácil ver que um sol não pode ser um grafo fortemente cordal pois o ciclo hamiltoniano presente nesse grafo não possui nenhuma corda ímpar.

Grafos fortemente cordais também podem ser caracterizados por possuírem um *esquema de eliminação forte*. Um *esquema de eliminação forte* de um grafo G é uma ordenação v_1, v_2, \dots, v_n dos vértices de $V(G)$ satisfazendo as duas condições seguintes para cada i, j, k, l em $\{1, 2, \dots, n\}$:

- (i) Se $i > j > k$ e $(v_i, v_k), (v_j, v_k) \in E(G)$ então $(v_i, v_j) \in E(G)$;
- (ii) Se $i > j > k > l$ e $(v_i, v_l), (v_j, v_l), (v_j, v_k) \in E(G)$ então $(v_i, v_k) \in E(G)$.

Com o objetivo de construir de modo simples um esquema de eliminação forte para um grafo G , introduzimos a seguinte definição. Um vértice x é *simples* se $N[y] \subset N[z]$ ou $N[z] \subset N[y]$ para quaisquer dois vértices $y, z \in N[x]$. Os dois teoremas seguintes, devidos a Farber (1983), definem uma condição necessária que possui um algoritmo de reconhecimento de tempo polinomial para grafos fortemente cordais.

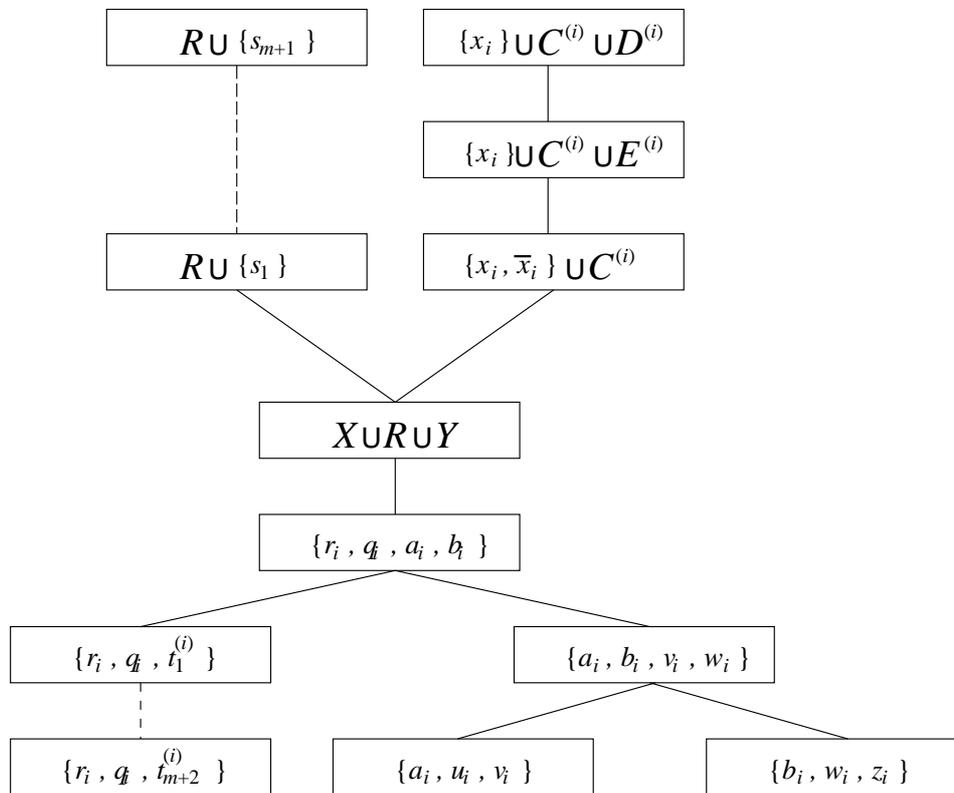


Figura 1: Árvore de cliques de G' .

Teorema 2.1. Se $G = (V, E)$ é fortemente cordal não trivial, então existem 2 vértices simples em G .

Teorema 2.2. Um grafo é fortemente cordal se, e somente se, possui um esquema de eliminação forte.

Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma partição de V em dois conjuntos disjuntos $V_1, V_2 \subset V$ tais que $V_1 \cup V_2 = V$, temos que uma aresta $(u, v) \in E$ com $u \in V_1$ e $v \in V_2$ é chamada *aresta de corte* da partição (V_1, V_2) . Mostramos que SIMPLE MAX CUT é NP-completo para grafos fortemente cordais usando o problema MAX 2-SAT.

SIMPLE MAX CUT PROBLEM

INSTÂNCIA: Um grafo simples $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

QUESTÃO: Existe um conjunto $S \subset V$, tal que o número de arestas com um extremo em S e o outro em $V \setminus S$ é maior ou igual a k ?

MAX 2-SAT PROBLEM

INSTÂNCIA: Um conjunto formado por p cláusulas disjuntivas, cada uma contendo no máximo dois literais e um inteiro $k \leq p$.

QUESTÃO: Existe uma atribuição lógica para os literais que satisfaça pelo menos k cláusulas?

Teorema 2.3. SIMPLE MAX CUT é NP-completo para grafos fortemente cordais.

Demonstração. O problema MAX CUT está em NP uma vez que pode-se verificar em tempo polinomial se existem k ou mais arestas de corte na partição $(S, V' \setminus S)$.

Bodlaender e Jansen apresentaram uma transformação polinomial de MAX 2-SAT em SIMPLE MAX CUT para grafos cordais utilizando a seguinte construção.

Seja $X = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ um conjunto de literais e $(a_1 \vee b_1), \dots, (a_p \vee b_p)$ um conjunto de cláusulas da instância de MAX 2-SAT, em que os literais a_i e b_j pertencem ao conjunto X .

Consideremos $m = 2p$. Vamos definir os seguintes conjuntos com o objetivo de construir o grafo $G' = (V', E')$ que compõe a instância de SIMPLE MAX CUT :

1. $C^{(i)} = \{c_1^{(i)}, \dots, c_{m+1}^{(i)}\}$, $D^{(i)} = \{d_1^{(i)}, \dots, d_{m+2}^{(i)}\}$, $E^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{m+2}^{(i)}\}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. $T^{(i)} = \{t_1^{(i)}, \dots, t_{m+2}^{(i)}\}$, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, e $R = \{r_1, \dots, r_p\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_p\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ e $S = \{s_1, \dots, s_{m+1}\}$.
3. $U = \{u_1, \dots, u_p\}$, $V = \{v_1, \dots, v_p\}$, $W = \{w_1, \dots, w_p\}$ e $Z = \{z_1, \dots, z_p\}$.

A seguir definimos o grafo $G' = (V', E')$ anteriormente citado e uma partição do conjunto de vértices V' em subconjuntos V_1 e V_2 na qual V_1 contem os literais com valor-verdade *falso* e V_2 contem os literais com valor-verdade *verdadeiro*. O conjunto de vértices V' é a união disjunta de todos os conjuntos mencionados anteriormente, isto é, $X, C^{(i)} (1 \leq i \leq n), D^{(i)} (1 \leq i \leq n), E^{(i)} (1 \leq i \leq n), S, R, Q, T^{(i)} (1 \leq i \leq p), U, V, W, Y, Z$. Existe uma aresta entre cada par de vértices de V' se, e somente se, ambos os vértices pertencerem a pelo menos um dos seguintes conjuntos, ou seja, cada um dos seguintes conjuntos forma uma clique em G' :

- para cada $i \in \{1, \dots, n\}$:
 - $\{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$,
 - $\{x_i\} \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$,
 - $\{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)}$;
- para cada $j \in \{1, \dots, m+1\}$, temos a clique $R \cup \{s_j\}$;
- $X \cup R \cup Y$;
- para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, e cada $j \in \{1, \dots, m+2\}$, temos a clique $\{r_i, q_i, t_j^{(i)}\}$;
- para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, se a i -ésima cláusula é $(a_i \vee b_i)$, então temos as cliques:
 - $\{a_i, b_i, r_i, q_i\}$,
 - $\{a_i, b_i, v_i, w_i\}$,
 - $\{a_i, u_i, v_i\}$,
 - $\{b_i, w_i, z_i\}$.

O grafo G' é cordal porque podemos colocar todas as cliques anteriormente definidas em uma árvore T , tal que todo vértice pertence a um conjunto de árvores que formam uma subárvore conexa de T . Veja a Figura 2. Mais do que isso, provaremos a seguir que G' é fortemente cordal, exibindo um esquema de eliminação forte para G' .

Bodlaender e Jansen (1999) provaram que existe uma atribuição de valores-verdade para a instância $I = (X, C)$ satisfazendo pelo menos k cláusulas de C se, e somente se, existe uma partição (V_1, V_2) com pelo menos $B + 2k$ arestas de corte, em que V_1 e V_2 são os conjuntos listados a seguir e $B = 2n \cdot (m+2)^2 + n \cdot (m+1) + (n+p)^2 + p \cdot (m+1) + 2p \cdot (m+2) + 6p$, $V_1 = R \cup Q \cup \{x_i, c_j^{(i)} \mid x_i \text{ é falsa}\} \cup \{\bar{x}_i, d_j^{(i)}, e_j^{(i)} \mid x_i \text{ é verdadeira}\} \cup \{u_i, z_i \mid a_i \text{ é falsa} \wedge b_i \text{ é falsa}\} \cup \{v_i, z_i \mid a_i \text{ é falsa} \wedge b_i \text{ é verdadeira}\} \cup \{u_i, w_i \mid a_i \text{ é verdadeira} \wedge b_i \text{ é falsa}\} \cup \{v_i, w_i \mid a_i \text{ é verdadeira} \wedge b_i \text{ é verdadeira}\}$, e $V_2 = V \setminus V_1$.

2.1 Esquema de eliminação forte de G'

A seguir descrevemos um esquema de eliminação forte considerando que em cada etapa uma sequência de conjuntos de vértices simples serão removidos do grafo original, definindo um novo grafo para a etapa seguinte. Observe que a cada etapa as vizinhanças dos vértices remanescentes no grafo são modificadas pela remoção dos vértices eliminados nas etapas anteriores.

1. Eliminando os vértices dos conjuntos $D^{(i)}$: Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, os vértices $d_j^{(i)}$ pertencem unicamente à clique $\{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$. Portanto temos $N[d_j^{(i)}] = \{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$. Com o objetivo de simplificar a notação, escrevemos $N[D^{(i)}] = \{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$ significando que para todo vértice $d_j^{(i)} \in D^{(i)}$, tem-se $N[d_j^{(i)}] = \{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$. Se $x_i = a_j$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ então $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup D^{(i)} \cup E^{(i)} \cup \{v_j, w_j, u_j, q_j\}$. Se $x_i = b_k$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ então $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup D^{(i)} \cup E^{(i)} \cup \{v_k, w_k, z_k, q_k\}$. Caso contrário, se x_i não é literal de nenhuma cláusula, então $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup D^{(i)} \cup E^{(i)}$. E $N[C^{(i)}] = \{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)} \cup E^{(i)}$. Portanto podemos ver que todos os vértices de $D^{(i)}$ são *simples* para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o que nos permite eliminá-los.
2. Eliminando os vértices dos conjuntos $E^{(i)}$: Analisamos os conjuntos $E^{(i)}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $N[E^{(i)}] = \{x_i\} \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$. Se $x_i = a_j$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ então $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup E^{(i)} \cup \{v_j, w_j, u_j, q_j\}$. Se $x_i = b_k$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ então $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup E^{(i)} \cup \{v_k, w_k, z_k, q_k\}$. Caso contrário, se x_i não é literal de nenhuma cláusula, então $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$. E $N[C^{(i)}] = \{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$. Novamente podemos ver que os vértices de $E^{(i)}$ são *simples*, o que nos permite eliminar todos os vértices de $E^{(i)}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. Eliminando os vértices do conjunto U : Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, temos $N[u_i] = \{u_i, a_i, v_i\}$, $N[v_i] = \{a_i, b_i, v_i, u_i, w_i\}$ e $N[a_i] = X \cup R \cup Y \cup \{q_i, u_i, v_i, w_i\}$. Concluimos que todos os vértices de U são *simples* e os eliminamos.
4. Eliminando os vértices do conjunto Z : Agora consideramos os vértices do conjunto Z . Temos $N[z_i] = \{b_i, w_i, z_i\}$, $N[b_i] = X \cup R \cup Y \cup \{v_i, w_i, z_i, q_i\}$ e $N[w_i] = \{a_i, b_i, v_i, w_i, z_i\}$. Então, todos os vértices de Z são *simples* e eliminamos os vértices de Z .
5. Eliminando os vértices do conjunto V : Veja que $N[v_i] = \{a_i, b_i, v_i, w_i\}$, $N[a_i] = N[b_i] = X \cup R \cup Y \cup \{v_i, w_i, q_i\}$ e $N[w_i] = \{a_i, b_i, v_i, w_i\}$. Logo concluimos que todos os vértices de V são *simples* e eliminamos todos os vértices de V .
6. Eliminando os vértices do conjunto W : Temos $N[w_i] = \{a_i, b_i, w_i\}$, $N[a_i] = N[b_i] = X \cup R \cup Y \cup \{q_i, w_i\}$. Desse modo todos os vértices de W são *simples* e vamos eliminar todos os vértices de W .

7. Eliminando os vértices dos conjuntos $T^{(i)}$: Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos ver que $N[t_j^{(i)}] = \{t_j^{(i)}, r_i, q_i\}$, $N[q_i] = \{r_i, q_i, a_i, b_i\} \cup T^{(i)}$ e $N[r_i] = \{q_i\} \cup T^{(i)} \cup R \cup X \cup Y \cup S$. Portanto, todo vértice de $T^{(i)}$ é simples, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, e eliminamos todos os vértices de $T^{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$.
8. Eliminando os vértices do conjunto Q : Temos $N[q_i] = \{r_i, q_i, a_i, b_i\}$, $N[r_i] = \{q_i\} \cup R \cup X \cup Y \cup S$ e $N[a_i] = N[b_i] = X \cup R \cup Y \cup \{q_i\}$. Consequentemente todos os vértices de Q são simples e eliminamos todos os vértices de Q .
9. Eliminando os vértices do conjunto S : Temos $N[s_i] = \{s_i\} \cup R$ e $N[r_j] = X \cup Y \cup R \cup S$. Portanto todos os vértices de S são simples e eliminamos todos os vértices de S .
10. Eliminando os vértices dos conjuntos $C^{(i)}$: Temos $N[C^{(i)}] = \{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)}$ e $N[x_i] = N[\bar{x}_i] = X \cup Y \cup R \cup C^{(i)}$. Portanto todos os vértices de $C^{(i)}$ são simples e eliminamos todos os vértices de $C^{(i)}$.
11. Eliminando os vértices do conjunto $R \cup X \cup Y$: Podemos ver que $N[R] = N[X] = N[Y] = X \cup Y \cup R$. Consequentemente todos esses três conjuntos são formados por vértices simples e eliminamos todos os vértices de $R \cup X \cup Y$.

Isso conclui o esquema de eliminação forte. \square

Na próxima seção descrevemos uma instância de SIMPLE MAX CUT obtida a partir da instância $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}, \{(x_1 \vee \bar{x}_2), (x_2 \vee \bar{x}_1)\})$ de MAX 2-SAT.

3 Um Exemplo

Considere $(x_1 \vee \bar{x}_2), (x_2 \vee \bar{x}_1)$ a instância de MAX 2-SAT formada por duas cláusulas em que os literais pertencem ao conjunto $X = \{x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}$. Nesse caso, temos $m = 2$ e a união dos conjuntos seguintes forma $V' = V(G')$.

1. $C^{(i)} = \{c_1^{(i)}, \dots, c_5^{(i)}\}$, $D^{(i)} = \{d_1^{(i)}, \dots, d_6^{(i)}\}$, $E^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_6^{(i)}\}$, para cada $i \in \{1, 2\}$.
2. $T^{(i)} = \{t_1^{(i)}, \dots, t_6^{(i)}\}$, para cada $i \in \{1, 2\}$, e $R = \{r_1, r_2\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ e $S = \{s_1, \dots, s_5\}$.
3. $U = \{u_1, u_2\}$, $V = \{v_1, v_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$ e $Z = \{z_1, z_2\}$.

A seguir apresentamos um esquema de eliminação forte para o grafo G' cujo conjunto de arestas E' é composto de modo que as cliques citadas na seção 1 são mantidas.

1. Eliminando $D^{(i)}$: Para cada $i \in \{1, 2\}$, os vértices $d_j^{(i)}$ pertencem unicamente à clique $\{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$. Temos então $N[D^{(i)}] = \{x_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)}$. Uma vez que $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup D^{(i)} \cup E^{(i)}$; e $N[C^{(i)}] = \{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)} \cup D^{(i)} \cup E^{(i)}$, todos os vértices de $D^{(i)}$ são *simples*. Portanto podemos eliminar todos os vértices de $D^{(i)}$, para cada $i \in \{1, 2\}$.
2. Eliminando $E^{(i)}$: Analisando os conjuntos $E^{(i)}$ para cada $i \in \{1, 2\}$, encontramos $N[E^{(i)}] = \{x_i\} \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$, $N[x_i] = X \cup R \cup Y \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$ e $N[C^{(i)}] = \{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)} \cup E^{(i)}$. Novamente todos os vértices de $E^{(i)}$ são simples, e podemos eliminá-los para cada $i \in \{1, 2\}$.

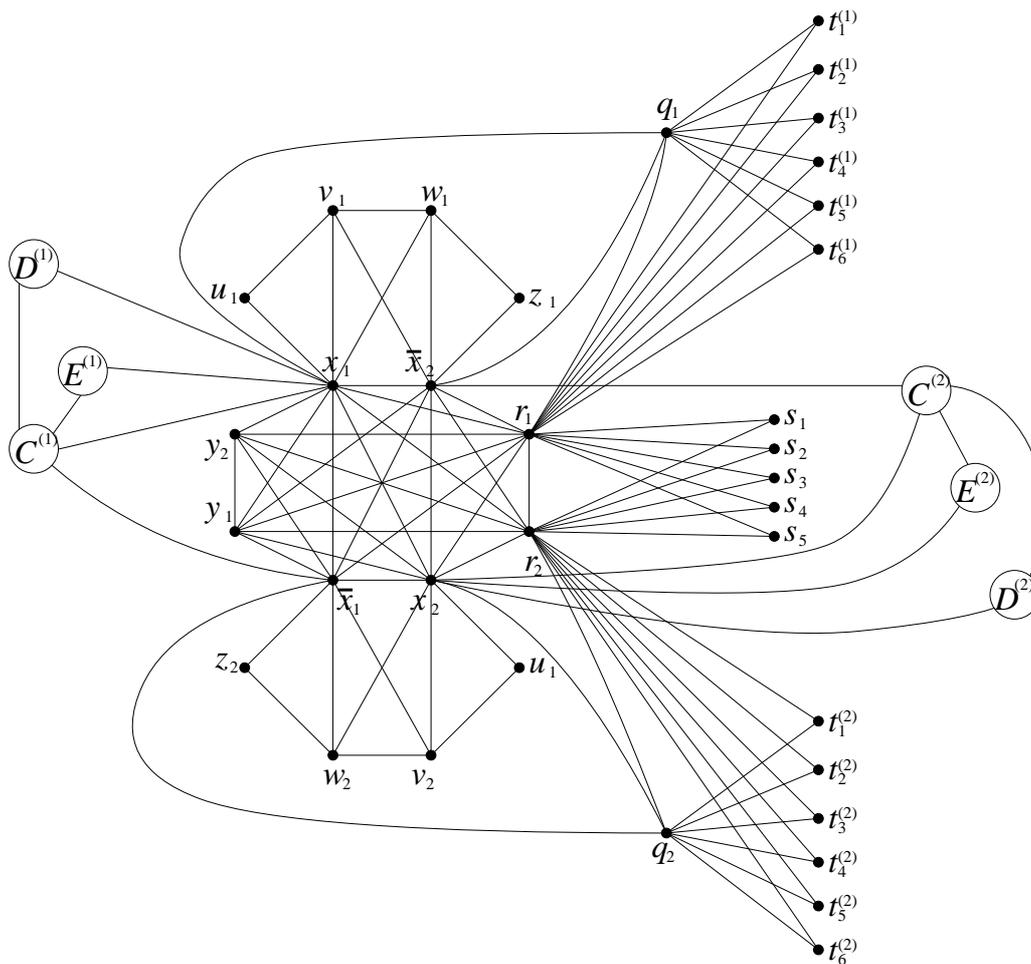


Figura 2: Grafo G' obtido a partir da instância $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}, \{(x_1 \vee \bar{x}_2), (x_2 \vee \bar{x}_1)\})$ de MAX 2-SAT.

3. Eliminando U : Para o vértice u_1 , temos $N[u_1] = \{u_1, x_1, v_1\}$, $N[v_1] = \{x_1, \bar{x}_2, v_1, u_1, w_1\}$ e $N[x_1] = X \cup R \cup Y \cup \{q_1, u_1, v_1, w_1\}$. E para u_2 temos $N[u_2] = \{u_2, x_2, v_2\}$, $N[x_2] = X \cup R \cup Y \cup \{q_2, u_2, v_2, w_2\}$, $N[v_2] = \{x_2, \bar{x}_1, v_2, u_2, w_2\}$. Concluímos que todos os vértices de U são simples e os eliminamos.
4. Eliminando Z : Temos $N[z_1] = \{\bar{x}_2, w_1, z_1\}$, $N[\bar{x}_2] = X \cup R \cup Y \cup \{v_1, w_1, z_1, q_1\}$ e $N[w_1] = \{x_1, \bar{x}_2, v_1, w_1, z_1\}$. Analogamente $N[z_2] = \{\bar{x}_1, w_2, z_2\}$, $N[\bar{x}_1] = X \cup R \cup Y \cup \{v_2, w_2, z_2, q_2\}$ e $N[w_2] = \{x_2, \bar{x}_1, v_2, w_2, z_2\}$. Então todos os vértices de Z são simples e os eliminamos.
5. Eliminando V : Temos $N[v_1] = \{x_1, \bar{x}_2, v_1, w_1\}$, $N[x_1] = N[\bar{x}_2] = X \cup R \cup Y \cup \{v_1, w_1, q_1\}$ e $N[w_1] = \{x_1, \bar{x}_2, v_1, w_1\}$. Do mesmo modo $N[v_2] = \{x_2, \bar{x}_1, v_2, w_2\}$, $N[x_2] = N[\bar{x}_1] = X \cup R \cup Y \cup \{v_2, w_2, q_2\}$ e $N[w_2] = \{x_2, \bar{x}_1, v_2, w_2\}$. Novamente todos os vértices de V são simples e os eliminamos.
6. Eliminando W : Temos $N[w_1] = \{x_1, \bar{x}_2, w_1\}$, $N[x_1] = N[\bar{x}_2] = X \cup R \cup Y \cup \{q_1, w_1\}$. Analogamente $N[w_2] = \{x_2, \bar{x}_1, w_2\}$, $N[x_2] = N[\bar{x}_1] = X \cup R \cup Y \cup \{q_2, w_2\}$. Assim os vértices de W são simples e os eliminamos.

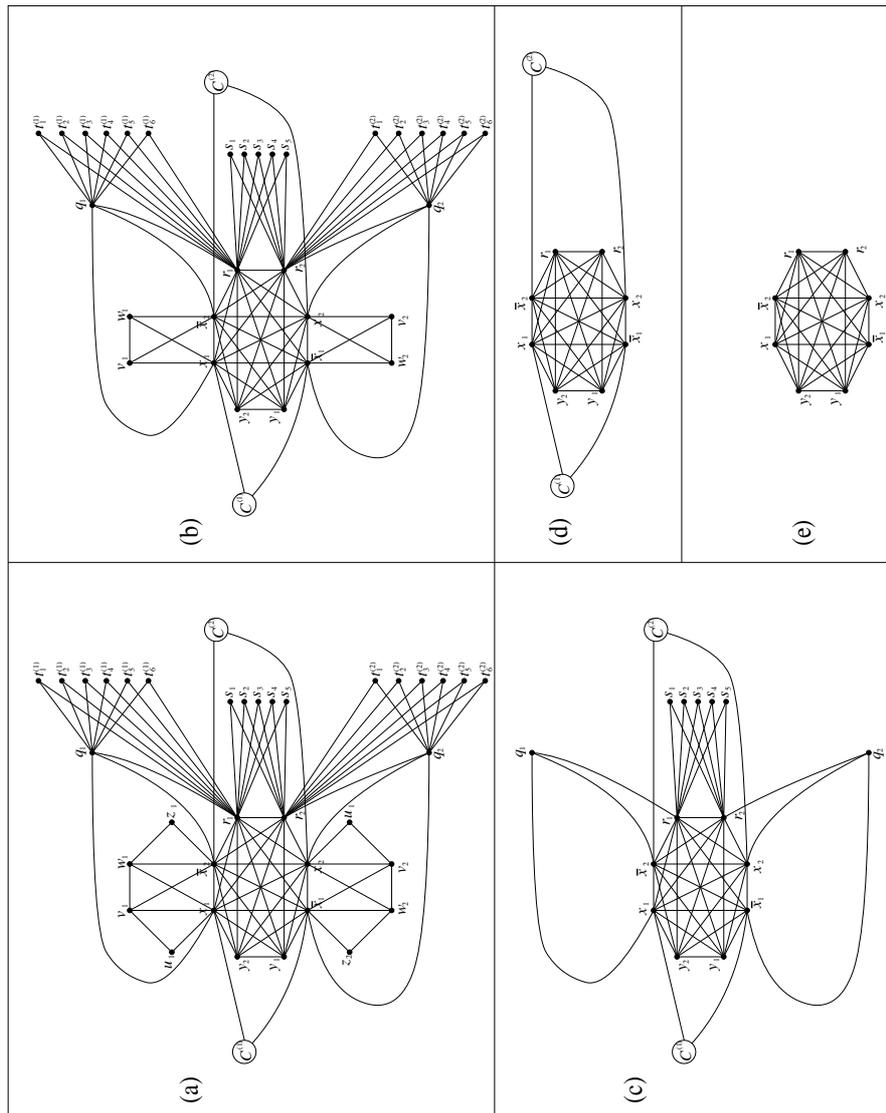


Figura 3: (a) Eliminação dos conjuntos $D^{(i)}$ e $E^{(i)}$; (b) Eliminação dos conjuntos U , e Z ; (c) Eliminação dos conjuntos V , W e $T^{(i)}$; (d) Eliminação dos conjuntos Q , e S ; (e) Eliminação dos conjuntos $C^{(i)}$, e posterior eliminação da clique $R \cup X \cup Y$.

7. Eliminando $T^{(i)}$: Podemos ver que $N[t_j^{(1)}] = \{t_j^{(1)}, r_1, q_1\}$, $N[q_1] = \{r_1, q_1, x_1, \overline{x_2}\} \cup T^{(1)}$ e $N[r_1] = \{q_1\} \cup T^{(1)} \cup R \cup X \cup Y \cup S$. Analogamente $N[t_j^{(2)}] = \{t_j^{(2)}, r_2, q_2\}$, $N[q_2] = \{r_2, q_2, x_2, \overline{x_1}\} \cup T^{(2)}$ e $N[r_2] = \{q_2\} \cup T^{(2)} \cup R \cup X \cup Y \cup S$. Portanto todo vértice de $T^{(i)}$ é simples, para cada $i \in \{1, 2\}$, e assim eliminamos todos os vértices de $T^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$.
8. Eliminando Q : Temos $N[q_1] = \{r_1, q_1, x_1, \overline{x_2}\}$, $N[r_1] = \{q_1\} \cup R \cup X \cup Y \cup S$ e $N[x_1] = N[\overline{x_2}] = X \cup R \cup Y \cup \{q_1\}$. Analogamente $N[q_2] = \{r_2, q_2, x_2, \overline{x_1}\}$, $N[r_2] = \{q_2\} \cup R \cup X \cup Y \cup S$ e $N[x_2] = N[\overline{x_1}] = X \cup R \cup Y \cup \{q_2\}$. Portanto todos os vértices de Q são simples e podemos eliminá-los.
9. Eliminando S : Podemos ver que $N[s_i] = \{s_i\} \cup R$ e $N[r_j] = X \cup Y \cup R \cup S$. Consequentemente todos os vértices de S são simples e podemos eliminá-los.

10. Eliminando $C^{(i)}$: Temos $N[C^{(i)}] = \{x_i, \bar{x}_i\} \cup C^{(i)}$ e $N[x_i] = N[\bar{x}_i] = X \cup Y \cup R \cup C^{(i)}$. Logo todos os vértices de $C^{(i)}$ são simples e os eliminamos.
11. Eliminando $R \cup X \cup Y$: Podemos ver que $N[R] = N[X] = N[Y] = X \cup Y \cup R$. Consequentemente, todos esses três conjuntos são formados por vértices simples e eliminamos os vértices of $R \cup X \cup Y$.

Com isso mostramos que o grafo G' é fortemente cordal. Note que para qualquer atribuição de valores-verdade para os literais x_i , o grafo G' permanece o mesmo.

Supondo que os literais x_1 e \bar{x}_2 sejam verdadeiros e consequentemente os demais sejam falsos, temos a seguinte partição de vértices para G' : $V_1 = R \cup Q \cup \{x_2, c_1^{(2)}, \dots, c_5^{(2)}\} \cup \{\bar{x}_1, d_1^{(1)}, \dots, d_6^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_6^{(1)}\} \cup \{u_2, z_2, v_1, w_1\}$, e $V_2 = \{x_1, \bar{x}_2, c_1^{(1)}, \dots, c_5^{(1)}\} \cup \{d_1^{(2)}, \dots, d_6^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_6^{(2)}\} \cup T^{(1)} \cup T^{(2)} \cup \{u_1, z_1, v_2, w_2\} \cup S \cup Y$.

Vamos contar o número de arestas de corte de cada tipo de acordo com a classificação feita por Bodlaender e Jansen em seu artigo. Considerando a partição dada acima, existem 144 arestas do tipo (1), porque os vértices de $\{x_i\} \cup C^{(i)}$ pertencem a uma parte da partição, enquanto os vértices de $D^{(i)} \cup E^{(i)}$ pertencem à outra parte. Nesse caso temos arestas da forma $(x_i, d_j^{(i)})$, $(x_i, e_j^{(i)})$, $(c_j^{(i)}, d_k^{(i)})$, $(c_j^{(i)}, e_k^{(i)})$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Portanto, para cada i temos 72 arestas de corte, totalizando 144 arestas do tipo (1). As arestas do tipo (2) são da forma $(\bar{x}_i, c_j^{(i)})$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Então temos 10 arestas de corte do tipo (2). Como $X \cup R \cup Y$ é uma clique na qual cada parte da partição contém metade do número de vértices desse conjunto, temos 16 arestas de corte do tipo (3). Existem dez arestas de corte do tipo (4), isto é, da forma (r_i, s_j) e 24 arestas de corte do tipo (5). Como uma cláusula é verdadeira e a outra é falsa, temos 14 arestas de corte do tipo (6). Portanto a partição acima tem 218 arestas de corte e esse número corresponde exatamente ao valor calculado de $B + 2k$, quando $n = 2$, $p = 2$ e $k = 1$.

Supondo que os literais x_2 e \bar{x}_1 sejam verdadeiros, a partição muda, mas o número de arestas de corte permanece o mesmo devido à construção feita por Bodlaender e Jansen. Nesse caso, temos a partição: $V_1 = R \cup Q \cup \{x_1, c_1^{(1)}, \dots, c_5^{(1)}\} \cup \{\bar{x}_2, d_1^{(2)}, \dots, d_6^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_6^{(2)}\} \cup \{u_1, z_1, v_2, w_2\}$ e $V_2 = \{x_2, \bar{x}_1, c_1^{(2)}, \dots, c_5^{(2)}\} \cup \{d_1^{(1)}, \dots, d_6^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_6^{(1)}\} \cup T^{(1)} \cup T^{(2)} \cup \{u_2, z_2, v_1, w_1\} \cup S \cup Y$. Note que os literais são colocados em V_1 ou V_2 de modo a manter o mesmo número de arestas de corte quando consideramos conjuntos de cláusulas que possuem o mesmo número de cláusulas verdadeiras. Supondo que os literais x_1 e x_2 sejam verdadeiros, temos duas cláusulas verdadeiras e a partição correspondente para o grafo G' é $V_1 = R \cup Q \cup \{\bar{x}_1, d_1^{(1)}, \dots, d_6^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_6^{(1)}\} \cup \{\bar{x}_2, d_1^{(2)}, \dots, d_6^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_6^{(2)}\} \cup \{u_1, w_1, u_2, w_2\}$ e $V_2 = \{x_1, c_1^{(1)}, \dots, c_5^{(1)}\} \cup \{x_2, c_1^{(2)}, \dots, c_5^{(2)}\} \cup T^{(1)} \cup T^{(2)} \cup \{v_1, v_2, z_1, z_2\} \cup S \cup Y$. Essa partição tem 220 arestas de corte e esse mesmo número de arestas é obtido se considerarmos os literais x_1 e x_2 falsos. Nesse caso, temos a partição: $V_1 = R \cup Q \cup \{x_1, c_1^{(1)}, \dots, c_5^{(1)}\} \cup \{x_2, c_1^{(2)}, \dots, c_5^{(2)}\} \cup \{u_1, w_1, u_2, w_2\}$, e $V_2 = \{\bar{x}_1, d_1^{(1)}, \dots, d_6^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_6^{(1)}\} \cup \{\bar{x}_2, d_1^{(2)}, \dots, d_6^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_6^{(2)}\} \cup T^{(1)} \cup T^{(2)} \cup \{v_1, v_2, z_1, z_2\} \cup S \cup Y$.

Referências

- BODLAENDER, H. L. e JANSEN, K. (1999), On the complexity of the Maximum Cut problem, Lecture Notes on Computer Science, Volume 775 , 769-780.
- JOHNSON, D. S. (1985), The NP-Completeness Column: An Ongoing Guide, Journal of Algorithms, Volume 6 , 434-451.
- FARBER, M. (1983), Characterizations of Strongly Chordal Graphs, Discrete Math. 43, 173-189.
- KARP, R. M. (1972), Reducibility among Combinatorial Problems, Complexity of Computational Computations, 85-103.
- BARAHONA, F., GROTSCHTEL, M., JUNGER, M., e REINELT, G. (1988), An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design, Oper. Res., 36, 493-513.
- CHANG, K. e DU, D. (1987), Efficient algorithms for the layer assignment problem, IEEE Transactions on Computer Aided Design, 6, 67-78.
- CHEN, R., KAJITANI, Y., e CHAN, S. (1983), A graph theoretic via minimization algorithm for two layer printed circuit boards, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 284-299.
- PINTER, R. (1982), Optimal layer assignment for interconnect, Proc. International Symposium on Circuits and Systems, (ISCAS), 398-401.