DEFINIÇÃO DE UMA LISTA DE COMPRA DE ITENS DE DEMANDA INTERMITENTE UTILIZANDO UM MODELO DE GESTÃO DE PORTFÓLIOS

Rafael Fernandes Mourão
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha Belo Horizonte - MG
mourao-ea@ufmg.br

Ricardo Poley Martins Ferreira
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha Belo Horizonte - MG
poley@demec.ufmg.br

RESUMO

Empresas de transporte aéreo, assim como muitas outras organizações, precisam comprar periodicamente itens para reabastecer os estoques de peças de reposição para manutenção de suas frotas de aeronaves. Este trabalho propõe um modelo de programação matemática para o problema de escolha de uma lista de compras de peças de reposição com demanda intermitente. A ideia central do modelo é que o problema de decisão de uma lista de compras é análogo a um problema de gestão de portfólio. O objetivo do modelo proposto é minimizar o erro de decisão evitando gastos com itens desnecessários e com itens necessários não adquiridos e que criam situações de urgência. O modelo foi testado e comparado com outros métodos simples obtendo resultados promissores.

PALAVRAS CHAVE. Lista de compras, Programação não-linear inteira mista, Peças de reposição.

ABSTRACT

Airlines, as well as many other organizations, need to buy items to replenish their spare parts stock. This paper proposes a mathematical programming model for the problem to decide a spare parts shopping list. The proposed model is analogous to the portfolio management problem. The objective is to minimize the decision error to avoid spending with unnecessary items and not buying necessary items. The model was tested and compared with simple methods and it obtained promising results.

KEYWORDS. Shopping list, Non-linear mixed integer program, Spare parts.

1. Introdução

Empresas de transporte aéreo, assim como muitas outras organizações, precisam comprar periodicamente itens para repor os estoques de peças de reposição para manutenção de suas frotas de aeronaves. Baseando-se no histórico de compras passadas, elas procuram estimar quais serão suas demandas para o futuro (Ghobbar, 2003) e assim definir como será a próxima lista de compras. Itens com demanda histórica intermitente dificultam a previsão de demanda e tornam mais difícil a decisão do que comprar. Quando peças adquiridas não são necessárias há custos como armazenamento, perdas e capital imobilizado. Quando a empresa precisa de uma peça e ela não está disponível imediatamente no estoque, a empresa pode precisar obter esta peça com urgência e ser obrigada a arcar um custo muito mais elevados (por exemplo, para evitar que uma aeronave fique sem operar ou no solo, AOG - *Aircraft on Ground*) (Dana Jr., 1998). Assim, tanto modelos de previsão de demanda quanto modelos para escolha da lista de compras podem ajudar a minimizar os custos das empresas e a melhorar a disponibilidade de suas aeronaves.

Este trabalho propõe um modelo de programação matemática para o problema de escolha de uma lista de compras de peças de reposição com demanda intermitente. A ideia central do modelo é que o problema de decisão de uma lista de compras é análogo a um problema de gestão de portfólio. Na gestão de um portfólio de investimentos, um investidor decide onde e quanto alocar de seus recursos entre vários investimentos. Cada investimento possui um histórico de retorno que define uma expectativa de ganho e um risco tipicamente medido como a variância deste ganho. O objetivo do investidor é maximizar seu lucro respeitando limites de risco (Vanderbei, 2001). Outro problema semelhante ao problema de escolha da lista de compras é o clássico problema da mochila (*Knapsack problem*) (Karp, 1972). No problema da mochila um viajante deve decidir o que levar entre vários itens com diferentes importâncias (quantificadas) e pesos. O problema é como escolher o que levar maximizando a soma das importâncias dos itens sujeito ao limite de peso da mochila.

Por estas semelhanças, o modelo de programação não-linear inteira mista proposto é baseado nos modelos de solução dos problemas da gestão de portfólio e problema da mochila e guarda semelhanças com eles. O objetivo do modelo proposto é minimizar o erro de decisão evitando gastos com itens desnecessários e com itens necessários não adquiridos e que criam situações de urgência. O modelo foi submetido a vários experimentos e comparado com outros métodos simples. A redução de custos utilizando o modelo proposto foi de 10% a 60%.

2. Revisão bibliográfica

O problema da definição da lista de compras se assemelha ao problema de gestão de portfólio e ao problema da mochila. Nesta seção é apresentado brevemente o problema da gestão de portfólio, o problema da mochila, o que é um item de demanda intermitente, e como pode ser feita a previsão de demanda de itens de demanda intermitente.

2.1. Gestão de Portfólio

Um modelo clássico de gestão de portfólio foi proposto por Markowitz (1952). O modelo maximiza o retorno, penalizando a variância dos dados de retorno históricos. A variância indica o quanto um investimento é seguro. Quanto maior a variância do retorno de uma ação, maior o risco do investimento nesta. Isto garante que o investidor possa ajustar um fator que dá importância à garantia de retorno. Mas investir em ações mais seguras pode trazer pouco ou nenhum retorno para o investimento.

O portfólio é determinado pela fração do total do montante que será investido em cada ação. Ou seja, é o conjunto de números não negativos e contínuos x_j, $j = 1,\ldots,n$ que somados resultam em 100%. O objetivo do modelo de Markowitz é maximizar o lucro, ao mesmo tempo em que tenta minimizar o risco do investimento. Em um determinado portfólio, cada unidade investida gera um retorno R dado por

$$R = \sum_{j}^{n} x_j R_j \tag{1}$$

onde

x_j é a porcentagem do total a ser investida na ação j;

R_j é o retorno da ação j.

O lucro associado a este portfólio é definido como a expectativa do retorno

$$ER = \sum_{j}^{n} x_j ER_j \tag{2}$$

onde

x_j é a porcentagem do total a ser investida na ação j;

ER_j é a expectativa de retorno da ação j.

O risco do investimento é dado pela variância do retorno

$$\begin{aligned} Var(R) &= E(R - ER)^2 \\ Var(R) &= E\left(\sum_{j}^{n} x_j (R_j - ER_j)\right)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

onde

x_j é a porcentagem do total a ser investida na ação j;

R_j é o retorno da ação j;

ER_j é a expectativa de retorno da ação j.

O parâmetro μ é um fator de parametrização e ajuste da importância da variância, definido pelo próprio investidor. Quanto maior o seu valor, maior a importância da variância, e mais seguro será o investimento, reduzindo o lucro possível. Assim o modelo de Markowitz é:

$$\max \sum_{j}^{n} x_j ER_j - \mu \cdot E\left(\sum_{j}^{n} x_j (R_j - ER_j)\right)^2 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} sujeito\ a: \quad & \sum_{j}^{n} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

onde

x_j é a porcentagem do total a ser investida na ação j;

R_j é o retorno da ação j ;

ER_j é a expectativa de retorno da ação j ;

μ é a importância da variância.

2.2. Problema da Mochila

O problema da mochila é um dos 21 problemas NP-Completos descritos por Karp (1972). O objetivo é carregar em uma mochila o maior valor possível, sujeito a uma restrição de peso. Cada item x_i tem seu próprio valor v_i e seu peso w_i. O problema pode ser modelado como um problema de maximização de variáveis inteiras não negativas:

$$\max V = \sum_i^n x_i v_i \tag{5}$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & \sum_i^n x_i w_i \leq W \\ & x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

onde

x_i é a decisão de compra do i-ésimo item a ser colocado na mochila;

v_i é o valor do i-ésimo item;

V é o valor carregado na mochila;

w_i é o peso do item i-ésimo;

W é o peso máximo suportado na mochila.

2.3. Demanda Intermitente

Dada a demanda ao longo de vários períodos, é possível calcular o quadrado do coeficiente de variação CV² e a média de tempo entre demandas, ADI (A*verage inter-Demand Interval*). O parâmetro ADI é calculado a partir da equação

$$ADI = \frac{\Delta T}{P} \tag{6}$$

onde

ΔT é o tempo, em dias, médio entre duas demandas;

P é o tempo, em dias, em um período (semana, mês).

O parâmetro CV^2 é calculado a partir da equação

$$CV^2 = \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \right)^2 \tag{7}$$

onde

σ é o desvio padrão das demandas de um item ao longo do tempo;

$\bar{x}$ é a média das demandas de um item ao longo do tempo.

Gobbar (2003) define como demanda intermitente aqueles itens que têm ADI > 1.32 e CV^2 < 0.49. Ou seja, itens com grandes períodos de tempo sem demandas e com pouca variação. A Tabela 1 exemplifica as demandas de vários itens de uma empresa de aviação comercial e seus respectivos custos para compra.

Tabela 1. Demandas ao longo de seis semanas para várias peças de aviões de uma companhia

Item	Preço US $	Semana 1	2	3	4	5	6	ADI	CV^2
Air conditioning unit	1500	1	1	1	0	1	0	1.50	0.50
Alternator unit	800	0	1	0	2	0	1	1.50	1.25
Brake assembly (heat pack)	400	1	0	1	1	1	0	1.50	0.50
Brale assembly (brake unit)	300	1	2	1	0	1	1	1.00	0.33
Brake assembly unit[1]	300	1	0	1	0	2	1	1.20	0.68
Brake assembly unit[1]	300	1	2	1	1	1	1	0.86	0.10
Brake assembly unit[1]	300	1	2	2	1	0	2	0.75	0.31
Brake control valve	100	0	1	1	2	1	1	1.00	0.33
Combustion chamber	1200	0	1	1	1	2	0	1.20	0.68
DC Generator	1500	0	1	0	1	1	2	1.20	0.68
Drag strut unit	600	0	1	1	0	1	0	2.00	1.00
Inverter assembly	200	1	1	1	0	2	1	1.00	0.33
Lock strut unit	200	0	0	1	1	1	0	2.00	1.00
Main undercarriage unit	500	0	1	0	1	1	1	1.50	0.50

[1] Há dados para o conjunto de freios de aeronaves distintas na frota da companhia

2.4. Previsão de demanda

A partir dos dados históricos, é possível estimar a demanda futura, definida como expectativa de demanda. Para os estudos, o modelo de previsão de demanda utilizado foi a média ponderada móvel, WMA (Weighted Moving Average) (Holt, 1957), que se mostrou suficiente para estudo de demandas intermitentes (Ghobbar, 2003). A expectativa de demanda de um item segue a equação

$$ED_{T+1} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (A_t D_t)}{\sum_{t=1}^{T} A_t} \tag{8}$$

onde

ED_{T+1} é a expectativa de demanda para o período seguinte;

A_t é o peso do t-ésimo dado histórico;

D_t é a demanda do t-ésimo dado histórico.

3. Metodologia

Uma empresa dispõe de um montante que deseja investir tudo em reposição de estoque para o próximo período de tempo (semana, mês). Ela tem os dados de demanda dos itens ao longo de vários períodos, bem como o custo para compra-los com antecedência. O objetivo é maximizar o acerto, ou minimizar o custo do erro de decisões erradas.

3.1 O modelo proposto

Assim como o modelo de Markowitz (1952), penalizam-se itens com pouca confiança na demanda. Grandes variâncias dos dados históricos resultam em menor confiabilidade e maior risco para a compra. A variância é definida por

$$Var(D) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\overline{D_i} - ED_i\right)\right)^2 \qquad (9)$$

onde

$\overline{D_i}$ é a média aritmética do i-ésimo item ao longo do seu histórico;

x_i é a quantidade a ser comprada do i-ésimo item;

ED_i é a estimativa de demanda do i-ésimo item.

O erro da compra foi definido como o quadrado da diferença entre a expectativa de demanda e o que se compra. Análogo ao Problema da Mochila, um valor α_i foi atribuído ao i-ésimo item a fim de dar diferentes importâncias aos itens e para parametrizar o erro:

$$Erro = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i - ED_i\right)^2 \qquad (10)$$

onde

x_i é a quantidade a ser comprada do i-ésimo item;

ED_i é a estimativa de demanda do i-ésimo item;

α_i é o valor de importância do i-ésimo item.

Este problema é de programação não-linear inteira mista e, além da restrição de não negatividade, o custo total da compra não pode exceder o montante disponível:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i C_i \le M \qquad (11)$$

onde

x_i é a quantidade a ser comprada do i-ésimo item;

C_i é o custo do i-ésimo item;

M é o montante disponível para a compra.

O modelo minimiza o erro e a variância. Assim como no modelo de Markowitz, o parâmetro μ é usado como um fator de parametrização e ajuste da importância da variância, definido pelo próprio comprador. Assim o modelo de otimização da escolha da lista de compras é

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i - ED_i\right)^2 + \mu \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\overline{D_i} - ED_i\right)\right)^2 \\
\textit{sujeito a}: \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i C_i \le M \\
& x_i \ge 0 \quad i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{12}
$$

onde

x_i é a quantidade a ser comprada do i-ésimo item;

ED_i é a estimativa de demanda do i-ésimo item;

α_i é o valor de importância do i-ésimo item;

μ é a importância da variância;

$\overline{D_i}$ é a média aritmética do i-ésimo item ao longo do seu histórico;

C_i é o custo do i-ésimo item;

M é o montante disponível para a compra.

3.2. Testes com o modelo proposto

Para investigar o modelo proposto e verificar eficiência e robustez foram realizados testes abrangendo vários tipos de parametrização e montantes:

- Quanto ao montante inicial (M) - 25, 50, 75 e 100% do custo para comprar todos os itens da demanda
- Distribuição α :
    1. Constante: Todos os itens receberam o mesmo valor $\alpha_i = 1, \quad \forall \quad i$
    2. Custo dos itens: O valor do item é proporcional à razão do seu custo pelo custo total da demanda $\alpha_i = C_i \big/ \sum_i D_i C_i$
    3. Demanda dos itens: O valor do item é proporcional à razão da sua expectativa de demanda pela expectativa de demanda total $\alpha_i = ED_i \big/ \sum_i ED_i$
- Quanto à importância da variância (μ) – 0.2, 0.5, 1 e 10
- Quanto ao período:
    1. Mensal: Os meses 1 a 7 de um histórico foram analisados e projetou-se para o 8º mês.

Para os testes, foram ignoradas as demandas do período T+1. Após obter o resultado, comparou-se com os dados reais do período T+1. Então, foram comparados com três métodos de escolha diferentes que uma empresa poderia tomar para definir a lista de compras, caso só dispusesse da expectativa de demanda:

- Método 1: Comprar itens mais baratos primeiro. O item mais barato é comprado, seguido do segundo, e assim por diante até que não se consiga comprar mais com o montante restante.
- Método 2: Comprar itens mais caros primeiro. Análogo ao método 1.
- Método 3: Comprar itens mais demandados primeiro. Análogo aos dois anteriores.
- Método 4: Relaxação para um problema de programação linear e arredondamento:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot ED_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\overline{D_i} - ED_i\right)$$

$$\text{sujeito a}: \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} x_i C_i \leq M \\ 0 \leq x_i \leq ED_i \quad i = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

Para comparar o modelo proposto aos quatro métodos alternativos foram criados dois índices de comparação: sobra de itens e o custo da sobra de itens.

3.2.1. Sobra de itens

A sobra de itens compara a quantidade a ser comprada em cada método com a quantidade real demandada no período T+1.

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i - D_{i_{T+1}}, \; se \quad x_i > D_{i_{T+1}}$$

onde

x_i é a quantidade a ser comprada do i-ésimo item;

$D_{i_{T+1}}$ é a quantidade real demandada do i-ésimo item.

Esta comparação foi utilizada para melhor compreensão da precisão do método.

3.2.2 Custo da sobra de itens

O custo da sobra é a soma dos produtos entre os itens sobressalentes e seus respectivos custos

$$C_s = \sum_{i=1}^{n} C_i S_i$$

onde

C_i é o custo de compra do i-ésimo item;

S_i é a sobra do i-ésimo item.

Esta comparação foi utilizada visando reconhecer a influência do custo dos itens sobre a decisão, além de ser a comparação com maior aplicação prática. Por este motivo, o custo da sobra de itens foi usado como critério principal de comparação e a sobra de itens como critério auxiliar. Os custos de sobra de itens do modelo foram comparados com os custos de sobra de itens dos métodos restantes para obter a redução de custo percentual:

$$R_{custo} = \left(C_{S/Metodo} - C_{S/Modelo}\right) / C_{S/Metodo}$$

onde

R_{custo} é a redução de custo percentual;

$C_{S/Metodo}$ é o custo da sobra de itens do método analisado;

$C_{S/Modelo}$ é o custo da sobra de itens do modelo proposto.

4. Resultados experimentais

Foi feito um conjunto de testes para avaliar o modelo proposto com diferentes parâmetros de calibração e compará-lo com os outros três métodos simples. O modelo foi implementado em AMPL e foi testado com auxílio do NEOS-Server (Czyzyk et al., 1998) usando o solver KNITRO (Byrd et al, 2006). Como os casos testados são pequenos, o tempo de resposta de cada problema sempre foi menor que 1 segundo.

A tabela 1 é o extrato da tabela completa utilizada nos experimentos. Nestes foram utilizados os mesmos 14 itens, porém o histórico de demandas abrangeu 32 semanas. As primeiras 28 semanas foram utilizadas como histórico para definir a expectativa de demanda das semanas 29 a 32. Em seguida comparou-se com a demanda real das semanas 29 a 32. Os valores da expectativa de demanda e a demanda real das semanas 29 a 32 estão explicitados na tabela 2.

Tabela 2. Expectativas de demanda e demanda real para as semanas 29 a 32

Item	ED[2]	Demanda Real
Air conditioning unit	3.9	4
Alternator unit	2.3	4
Brake assembly (heat pack)	2.8	5
Brale assembly (brake unit)	3.1	4
Brake assembly unit[1]	3.3	2
Brake assembly unit[1]	4.7	5
Brake assembly unit[1]	4.1	1
Brake control valve	5.3	4
Combustion chamber	4.7	3
DC Generator	3.9	4
Drag strut unit	3.7	4
Inverter assembly	3.2	6
Lock strut unit	3.8	1
Main undercarriage unit	3.7	5

[1] Há dados para o conjunto de freios de aeronaves distintas na frota da companhia. [2] Expectativa de demanda.

Para o primeiro experimento, o parâmetro α_i recebeu o valor 1.0 para todos i =1,..., n. As tabelas 3 e 4 mostram os resultados obtidos para vários valores de μ e M, bem como os resultados para o restante dos métodos, para vários valores de M. A tabela 3 mostra a sobra de itens, enquanto a tabela 4 mostra os custos da sobra.

Tabela 3. Sobra de itens do primeiro experimento e dos métodos alternativos

		Montante			
		25	50	75	100
μ	0.2	3	5	6	7
	0.5	3	6	8	8
	1	4	6	8	8
	10	3	6	8	8
Método 1		7	8	10	10
Método 2		0	0	3	9
Método 3		1	4	5	10
Método 4		6	8	10	10

Tabela 4. Custo da sobra de itens do primeiro experimento e dos métodos alternativos

		Montante			
		25	50	75	100
μ	0.2	800	1400	1700	2000
	0.5	800	1700	2300	2300
	1	1100	1700	2300	2300
	10	900	1800	2400	2400
Método 1		1600	2200	4600	4600
Método 2		0	0	3000	4500
Método 3		100	4000	3300	4600
Método 4		1500	2200	4600	4600

Os experimentos seguintes foram comparados com os resultados anteriores dos métodos alternativos. Para o segundo experimento foram analisados os mesmos valores de μ e M. O parâmetro α_i recebeu valores proporcionais ao custo do item em relação ao total da demanda: $\alpha_i = C_i \Big/ \sum_i D_i C_i$. As tabelas 5 e 6 mostram os resultados obtidos.

Tabela 5. Sobra de itens do segundo experimento

		Montante			
		25	50	75	100
μ	0.2	1	2	6	8
	0.5	1	2	7	10
	1	1	3	8	10
	10	2	4	9	11

Tabela 6. Custo da sobra de itens do segundo experimento

		Montante			
		25	50	75	100
μ	0.2	300	600	2700	3300
	0.5	300	600	3000	3900
	1	300	900	3300	3900
	10	600	1200	3600	4200

O terceiro experimento avaliou o parâmetro α_i proporcional à expectativa de demanda de cada item: $\alpha_i = ED_i \Big/ \sum_i ED_i$. Os resultados para sobra de itens e o custo da sobra são mostrados nas tabelas 7 e 8, respectivamente.

Tabela 7. Sobra de itens do terceiro experimento

		Montante			
		25	50	75	100
μ	0.2	4	5	8	8
	0.5	4	7	8	8
	1	5	7	8	8
	10	3	7	9	9

Tabela 8. Custo da sobra de itens do terceiro experimento

		Montante			
		25	50	75	100
μ	0.2	1100	1400	2300	2300
	0.5	1100	2000	2300	2300
	1	1400	2000	2400	2400
	10	900	2100	2700	2700

5. Discussão

O modelo proposto resultou em uma redução de custos média de 40% em relação aos métodos que empresas utilizariam se não tivessem algum modelo de otimização. Como consequência, há mais recursos sendo utilizados para itens que serão usados no período analisado. O uso da variância da demanda como risco de compra foi um importante fator para os resultados. Além disso, o uso de valores α_i distintos para cada item reduziu os custos para casos onde havia poucos recursos disponíveis. A quantidade de itens sobressalentes também foi menor utilizando o modelo proposto, comparando com os métodos restantes. Isto indica um menor custo para estocar os itens que não serão utilizados no período analisado.

Entretanto, pôde-se observar que utilizando o método 2 obtiveram-se menos sobras para quantidades menores de recurso disponível. Este método se caracteriza por comprar itens mais caros primeiro, até que se satisfaça a expectativa de demanda para estes itens. Como os recursos são usados rapidamente para comprar poucos itens, pouca ou nenhuma sobra de item era esperada nesses casos. Contudo, uma abordagem diferente pode ser feita. Itens comprados com antecedência podem ser mais baratos que em situações de urgência (Dana Jr., 1998). Priorizar a compra de itens mais caros faz com que ocorra uma maior falta de itens. Estes itens, quando forem demandados, serão comprados a qualquer preço, aumentando o custo total.

A análise entre os experimentos realizados mostra que o ajuste do parâmetro α_i reduz os custos em diferentes faixas de montante. Nos casos com poucos recursos, valorizar itens mais caros resulta na redução do custo da sobra de item. Uma abordagem semelhante ao do método 2 pode ser feita para explicar estes resultados. Em casos que o comprador tem mais recursos, uma distribuição de α_i constante para todos os itens resultou em menores custos. Assim como na gestão de portfólio (Markowitz, 1952), menores valores para o parâmetro μ resultaram custos menores. Porém, vale ressaltar que o risco nestes casos é maior. O comprador deve ajustá-lo para conseguir maior ou menor garantia da expectativa de demanda. O espaço amostral foi insuficiente para demonstrar este risco.

6. Comentários e conclusões

Analisando os resultados é possível verificar que a redução de custos obtida usando o modelo de definição da lista de compras proposto é satisfatória. A análise da variância como penalização é um recurso poderoso. O fator de risco auxilia o comprador a identificar os itens onde a confiança na previsão da demanda é maior ou menor.

Embora, o modelo proposto seja baseado no modelo de Markowitz e no problema da mochila, ele é uma inovação na medida em que usa ideias clássicas em um novo contexto.

As comparações feitas retratam de forma simples soluções que empresas usariam caso não se dispusessem de métodos matemáticos. Pode-se, entretanto, estender o espaço amostral, a quantidade de itens avaliados, e avalia-lo para vários períodos, consecutivos ou não, a fim de corroborar sua eficiência. Além disso, modelo proposto é um modelo de programação não-linear inteira mista, mas é também um problema de programação estocástica. Assim ainda há um longo caminho para testar o modelo proposto.

Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pelo CNPQ projetos: 305164/2010-4, 473763/2011-7 e IC.

7. Referências bibliográficas

Byrd, R. H., Nocedal, J. e Waltz, R. A. (2006), KNITRO: An Integrated Package for Nonlinear Optimization, In G. di Pillo and M. Roma, editors, Large-Scale Nonlinear Optimization, 35-59, 2006. Springer Verlag.

Czyzyk,J., Mesnier,M. e Moré, J. (1998), The NEOS Server, IEEE Journal on Computational Science and Engineering, Vol 5, Issue 3, pages 68-75,

Dana Jr., J. D. (1998), Advance Purchase Discounts and Price Discrimination in Competitive Markets. Journal of Political Economy, vol. 106, pp. 395-422.

Ghobbar, A.A., Friend, C.H. (2003), Evaluation of forecasting methods for intermittent parts demand in the field of aviation: a predictive model. Computers & Operations Research, p. 2097-2114.

Ghobbar A.A., Friend C.H. (1996), Aircraft maintenance and inventory control using the reorder point system. International Journal of Production Research, 34(10):2863–78.

Holt, C.C. (1957), Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages. OMce of Naval Research, Carnegie institute of technology, Pittsburgh, PA, research memorandum, 1957, no. 52.

Karp, R.M. (1972), Reducibility Among Combinatorial Problems. Complexity of Computer Computations. New York: Plenum, pp. 85–103.

Markowitz, H. (1952), Portfolio selection. The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91.

Vanderbei, R.J. (2001), Linear Programming: Foundations and Extensions, Princeton.