

Estudando a integralidade de grafos H_p -broom-like.

Laura Patuzzi

Instituto de Matemática e COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68530 – 21941-909 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil
laura@im.ufrj.br

Maria Aguiéiras A. de Freitas*

Instituto de Matemática e COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68530 – 21941-909 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil
maguiéiras@im.ufrj.br

Renata Raposo Del-Vecchio†

Instituto de Matemática e Estatística– Universidade Federal Fluminense
Rua Mário Santos Braga S/N Valonguinho – 24.020-140 – Niterói – RJ – Brazil
renata@vm.uff.br

RESUMO

Um grafo H_p -broom-like é obtido ao identificarmos cada vértice de um grafo p -regular conexo H_p com a raiz de uma cópia de uma vassoura enraizada. Provamos que a classe dos grafos H_p -broom-like com n vértices é total e estritamente ordenada pelo índice (maior autovalor da matriz de adjacência). Estudamos condições de integralidade do índice de um grafo H_p -broom-like, determinando estas condições em classes particulares e obtendo famílias infinitas de grafos não integrais com índice inteiro e famílias infinitas de grafos integrais.

PALAVRAS CHAVE. Grafo integral, Índice inteiro, Grafo H_p -broom-like.

TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos.

ABSTRACT

A H_p -broom-like graph is obtained identifying each vertex of a connected p -regular graph H_p with the root of a copy of a rooted broom. We prove that the class of H_p -broom-like graphs with n vertices is total and strictly ordered by the index (greatest eigenvalue of adjacency matrix). We study integrality conditions of the index of a H_p -broom-like graph, determining these conditions in particular classes and obtaining infinite families of non integral graphs with integer index and infinite families of integral graphs.

KEYWORDS. Integral graph, Integer index, H_p -broom-like graph.

TAG – Theory and Algorithms of Graphs.

*Partially supported by CNPq.

†Partially supported by CNPq and FAPERJ

1. Introdução

Dado um grafo simples e não orientado G , com n vértices, sua matriz de adjacência $A(G)$ é a matriz quadrada, de ordem n , cujas entradas são

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } ij \text{ é uma aresta de } G, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As raízes do polinômio $p_G(x) = \det(xI_n - A(G))$ são chamadas de *autovalores do grafo*. Como a matriz $A(G)$ é simétrica, os autovalores são todos reais e, portanto, podem ser ordenados em modo não crescente: $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$. Cada autovalor $\lambda_i(G)$, sendo raiz de $p_G(x)$, tem multiplicidade $m_i \geq 1$. A lista dos s autovalores distintos do grafo, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, juntamente com suas respectivas multiplicidades, é chamado de *espectro do grafo* (Godsil and Royle, 2001) e denotado na forma

$$\text{Spec}(G) = \left(\alpha_1^{(m_1)}, \alpha_2^{(m_2)}, \dots, \alpha_s^{(m_s)} \right),$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s$ e $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$.

O maior autovalor do grafo é chamado de *índice do grafo* e será denotado simplesmente por $\lambda(G)$. Do Teorema de Perron-Frobenius (Godsil and Royle, 2001), se o grafo for conexo, seu índice é uma raiz *simples* de $p_G(x)$, ou seja, $m_1 = 1$. Ademais, como $p_G(x)$ é polinômio mônico com coeficientes inteiros, cada autovalor $\lambda_i(G)$ do grafo ou é inteiro ou é irracional. Caso o grafo tenha todos os seus autovalores inteiros é dito *integral*.

O estudo de grafos integrais foi inicialmente proposto por Harary e Schwenk (1974). Um *survey* sobre estes é dado por Balińska et al. (2002). Neste, os autores observam que a busca de grafos integrais tem apresentado resultados em diversas classes, entretanto mostrou-se um problema difícil, uma vez que as restrições impostas pela própria classe tornam reduzida a quantidade existente de grafos integrais. No recente *survey*, de Cvetković e Simić (2011), sobre aplicações da Teoria Espectral de Grafos em Ciência de Computação, os autores observam um crescente interesse no emprego de grafos integrais em Computação Quântica e, mais particularmente, em problemas de balanceamento de cargas.

Como um grafo integral possui índice inteiro, o estudo da *integralidade do índice* de um grafo (i.e., caracterizar quando o grafo possui índice inteiro) serve como uma metodologia na procura por novos grafos integrais. Entretanto, ao restringirmos a busca para grafos com índice inteiro, não estamos necessariamente diminuindo a complexidade do problema. De fato, uma vez que um autovalor é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, o estudo da integralidade do índice de um grafo envolve o problema de obter soluções (inteiras) não negativas de equações diofantinas. Em particular, em nosso estudo, tais equações diofantinas são quadráticas e binárias. Lagarias (1979) provou que "*o problema de obter soluções (inteiras) não negativas de uma equação diofantina binária e quadrática é NP*".

Na Seção 2, investigamos a integralidade do índice dos grafos H_p -*broom-like*. Para alguns casos particulares, obtemos condições sobre a integralidade tanto do índice quanto dos demais autovalores do grafo. Destas, construímos famílias infinitas de grafos H_p -*broom-like* integrais. Estes grafos são uma variante dos que aparecem nos artigos Belardo

et al. (2010) e Tyomkyna e Uzzell (2012), e são resultantes do *produto hierárquico* (Barrière et al., 2009) de um grafo conexo p -regular H_p por uma vassoura enraizada $B(a; r)$.

Uma vassoura enraizada $B(a; r)$ é a árvore com $a + r$ vértices obtida ao pendurarmos $a \geq 1$ arestas no vértice v_1 do caminho $P_r = v_1v_2 \dots v_r$ de $r \geq 1$ vértices, com raiz no vértice v_r . Caso $r = 1$, a vassoura é a estrela S_{a+1} enraizada por seu vértice central, e caso $a = 1$, será o caminho P_{r+1} enraizado em um de seus vértices pendentes. Na Figura 1 exibimos algumas destas vassouras, colorindo de preto suas respectivas raízes.

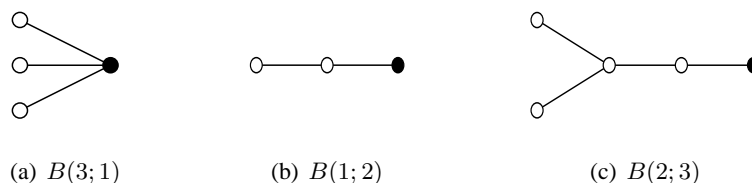


Figura 1. Exemplos de vassouras enraizadas $B(a; r)$.

Dado um grafo conexo p -regular H_p ($p \geq 1$), com $t \geq 2$ vértices, o produto hierárquico $H_p \square B(a; r)$, de H_p com a vassoura enraizada $B(a; r)$, é obtido ao identificarmos cada vértice de H_p com a raiz de uma cópia de $B(a; r)$. O grafo resultante possui $n = t \cdot (a + r)$ vértices e é chamado de H_p -broom-like. Caso H_p seja o grafo completo K_{p+1} , chamaremos o grafo $K_{p+1} \square B(a; r)$ simplesmente por p -broom-like. Se $p = 2$, o grafo H_p é um ciclo C_t e, portanto, $C_t \square B(a; r)$ é um grafo unicíclico. Ainda, se $p = 1$ e $a \geq 2$, $H_1 = K_2$ e o grafo $K_2 \square B(a; r)$ é uma *dupla vassoura* balanceada de diâmetro $d = 2r + 1$. Na Figura 2 exemplificamos estes três casos.

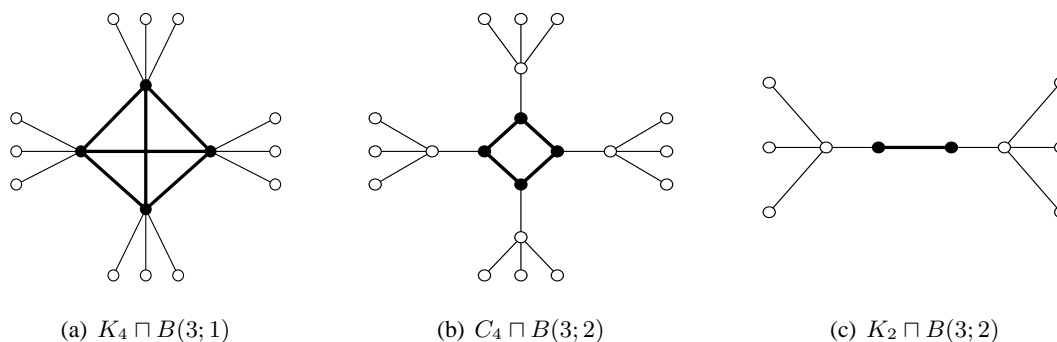


Figura 2. Exemplos de grafos H_p -broom-like

Patuzzi et al. (2012b) abordam o *problema de isomorfismo de grafos* (Fortin, 1996) na classe de grafos p -broom-like, com $p \geq 2$, mostrando que não existem grafos coespectrais (com espectros iguais) não isomorfos, uma vez que, fixado o número n de vértices, os grafos desta classe são total e estritamente ordenados pelo índice. Mais precisamente, tem-se:

$$\lambda(K_{p+1} \square B(a; r)) > \lambda(K_{p+1} \square B(a - 1; r + 1)) > \dots > \lambda(K_{p+1} \square B(1; r + a - 1)) .$$

Na Seção 3, generalizamos este resultado para os grafos H_p -broom-like com n vértices.

2. Grafos H_p -broom-like com índice inteiro

Nesta seção estamos interessados em estudar a integralidade do índice, assim como dos demais autovalores, de um grafo H_p -broom-like. Iniciamos a investigação considerando $p = 1$. Se $a = 1$, o grafo $K_2 \sqcap B(1; r)$ é o caminho P_{2r+2} , cujo índice é conhecido na literatura (Cvetković et al., 2010):

$$\lambda(P_{2r+2}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2r+3}\right).$$

Logo, $1 < \lambda(P_{2r+2}) < 2$ e, em particular, $\lambda(P_{2r+2}) \notin \mathbb{N}$. Assim, consideramos $a \geq 2$. Neste caso o grafo é uma dupla vassoura e, portanto, uma árvore com exatamente dois vértices de grau maior que dois. (Veja a Figura 2(c).)

Brouwer et al. (2011) provam: "seja T uma árvore que possui exatamente dois vértices u e v com graus maiores que dois. Se T é integral, então u e v são adjacentes". Logo, para que $K_2 \sqcap B(a; r)$ seja integral, esta deve possuir diâmetro 3, ou seja, $r = 1$. Neste caso, a dupla vassoura é conhecida por *dupla estrela* e é balanceada. De Balińska et al. (2002), temos que esta é integral se, e somente se, seu índice

$$\lambda(K_2 \sqcap B(a; 1)) = \sqrt{\frac{2a+1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}}$$

é inteiro.

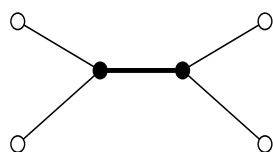
Patuzzi et al. (2012a) estudam a integralidade do índice de uma dupla estrela, não necessariamente balanceada, obtendo, em particular:

$$\lambda(K_2 \sqcap B(a; 1)) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a = s(s+1), \text{ para algum } s \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

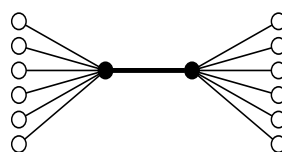
Deste modo, deduzimos, na proposição abaixo, as condições de integralidade de uma dupla vassoura e exibimos o espectro no caso desta ser integral. Na Figura 3 ilustramos as duas menores duplas estrelas balanceadas integrais.

Proposição 2.1. *Dados inteiros $a \geq 2$ e $r \geq 1$, a dupla vassoura $K_2 \sqcap B(a; r)$ é integral se, e somente se, $r = 1$ e $a = s(s+1)$, para algum inteiro $s \geq 1$. Neste caso, seu espectro é*

$$\text{Spec}(K_2 \sqcap B(s(s+1); 1)) = (s+1^{(1)}, s^{(1)}, 0^{(2s(s+1)-2)}, -s^{(1)}, -s-1^{(1)}).$$



$$(a) \text{Spec}(K_2 \sqcap B(2; 1)) = (2^{(1)}, 1^{(1)}, 0^{(2)}, -1^{(1)}, -2^{(1)})$$



$$(b) \text{Spec}(K_2 \sqcap B(6; 1)) = (3^{(1)}, 2^{(1)}, 0^{(10)}, -2^{(1)}, -3^{(1)})$$

Figura 3. Menores duplas estrelas balanceadas integrais

Ainda em Patuzzi et al. (2012a), os autores estudam a integralidade do índice de uma dupla vassoura de diâmetro $d \geq 4$, obtendo limites (inferior e superior) para o seu

índice, mostrando que "uma dupla vassoura, de diâmetro $d \geq 4$, possui índice inteiro λ se, e somente se, $\lambda = \sqrt{a + 2}$ é um quadrado perfeito e, ou $a = 2$ ou seu diâmetro $d = 4$ ".

Como a dupla vassoura $K_2 \sqcap B(a; r)$ tem diâmetro $d = 2r + 1$, temos que, para $r \geq 2$, esta tem índice inteiro somente se $a = 2$. Deste modo concluímos:

Afirmção 2.1. As únicas duplas vassouras com índice inteiro são:

- $K_2 \sqcap B(2; r)$, para $r \geq 1$, cujo índice é 2;
- $K_2 \sqcap B(s(s + 1); 1)$, para $s \geq 2$, cujo índice é $s + 1$.

Na Figura 4 exibimos as duas menores duplas vassouras com índice inteiro e diâmetro $d \geq 5$ ímpar (não integrais). Como seus autovalores irracionais são da forma $2\cos\frac{k\pi}{d}$, para $1 \leq k \leq d - 1$, exibimos os valores aproximados destes.

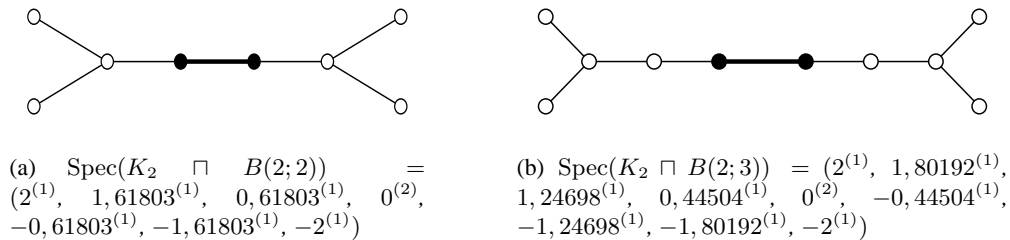


Figura 4. Menores duplas vassouras não integrais com índice 2

Investigamos, agora, condições de integralidade dos grafos H_p -broom-like, com $p \geq 2$ e $r = 1$. No seguinte lema determinamos os seus espectros em função dos autovalores de H_p .

Lema 2.1. Sejam $a \geq 1$ e $p \geq 2$ inteiros. Dado um grafo p -regular conexo H_p com t vértices, sejam $\mu_1 > \mu_2 \geq \dots \geq \mu_t$ seus autovalores. Então, 0 é autovalor de $H_p \sqcap B(a; 1)$ com multiplicidade $t \cdot (a - 1)$ e os demais autovalores $H_p \sqcap B(a; 1)$ são dados por

$$\frac{\mu_i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_i^2 + 4a} \quad \text{e} \quad \frac{\mu_i}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu_i^2 + 4a},$$

onde $1 \leq i \leq t$. Ainda, se m_i é a multiplicidade do autovalor μ_i de H_p , então a multiplicidade tanto de $\frac{\mu_i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_i^2 + 4a}$, assim como de $\frac{\mu_i}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu_i^2 + 4a}$, também é m_i .

PROVA. Seja t o número de vértices de H_p . De Cvetković et al. (2010), temos que os autovalores de $H_p \sqcap B(a; 1)$ são as raízes do polinômio

$$p(x) = (x^a)^t \cdot p_{H_p} \left(\frac{x^2 - a}{x} \right).$$

Logo, $p(x) = x^{at} \cdot \left(\frac{x^2 - a}{x} - \mu_1 \right) \cdot \left(\frac{x^2 - a}{x} - \mu_2 \right) \cdots \left(\frac{x^2 - a}{x} - \mu_t \right)$ e, portanto,

$$p(x) = x^{at-t} \cdot (x^2 - \mu_1 x - a) \cdot (x^2 - \mu_2 x - a) \cdots (x^2 - \mu_t x - a).$$

Disto segue a prova do lema. □

Deste lema concluímos a primeira condição de integralidade de um grafo $H_p \sqcap B(a; 1)$.

Corolário 2.1. *Se o grafo $H_p \sqcap B(a; 1)$ é integral, então o grafo H_p é integral.*

PROVA. De fato, se $z \neq 0$ é um autovalor do grafo H_p -broom-like então, $z^2 - \mu z - a = 0$, para algum autovalor μ de H_p . Supondo que z seja inteiro, temos que $\mu = \frac{z^2 - a}{z}$ é racional (uma vez que a é inteiro). Como os autovalores são ou inteiros ou irracionais, concluímos que μ é inteiro. \square

Como outra consequência do lema anterior, deduzimos condições necessárias e suficientes para a integralidade do índice de $H_p \sqcap B(a; 1)$, onde $p \geq 2$. Enunciadas na Proposição 2.2, estas estendem a condição obtida em (1), aonde consideramos $p = 1$ e $a \geq 2$.

Proposição 2.2. *Dado um grafo H_p conexo e p -regular, com $p \geq 2$, e dado um inteiro $a \geq 1$, o grafo $H_p \sqcap B(a; 1)$ possui índice inteiro λ se, e somente se, existe um inteiro positivo q tal que*

$$a = q(p + q).$$

Neste caso, $\lambda = p + q$.

PROVA. Do Lema 2.1, $\lambda = \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_1^2 + 4a}$, onde μ_1 é o índice de H_p . Como H_p é p -regular, $\mu_1 = p$. Deste modo, concluímos que

$$\lambda \text{ é inteiro se, e somente se, } p^2 + 4a \text{ é um quadrado perfeito,}$$

ou seja, se existe um inteiro positivo x tal que $(x - p)(x + p) = 4a$. Neste caso, p e x possuem mesma paridade.

Se p for ímpar, $p = 2t + 1$ e $x = 2u + 1$. Portanto, $a = (u - t)(u + t + 1)$ e, para $q = u - t$, $a = q(q + 2t + 1) = q(p + q)$. No caso em que p é par, $p = 2t$ e $x = 2u$, o que implica em $(u - t)(u + t) = a$ e, para $q = u - t$, $a = q(2t + q) = q(p + q)$.

Assim, provamos que λ é inteiro se, e somente se, existe um inteiro positivo q tal que $a = q(p + q)$. Calculando $p^2 + 4a = p^2 + 4pq + 4q^2 = (p + 2q)^2$, concluímos que, neste caso, $\lambda = \frac{1}{2} \cdot (p + p + 2q) = p + q$. \square

As duas observações abaixo seguem desta proposição.

Observação 2.1. *O índice de $H_p \sqcap B(a; 1)$ não depende da estrutura do grafo H_p nem da quantidade de seus vértices, bastando apenas que H_p seja conexo e p -regular.*

No caso em que $p = 2$, ou seja, em que H_p é um ciclo C_t , este fato é notado por Belardo et al. (2006).

Observação 2.2. *Fixado $p \geq 2$, existem infinitos grafos $H_p \sqcap B(a; 1)$ com índice inteiro.*

Entretanto, a busca por grafos $H_p \sqcap B(a; 1)$ integrais é mais difícil. Em Patuzzi et al. (2012b) os autores dão condições necessárias e suficientes para a integralidade de $K_{p+1} \sqcap B(a; 1)$, onde $p \geq 2$:

$$K_{p+1} \sqcap B(a; 1) \text{ é integral} \Leftrightarrow a = q(p + q) = s(s - 1) \text{ para certos inteiros } q, s. \quad (2)$$

Neste trabalho, os autores também provam que $K_{p+1} \sqcap B(a; 1)$ não é integral se $p = 2$ ou 3 , e exibem um tal grafo integral para cada $p \geq 4$.

Na Proposição 2.3 damos condições de integralidade de um grafo $H_p \sqcap B(a; 1)$ (para $p \geq 2$). Estas seguem do Lema 2.1 e do Corolário 2.1, e generalizam as obtidas em (2), aonde H_p é um grafo completo. A prova desta proposição é similar a da anterior e, por isto, será omitida.

Proposição 2.3. *Sejam $p \geq 2$ e $a \geq 1$ inteiros. Dado um grafo conexo p -regular H_p com t vértices, sejam $p = \mu_1 > \mu_2 \geq \dots \geq \mu_t$ os seus autovalores. Então, o grafo $H_p \sqcap B(a; 1)$ é integral se, e somente se, para cada $1 \leq i \leq t$, μ_i é inteiro e existe um inteiro positivo q_i tal que*

$$a = q_i(\mu_i + q_i).$$

Neste caso, seus autovalores não nulos são q_i e $\mu_i + q_i$, para $i = 1, 2, \dots, t$.

Este resultado mostra a complexidade de se obter um grafo H_p -broom-like integral, uma vez que devemos solucionar um sistema de equações diofantinas não lineares e não homogêneas. (Para soluções de equações diofantinas veja Cohen (2007)). Na subsequente subseção aplicamos esta proposição a fim de obter famílias de grafos H_p -broom-like integrais, onde H_p é o grafo bipartido completo $K_{p,p}$.

2.1. Famílias de grafos $K_{p,p}$ -broom-like integrais

No que segue estaremos interessados em obter grafos $K_{p,p} \sqcap B(a; 1)$ integrais. Sendo $\text{Spec}(K_{p,p}) = (p^{(1)}, 0^{(2p-2)}, -p^{(1)})$, da Proposição 2.3 temos que $K_{p,p} \sqcap B(a; 1)$ será integral se, e somente se, existirem inteiros positivos q_1, q_2 e q_3 tais que

$$a = q_1(p + q_1), \quad a = q_2^2 \quad \text{e} \quad a = q_3(-p + q_3).$$

Claramente, existe um inteiro q_1 satisfazendo $a = q_1(p + q_1)$ se, e somente se, existe um inteiro q_3 tal que $a = q_3(-p + q_3)$, bastando, para tal, considerar $q_3 = -q_1$. Assim, se considerarmos $a = x^2$, para algum inteiro positivo x temos:

Lema 2.2. *Dados inteiros $p \geq 2$ e $x \geq 1$, o grafo $K_{p,p} \sqcap B(x^2; 1)$ é integral se, e somente se, existir um inteiro positivo y tal que*

$$x^2 = y(p + y).$$

Neste caso, seu índice é $y + p$ e os demais autovalores distintos são: $y, -y$ e $-y - p$, com multiplicidades iguais a 1; x e $-x$, com multiplicidades iguais a $2p - 2$; 0 , com multiplicidade $2p(x^2 - 1)$.

Observação 2.3. *O menor grafo integral $K_{p,p} \sqcap B(a; 1)$ é dado por $p = 3$ e $a = 4$. De fato, do lema acima, $a = x^2$ e $x^2 = y(p + y)$, para certos inteiros $p \geq 2, x \geq 1$ e $y \geq 1$. Logo, $a \geq 4$. Para $a = 4$, a equação $4 = y(p + y)$ tem uma única solução, dada por $y = 1$ e $p = 3$.*

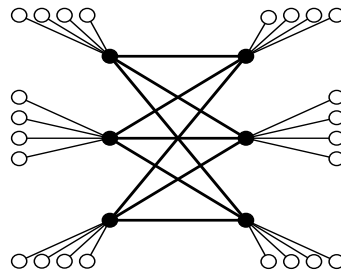


Figura 5. O espectro de $K_{3,3} \square B(4;1)$ é $(4^{(1)}, 2^{(4)}, 1^{(1)}, 0^{(18)}, -1^{(1)}, -2^{(4)}, -4^{(1)})$

Na Figura 5 ilustramos o grafo $K_{3,3} \square B(4;1)$ e seu espectro.

Aplicando o Lema 2.2, obtemos uma família infinita de grafos $K_{p,p} \square B(a;1)$ integrais, observando que, para $y = 1$ e $p = x^2 - 1$, temos $x^2 = y(p + y)$. O grafo $K_{3,3} \square B(4;1)$ pertence a esta família, sendo, portanto, o menor grafo desta.

Corolário 2.2. Para cada inteiro $x \geq 2$, o grafo $K_{x^2-1, x^2-1} \square B(x^2; 1)$ é integral, e tem índice x^2 .

Como a ordem do grafo $K_{x^2-1, x^2-1} \square B(x^2; 1)$ é $n = 2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 2(x^4 - 1)$, vemos que os grafos desta família têm uma quantidade grande de vértices: 30, 160, 510, 1248, etc.

No Corolário 2.3, provamos que existe pelo menos um grafo $K_{p,p} \square B(a;1)$ integral, tanto para $p = 3$ como para cada $p \geq 5$. Antes, porém, observamos:

Observação 2.4. Dados inteiros positivos a, p, x e y satisfazendo as equações $a = x^2$ e $x^2 = y(p + y)$, então ak^2, pk, xk e yk satisfazem as mesmas equações, para todo inteiro positivo k .

Como um inteiro $p \geq 3$, e distinto de 4, ou é múltiplo de um número ímpar ou é uma potência 2^z , para $z \geq 3$, temos que p é da forma sk , onde $s \geq 3$ é ímpar, ou da forma $8k$. Deste modo, da observação acima e do Lema 2.2, exibimos outras duas famílias de grafos integrais.

Corolário 2.3. Para cada par de inteiros p e a satisfazendo uma das condições abaixo, o grafo $K_{p,p} \square B(a;1)$ é integral:

- (i) $p = 8k$ e $a = 9k^2$, onde k é inteiro positivo. Neste caso, o índice é $\lambda = 9k$.
- (ii) $p = sk$ e $a = k^2 \left(\frac{s^2-1}{4}\right)^2$, onde k e s são inteiros positivos, e $s \geq 3$ é ímpar. Neste caso, o índice é $\lambda = k \cdot \left(\frac{3s-1}{2}\right)$.

PROVA. Do Lema 2.2, basta verificar, para cada item, que existem inteiros positivos x e y tais que $a = x^2$ e $a = y(p + y)$. Neste caso, o grafo é integral e seu índice é $\lambda = p + y$:

Se $p = 8k$ e $a = 9k^2$, verificamos, para $x = 3k$ e $y = k$, que $a = x^2$, $p + y = 9k$ e $y(p + y) = 9k^2 = a$.

Caso $p = sk$ é múltiplo de um ímpar $s \geq 3$ e $a = k^2 \left(\frac{s^2-1}{4}\right)^2$, consideramos $x = k \left(\frac{s^2-1}{4}\right)$ e $y = k \left(\frac{s-1}{2}\right)^2$, obtendo $a = x^2$ e $p + y = sk + k \left(\frac{s-1}{2}\right)^2 = k \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$.

Calculando $y(p + y) = k^2 \left(\frac{s-1}{2}\right)^2 \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$, vemos que $y(p + y) = a$. □

Note que os grafos da primeira família deste corolário, $K_{8k,8k} \sqcap B(9k^2; 1)$, possuem uma quantidade elevada de vértices, a saber, $n = 16k(9k^2 + 1)$. O menor grafo desta, dado por $K_{8,8} \sqcap B(9; 1)$, tem 160 vértices. Seu espectro é

$$\text{Spec}(K_{8,8} \sqcap B(9; 1)) = (9^{(1)}, 3^{(14)}, 1^{(1)}, 0^{(180)}, -1^{(1)}, -3^{(14)}, -9^{(1)}).$$

O terceiro menor grafo desta família é dado por $K_{24,24} \sqcap B(81; 1)$, com 3936 vértices. Seu espectro é

$$\text{Spec}(K_{24,24} \sqcap B(81; 1)) = (27^{(1)}, 9^{(46)}, 3^{(1)}, 0^{(3840)}, -3^{(1)}, -9^{(46)}, -27^{(1)}).$$

Destes, somente o primeiro satisfaz o Corolário 2.2. Aplicando este corolário para $p = 24$, obtemos um outro grafo integral, $K_{24,24} \sqcap B(25; 1)$, com 1248 vértices e espectro

$$\text{Spec}(K_{24,24} \sqcap B(25; 1)) = (25^{(1)}, 5^{(46)}, 1^{(1)}, 0^{(1152)}, -1^{(1)}, -5^{(46)}, -25^{(1)}).$$

Isto nos mostra que, para um mesmo p , podem existir mais de um grafo $K_{p,p}$ -broom-like integral.

Também os grafos da segunda família do Corolário 2.3, $K_{sk,sk} \sqcap B\left(k^2 \left(\frac{s^2-1}{4}\right)^2; 1\right)$ têm um grande número de vértices $n = 2sk \left[k^2 \left(\frac{s^2-1}{4}\right)^2 + 1 \right]$. De fato, $n = 30, 370, 2030, \text{ etc.}$ O menor destes é o grafo ilustrado pela Figura 5. O segundo menor é dado por $K_{5,5} \sqcap B(36; 1)$ e tem espectro

$$\text{Spec}(K_{5,5} \sqcap B(36; 1)) = (9^{(1)}, 6^{(8)}, 4^{(1)}, 0^{(350)}, -4^{(1)}, -6^{(8)}, -9^{(1)}).$$

Observamos, ainda, que se p é produto de dois ímpares, podemos exhibir, para este valor de p , dois grafos integrais distintos, pertencentes a esta segunda família. Por exemplo, para $p = 15 = 3 \cdot 5$ temos os grafos:

$K_{15,15} \sqcap B(100; 1)$, com 3030 vértices e espectro

$$\text{Spec}(K_{15,15} \sqcap B(100; 1)) = (20^{(1)}, 10^{(28)}, 5^{(1)}, 0^{(2970)}, -5^{(1)}, -10^{(28)}, -20^{(1)});$$

$K_{15,15} \sqcap B(324; 1)$, com 9750 vértices e espectro

$$\text{Spec}(K_{15,15} \sqcap B(324; 1)) = (27^{(1)}, 18^{(28)}, 12^{(1)}, 0^{(9690)}, -12^{(1)}, -18^{(28)}, -27^{(1)}).$$

Por último, ressaltamos que, se $p = 2$ ou $p = 4$, não existem grafos $K_{p,p} \sqcap B(a; 1)$ integrais:

Observação 2.5. Para qualquer $a \geq 1$, os grafos $K_{2,2} \sqcap B(a; 1)$ e $K_{4,4} \sqcap B(a; 1)$ não são integrais, uma vez que as equações $x^2 = y(2 + y)$ e $x^2 = y(4 + y)$ não admitem solução inteira positiva.

Na próxima seção estudamos o problema de ordenação de grafos através de seus índices.

3. Ordenando grafos H_p -broom-like por meio de seus índices

Nesta seção mostramos que, dado um grafo H_p conexo p -regular ($p \geq 2$), a classe dos grafos H_p -broom-like com n vértices é total e estritamente ordenada por seus índices. Logo, não existe, nesta classe, par de grafos coespectrais não isomorfos.

Note que, se H_p tem t vértices, então os grafos desta classe possuem $n = t \cdot c$ vértices, onde $c \geq 2$. Assim, a classe é formada pelos grafos $H_p \sqcap B(a; r)$, tais que $a + r = c$. No Teorema 3.1, provamos:

$$\lambda(H_p \sqcap B(c; 1)) > \lambda(H_p \sqcap B(c-1; 2)) > \dots > \lambda(H_p \sqcap B(1; c-1)).$$

Em particular, obtemos uma cota superior e uma cota inferior para o índice de um grafo H_p -broom-like:

$$\lambda(H_p \sqcap B(1; r+a-1)) \leq \lambda(H_p \sqcap B(a; r)) \leq \lambda(H_p \sqcap B(a+r-1; 1)). \quad (3)$$

No caso em que $p = 2$, estas cotas podem ser obtidas pelo Teorema 3.2 de Belardo et al. (2006). No caso em que $p = 1$ e $a \geq 2$, a cota superior foi determinada por Patuzzi et al. (2012a).

Teorema 3.1. *Dados inteiros $p \geq 2$, $a \geq 2$ e $r \geq 1$, e um grafo H_p conexo p -regular, temos:*

$$\lambda(H_p \sqcap B(a-1; r+1)) < \lambda(H_p \sqcap B(a; r)).$$

PROVA. Primeiramente analisamos o caso em que $r = 1$:

Do Lema 2.1, temos que o índice β_1 de $H_p \sqcap B(a; 1)$ é a maior raiz de $p_1(x) = x^2 - px - a$. Por sua vez o índice β_2 de $H_p \sqcap B(a-1; r+1)$ será a maior raiz de $p_2(x) = x^3 - px^2 - (a+1)x + (a-1)p$. De fato, de Cvetković et al. (2010), sendo t o número de vértices de H_p , z_2 é a maior raiz de

$$q(x) = [p_{S_a}(x)]^t \cdot p_{H_p} \left(\frac{p_{S_{a+1}}(x)}{p_{S_a}(x)} \right).$$

Como $p_{S_a}(x) = x^{a-2}[x^2 - (a-1)]$ e β_2 é uma raiz simples, concluímos que β_2 é a maior raiz de $p_{H_p} \left(x \cdot \frac{x^2-a}{x^2-a+1} \right)$. Sendo H_p um grafo p -regular, β_2 satisfará a equação $x \cdot \frac{x^2-a}{x^2-a+1} = p$. Portanto, será a maior raiz de $p_2(x) = x \cdot (x^2-a) - p(x^2-a+1) = x^3 - px^2 - ax + (a-1)p$.

Observamos que $p_2(x) = x \cdot p_1(x) + (a-1)p$. Logo, $0 = p_2(\beta_2) = \beta_2 \cdot p_1(\beta_2) + (a-1)p$ e, portanto, $\beta_2 \cdot p_1(\beta_2) = -(a-1)p$ é negativo. E isto implica em $p_1(\beta_2)$ ser negativo. Donde se conclui que $\beta_2 < \beta_1$.

Finalmente supomos que $r \geq 2$. Neste caso, aplicamos um resultado conhecido de Hoffman and Smith (1975), também encontrado em An-Chang et al. (2004), no qual se compara o índice de um grafo conexo G com o grafo resultante G_{uv} pela subdivisão da aresta uv : se esta pertencer a um caminho interno de G e $G \neq K_2 \sqcap B(2; r)$, então $\lambda(G_{uv}) < \lambda(G)$. (Um caminho interno $P = w_1 w_2 \dots w_s$ do grafo G é um subgrafo induzido isomorfo a P_{s+1} tal que seus extremos w_1 e w_s possuem, em G , graus maiores que 2, enquanto os demais vértices w_i tem grau, em G , igual a 2.)

Seja t é o número de vértices de H_p . Como $p \geq 2$, o grafo $H_p \square B(a; r)$ possui t caminhos internos, a saber, os caminhos $P_r = v_1 v_2 \dots v_r$ de cada cópia de $B(a; r)$. Subdividindo a aresta $v_1 v_2$ de cada um destes caminhos, obtemos o grafo $H_p \square B(a; r + 1)$ cujo índice $\bar{\beta}_2$ é menor que o índice β_1 de $H_p \square B(a; r)$. Como o grafo $H_p \square B(a - 1; r + 1)$ é subgrafo próprio e conexo do grafo, também conexo, $H_p \square B(a; r + 1)$, concluímos que o índice β_2 de $H_p \square B(a - 1; r + 1)$ é menor que $\bar{\beta}_2$. Donde, $\beta_2 < \beta_1$. \square

Na Figura 6 ilustramos a ordenação dada por este teorema, na classe dos grafos $K_{3,3} \square B(a; r)$ tais que $a + r = 5$, ou seja, com 30 vértices. Exibimos os grafos desta classe com seus respectivos índices.

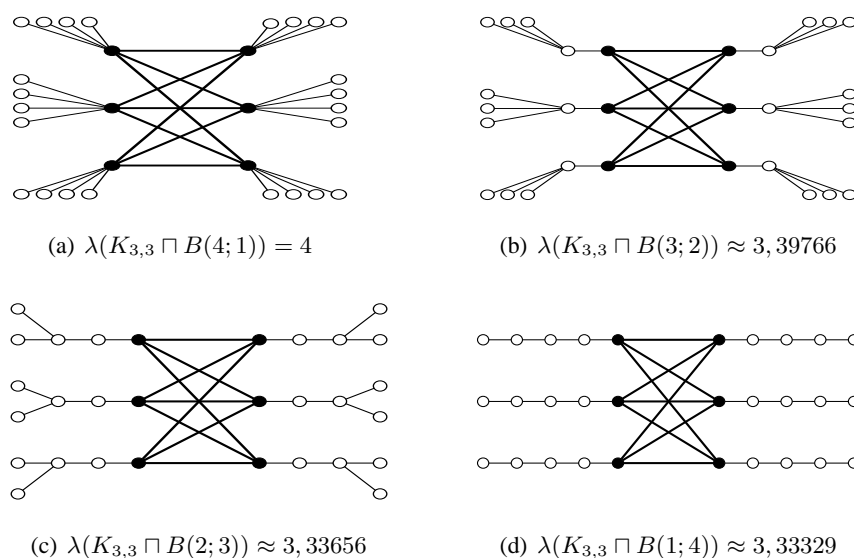


Figura 6. Ordenação dos grafos da classe $K_{3,3} \square B(a; r)$ com 30 vértices

4. Observações finais

Como observado, tanto o problema de obter grafos integrais, como o problema de determinar se dois grafos são isomorfos, são considerados difíceis, mesmo em classes restritas. Neste trabalho obtemos resultados para cada um destes problemas na classe de grafos H_p -broom-like.

Com relação ao primeiro, exibimos três famílias infinitas de grafos $K_{p,p}$ -broom-like integrais, com $r = 1$, ou seja, da forma $K_{p,p} \square B(a; 1)$. Observamos que cada uma destas famílias possui uma grande quantidade de vértices e, portanto, torna mais difícil uma busca computacional de tais grafos integrais. Mesmo fixado o grafo H_p , o estudo da integralidade de $H_p \square B(a; r)$ se torna mais complexo se consideramos $r \geq 2$, uma vez que se desconhece uma fórmula exata para se calcular os seus autovalores e que seja dada em função dos parâmetros a e r , e em função dos autovalores μ_i de H_p .

Com relação ao segundo, o problema foi totalmente resolvido pelo Teorema 3.1. Ainda, da ordenação dada por este teorema, concluímos que um grafo H_p -broom-like com n vértices é unicamente determinado por seu índice. Como futura investigação, achamos interessante abordar o problema de ordenação de grafos numa classe mais abrangente, aonde fixamos somente o número t de vértices do grafo conexo p -regular.

Referências

- An-Chang, Tian, F., and Yu, A.** (2004). On the index of bicyclic graphs with perfect matchings. *Discrete Mathematics*, 283:51–59.
- Balińska, K., Cvetković, D., Radosavljević, Z., Simić, S., and Stevanović, D.** (2002). A survey on integral graphs. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, 13:42–65.
- Barrière, L., Comellas, F., Dalfó, C., and Fiol, M. A.** (2009). The hierarchical product of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157 (1):36–48.
- Belardo, F., Li-Marzi, E., and Simić, S.** (2006). Some results on the index of unicyclic graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 416:1048–1059.
- Belardo, F., Li-Marzi, E., and Simić, S.** (2010). Trees with minimal index and diameter at most four. *Discrete Mathematics*, 310:1708–1714.
- Brouwer, A., Del-Vecchio, R., Jacobs, D., Trevisan, V., and Cybele, C.** (2011). Integral trees homeomorphic to a double star. *Bulletin of the ICA*, 61:77–80.
- Cohen, H.** (2007). Number theory volume I: Tools and diophantine equations. In *Graduate Texts in Mathematics*, v. 239. New York, Springer.
- Cvetković, D., Rowlinson, P., and Simić, S.** (2010). *An introduction to the graph spectra*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Cvetković, D. and Simić, S.** (2011). Graph spectra in computer science. *Linear Algebra and its Applications*, 434:1545–1562.
- Fortin, S.** (1996). The graph isomorphism problem. Technical Report TR 96–20, University of Alberta.
- Godsil, C. and Royle, G.** (2001). *Algebraic graph theory*. New York, Springer-Verlag.
- Harary, F. and Schwenk, A.** (1974). Which graphs have integral spectra? In *Lecture Notes of Mathematics, Graphs and Combinatorics*, v. 406, pp. 45–51. Berlin, Springer-Verlag.
- Hoffman, A. and Smith, J.** (1975). On the spectral radii of topologically equivalent graphs. In *Recent advances in graph theory*, pp. 273–281. New York, Academia Praha.
- Lagarias, J.** (1979). Succinct certificates for the solvability of binary quadratic diophantine equations. *Proceedings of 20th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 47–54.
- Patuzzi, L., Freitas, M., and Del-Vecchio, R.** (2012a). Indices for special classes of trees. In *Latin Ibero-American Spectral Graph Theory Workshop, September 27–28*, Rio de Janeiro, Brasil. Submetido à revista *Linear Algebra and Applications*.
- Patuzzi, L., Freitas, M., and Del-Vecchio, R.** (2012b). Integer index of n-broom-like graphs. In *Latin American Workshop on Cliques in Graphs, November 05–07*, Buenos Aires, Argentina. Submetido à revista *Matemática Contemporânea*.
- Tyomkina, M. and Uzzell, A.** (2012). A turan-type problem on distances in graphs. *arXiv:1011.2450v2[math.CO]*.
- Wang, L.** (2005). *Integral trees and integral graphs*. PhD thesis, University of Twente.