

Coloração orientada de grafos com grau máximo 3

Hebert Coelho

INF/UFG e COPPE/UFRJ, Brasil
UFG, Goiânia-GO. UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil
hebert@inf.ufg.br

Luerbio Faria

DCC/UERJ
UERJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil
luerbio@cos.ufrj.br

Sylvain Gravier

Institut Fourier, Maths à Modeler team, CNRS
UJF, St Martin d'Hères, França
sylvain.gravier@imag.fr

Sulamita Klein

Instituto de Matemática e COPPE/Sistemas
UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil
sula@cos.ufrj.br

Resumo

O problema da coloração orientada foi introduzido independente por Courcelle (1994), e Raspaud e Sopena (1994). Seja $\vec{G} = (V, A)$ um grafo orientado e $xy, zt \in A(\vec{G})$, uma coloração orientada de \vec{G} é uma função c que atribui cores aos vértices de \vec{G} , tal que $c(x) \neq c(y)$ e além disso, se $c(x) = c(t)$ então $c(y) \neq c(z)$. Sopena e Vignal (2001) provaram que se \vec{G} é um grafo orientado com $\Delta \leq 3$, então $\chi_o(\vec{G}) \leq 11$. Sopena (1997) conjecturou que se \vec{G} é um grafo orientado tal que $\Delta \leq 3$ e G é conexo, então $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$. Neste trabalho, demonstramos que existe um torneio \vec{R} com 8 vértices tal que, se \vec{G} é um grafo orientado acíclico com $\Delta \leq 3$, então \vec{G} é \vec{R} -colorível, também apresentamos um algoritmo de tempo linear para computar uma R -coloração para \vec{G} . Adicionalmente, apresentamos alguns resultados computacionais que são uma evidência positiva para suportar a conjectura de Sopena (1997).

Palavras-Chave: Grafo Orientado, Coloração Orientada, Grau máximo 3.

Abstract

The oriented coloring was introduced independently by Courcelle (1994), and Raspaud and Sopena (1994). Let $\vec{G} = (V, A)$ be an oriented graph and $xy, zt \in A(\vec{G})$, an oriented coloring of \vec{G} is a function c that assigns colors to the vertices of \vec{G} , such that $c(x) \neq c(y)$ and moreover, if $c(x) = c(t)$ then $c(y) \neq c(z)$. Sopena and Vignal (2001), exhibited a proof that if \vec{G} is an oriented graph with $\Delta \leq 3$, then $\chi_o(\vec{G}) \leq 11$. Sopena (1997) posed a conjecture that if \vec{G} is an oriented graph such that $\Delta \leq 3$ and G is connected, then $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$. In this work, we prove that there is a tournament \vec{R} with 8 vertices such that if \vec{G} is an acyclic oriented graph with $\Delta \leq 3$, then \vec{G} is \vec{R} -colorable, also we provide a polynomial time algorithm to compute an R -coloring for \vec{G} . Finally, we present some computational results that are a positive evidence to support the conjecture of Sopena (1997).

Keywords: Oriented Graph, Oriented Coloring, Maximum degree 3.

1 Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo, a *orientação* de uma aresta $e \in E(G)$ é a substituição de e por um arco. Um *grafo orientado* $\vec{G} = (V, A)$ é obtido de um grafo simples G pela orientação de cada aresta, dizemos que G é o grafo subjacente de \vec{G} . Um *torneio* T_n com n vértices é a orientação de cada aresta de um grafo completo K_n . Um torneio é *transitivo* se e somente se sempre que uv e vw são arcos, uw também é um arco.

Neste trabalho, denotamos o *mínimo e máximo grau de entrada*, e o *mínimo e máximo grau de saída* de \vec{G} respectivamente por $\delta^-(\vec{G})$, $\Delta^-(\vec{G})$, $\delta^+(\vec{G})$ e $\Delta^+(\vec{G})$. Seja $x \in V(\vec{G})$ e G o grafo subjacente de \vec{G} . A *vizinhança aberta* de x é o conjunto $N_G(x) = \{y \in V(G); xy \in E(G)\}$. O *grau* $d_G(x)$ é o número de arestas incidentes a x no grafo G , e o *grau de saída* $d_G^+(x)$ é o número de arcos $xy \in A(\vec{G})$. Nós consideramos $\delta(\vec{G}) = \delta(G) = \delta$ e $\Delta(\vec{G}) = \Delta(G) = \Delta$, onde G é o grafo subjacente de \vec{G} .

O problema da coloração orientada foi introduzido independente por Courcelle (1994), e Raspaud e Sopena (1994). Seja \vec{G} um grafo orientado, $xy, zt \in A(\vec{G})$ e $C = \{1, 2, \dots, k\}$ um conjunto de cores. Uma *k-coloração orientada* de \vec{G} é uma função $c : V(\vec{G}) \rightarrow C$, tal que

- i) $c(x) \neq c(y)$;
- ii) $c(x) = c(t) \Rightarrow c(y) \neq c(z)$.

O número cromático orientado $\chi_o(\vec{G})$ é o menor inteiro k , tal que \vec{G} admita uma *k-coloração orientada*. Em uma *k-coloração orientada* de \vec{G} , se existe um arco de um vértice com a cor i para um vértice com a cor j , então não existe um arco de um vértice com a cor j para um vértice com a cor i . Observamos também, que o caminho direcionado \vec{C} com 3 vértices, $x, y, z \in V(\vec{C})$ e $xy, yz \in A(\vec{C})$, precisa de 3 cores distintas em uma coloração orientada.

Sejam dois grafos orientados \vec{G}_1 e \vec{G}_2 , um *homomorfismo* de \vec{G}_1 em \vec{G}_2 é uma função $f : V(\vec{G}_1) \rightarrow V(\vec{G}_2)$, tal que se $xy \in A(\vec{G}_1)$, então $f(x)f(y) \in A(\vec{G}_2)$. Dado um homomorfismo f de \vec{G}_1 em \vec{G}_2 , uma coloração orientada para \vec{G}_2 que use k cores define uma coloração orientada para \vec{G}_1 , onde v ganha a mesma cor em \vec{G}_1 que u tem em \vec{G}_2 , desde que $f(v) = u$. Se existe um homomorfismo f de \vec{G}_1 em \vec{G}_2 , então \vec{G}_2 é chamado de *digrafo cor* para \vec{G}_1 . Assim \vec{G} tem uma *k-coloração orientada* se e somente se existe um torneio \vec{T} com k vértices, tal que \vec{G} tem um homomorfismo para \vec{T} . Se \vec{G} tem um homomorfismo para \vec{T} , então \vec{G} é *\vec{T} -colorível*. Esta definição é uma generalização mais natural do número cromático no caso não direcionado.

Podemos estender a definição de número cromático orientado a grafos não direcionados. O número cromático orientado de um grafo G é o máximo de $\chi_o(\vec{G})$ para qualquer orientação \vec{G} de G . Assim, um limite inferior para o número cromático orientado de um grafo G pode ser obtido escolhendo uma orientação qualquer \vec{G} de G e determinando $\chi_o(\vec{G})$.

Nas duas últimas décadas o problema da coloração orientada foi estudado por muitos autores, veja uma revisão sobre o assunto em Sopena (2001). Dado um grafo orientado \vec{G} e um inteiro positivo k , o problema da coloração orientada (OCN_k) consiste de determinar se existe uma *k-coloração orientada* de \vec{G} . Pelo grande interesse, a complexidade do problema OCN_k tem sido estudada exaustivamente. Klostermeyer e MacGillivray (2004) provaram usando o resultado de Bang-Jensen et al. (1988), que OCN_4 é NP-completo. Eles estabeleceram uma dicotomia P versus NP-completo: OCN_k é polinomial se $k \leq 3$ e NP-completo se $k > 3$. Dois artigos recentes apresentaram provas para NP-completude, veja Culus e Demange (2006) e Ganian e Hliněný (2010), ambos usando o problema NP-completo 3-SAT, cada um adicionando algumas melhorias nos resultados preliminares. Culus e Demange

(2006) apresentaram 2 resultados: que OCN_4 é NP-completo em grafos orientados acíclicos com $\Delta = \max(p + 3; 6)$, e que OCN_4 é NP-completo em grafos bipartidos orientados com $\Delta = \max(p + 3; 7)$, onde p denota o número máximo de ocorrências de um literal. Recentemente, Ganian e Hliněný (2010) melhoraram o resultado de acíclico de Culus e Demange provando que OCN_4 é NP-completo para grafos conexos orientados acíclicos com $\Delta = \max(p + 2; 4)$. Coelho et al. (2013) provou que OCN_4 é NP-completo mesmo quando \vec{G} é conexo, planar, bipartido, acíclico com $\Delta \leq 3$.

Neste trabalho apresentamos um limite superior e um algoritmo para determinar a coloração orientada de grafos orientados acíclicos com $\Delta \leq 3$. Sopena (1997) provou que se \vec{G} é um grafo orientado com $\Delta \leq 3$, então $\chi_o(\vec{G}) \leq 16$. Sopena e Vignal (2001) provaram que se \vec{G} é um grafo orientado com $\Delta \leq 3$, então $\chi_o(\vec{G}) \leq 11$. Sopena (1997) conjecturou que se \vec{G} é um grafo orientado tal que $\Delta \leq 3$ e G é conexo, então $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$. Nós provamos que existe um torneio \vec{R} com 8 vértices tal que, se \vec{G} é um grafo orientado acíclico com $\Delta \leq 3$, então \vec{G} é \vec{R} -colorível, também apresentamos um algoritmo de tempo linear para computar uma R -coloração para \vec{G} . Adicionalmente, apresentamos alguns resultados computacionais que são uma evidência positiva para suportar a conjectura de Sopena (1997).

2 O Digrafo de cor \vec{R}

Seja \vec{G} um grafo orientado com $\Delta \leq 3$. Nesta seção, apresentamos um grafo orientado \vec{R} com 8 vértices tal que \vec{G} admite uma \vec{R} -coloração. Para descrever o grafo orientado \vec{R} , primeiro vamos considerar a definição do torneio de Paley. O torneio de Paley é utilizado em muitos artigos sobre limites para o número cromático orientado. Seja p uma potência de primo tal que $p \equiv 3 \pmod{4}$. O Torneio de Paley \vec{QR}_p é um grafo orientado com conjunto de vértices $V(\vec{QR}_p) = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ tal que $xy \in A(\vec{QR}_p)$ se e somente se $y - x$ é um resíduo quadrático diferente de p . Aqui estamos interessados apenas em \vec{QR}_7 , que é o torneio com conjunto de vértices $V(\vec{QR}_7) = \{0, 1, \dots, 6\}$ tal que $xy \in A(\vec{QR}_7)$ se e somente se $y - x \equiv 1, 2$ ou $4 \pmod{7}$. Por conveniência, oferecemos um desenho para o Torneio de Paley \vec{QR}_7 na Figura 1.

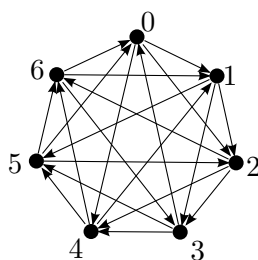


Figura 1: Torneio de Paley com 7 vértices \vec{QR}_7 .

Existem uma infinidade de grafos acíclicos orientados com $\Delta \leq 3$ que não são \vec{QR}_7 -coloríveis. Observe que o torneio transitivo \vec{T}_4 , veja Figura 2(a), é um grafo orientado acíclico com $\Delta(\vec{T}_4) = 3$, que não é \vec{QR}_7 -colorível. Note que cada vértice $v \in V(\vec{QR}_7)$ tem 3 sucessores, todavia os 3 sucessores de v sempre formam um ciclo direcionado, o mesmo ocorre com os predecessores de v . Assim, não existe homomorfismo de \vec{T}_4 em \vec{QR}_7 desde de que 3 sucessores do vértice $v_1 \in V(\vec{T}_4)$ definem um grafo acíclico. Na Figura 2(b) apresentamos um grafo orientado acíclico \vec{G} que não é \vec{QR}_7 -colorível. Com o grafo \vec{G} podemos construir uma família infinita de grafos com $\Delta \leq 3$ que não são \vec{QR}_7 -coloríveis, por exemplo, na Figura 2(c) basta definir qualquer orientação \vec{F} para F e identificar pelo menos um vértice

de grau 1 em \vec{F} com o vértice v_5 de uma cópia do grafo orientado \vec{G} da Figura 2(b).

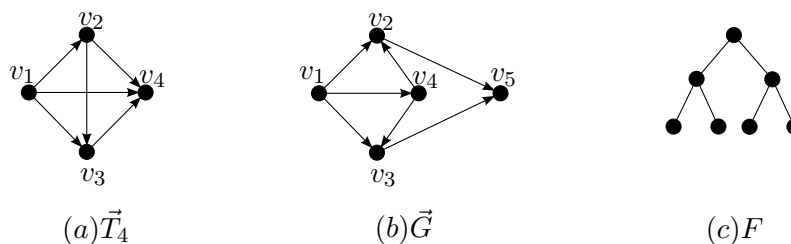


Figura 2: (a) Torneio transitivo \vec{T}_4 , (b) Grafo orientado \vec{G} com $\Delta(\vec{G}) \leq 3$, ambos \vec{T}_4 e \vec{G} não são \vec{QR}_7 -coloríveis. (c) Grafo F onde identificamos algum vértice de grau 1 por $v_5 \in V(\vec{G})$.

Construímos o grafo \vec{R} de \vec{QR}_7 pela adição do vértice s , e o conjunto de arcos $\vec{S} = \{sv : v \in V(\vec{QR}_7)\}$. Consideramos as cores $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ designadas para os vértices de \vec{QR}_7 e a cor 7 designada para o vértice s .

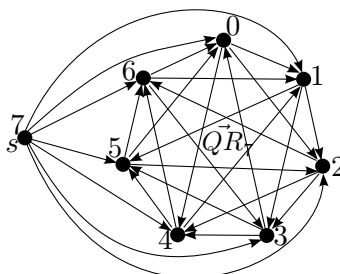


Figura 3: Grafo orientado \vec{R} com 8 vértices, uma fonte s mais \vec{QR}_7 .

3 \vec{R} -coloração de um grafo orientado acíclico \vec{G} com $\Delta(\vec{G}) \leq 3$

Nesta seção apresentamos no Teorema 3.4 uma demonstração de que \vec{G} é \vec{R} -colorível utilizando indução no número de vértices, assim obtemos um algoritmo linear para atribuir uma \vec{R} -coloração para \vec{G} .

Lema 3.1. Se \vec{QR}_7 é o torneio de Paley com 7 vértices, então para cada arco $xy \in A(\vec{QR}_7)$ existem $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que $ax, ay, xb, by, cx, yc, xd, yd \in A(\vec{QR}_7)$.

Foi demonstrado em Sopena (1997) que \vec{QR}_7 é o menor grafo orientado que satisfaz a propriedade do Lema 3.1.

Seja \vec{G} um grafo orientado, $u, v, w \in V(\vec{G})$, e ϕ uma \vec{R} -coloração para $\vec{G} \setminus \{w\}$, onde u e v recebem as cores $\phi(u), \phi(v)$ em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A função $triple(w, \phi(u), \phi(v)) = k$ é a menor cor k em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tal que k tem a mesma relação de adjacência com $\phi(u)$ e $\phi(v)$ em \vec{QR}_7 , que w tem com u e v em \vec{G} . Vamos acompanhar um exemplo utilizando a Figura 1. Se $wu, vw \in A(\vec{G})$, $\phi(u) = 0$ e $\phi(v) = 1$, então $triple(w, \phi(u), \phi(v)) = 3$. Note que as cores incidentes em 0 são 3, 5, 6, enquanto as cores em que 1 incide são 2, 3 e 5.

Lema 3.2. Seja ϕ uma \vec{R} -coloração de um grafo acíclico orientado \vec{G} com $\Delta \leq 3$. Se existe um vértice $x \in V(\vec{G})$, tal que $d_G^+(x) = 3$ e $\phi(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então uma nova \vec{R} -coloração ϕ' pode ser definida a partir de ϕ pela substituição da cor $\phi(x)$ pela cor $\phi'(x) = 7$.

Demonstração. Veja que o vértice s é predecessor de todos os vértices de $V(\vec{R}) \setminus s \subseteq V(Q\vec{R}_7)$. Como $d_G^+(x) = 3$, não existe conflito se substituirmos $\phi(x)$ pela cor $\phi'(x) = 7$. \square

Lema 3.3. *Seja ϕ uma \vec{R} -coloração de uma grafo orientado acíclico \vec{G} com $\Delta \leq 3$. Se existe um vértice $x \in V(\vec{G})$, tal que $d_G(x) \leq 2$ e $\phi(x) = 7$, então uma nova \vec{R} -coloração ϕ' pode ser definida de ϕ substituindo a cor $\phi(x)$ pela cor $\phi'(x)$ em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

Demonstração. Se $\phi(x) = 7$ e $d_G(x) \leq 2$, então x é uma fonte. Se $d_G(x) = 0$, então qualquer cor em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pode ser atribuída para x . Suponha que $1 \leq d_G(x) \leq 2$. Seja $N_G(x) = \{u_1, u_{d_G(x)}\}$. Pelo Lema 3.1, a cor: *triple* $(x, \phi(u_1), \phi(u_{d_G(x)}))$ em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pode ser atribuída para x . \square

Teorema 3.4. *Se \vec{G} é um grafo acíclico orientado, $\Delta \leq 3$, então existe uma \vec{R} -coloração para \vec{G} .*

Demonstração. Nós demonstramos por indução no número de vértices $n = |V(\vec{G})|$. Por hipótese \vec{G} é acíclico, então existe pelo menos uma fonte $s \in V(\vec{G})$. Se $n = 1$, então atribuímos qualquer cor de $Q\vec{R}_7$ para este vértice. Suponha que para qualquer $n \leq p$, $p \geq 1$, a afirmação é verdadeira. Seja \vec{G} um grafo orientado acíclico com $\Delta(\vec{G}) = 3$ e $n = p + 1$ vértices. Dividimos a demonstração em três casos de acordo com $d_G^+(s)$ para uma fonte s em \vec{G} :

1. $d_G^+(s) = 3$, onde $sa, sb, sc \in A(\vec{G})$, veja Figura 4 (a).

Construímos \vec{H} de \vec{G} pela remoção do vértice s de \vec{G} . Note que \vec{H} é acíclico desde que não inserimos um novo arco em \vec{G} . Por hipótese de indução atribuímos uma \vec{R} -coloração $\phi_{\vec{H}}$. Pelo Lema 3.3, podemos obter uma nova \vec{R} -coloração $\phi'_{\vec{H}}$ onde todo vértice de grau 2 recebe uma cor em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Agora usamos $\phi'_{\vec{H}}$ para definir uma coloração orientada $\phi_{\vec{G}}$. Como os vértices a, b, c tem grau 2 em \vec{H} , a cor 7 não foi atribuída a nenhum dos vértices a, b, c em $\phi'_{\vec{H}}$. Nós obtemos \vec{G} de \vec{H} retornando o vértice s e os seus respectivos arcos. Finalmente, fazemos $\phi_{\vec{G}}(s) = 7$, e obtemos uma \vec{R} -coloração válida para \vec{G} pois no grafo \vec{R} o vértice 7 aponta para qualquer cor em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

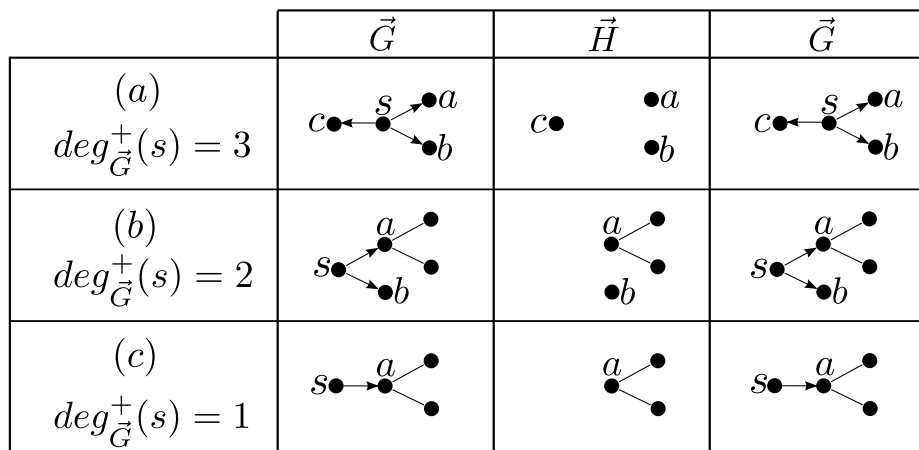


Figura 4: (a) Caso para $d_G^+(s) = 3$, (b) Caso para $d_G^+(s) = 2$, (c) Caso para $d_G^+(s) = 1$.

2. $d_G^+(s) = 2$, onde $sa, sb \in A(\vec{G})$, veja Figura 4 (b).

Construímos \vec{H} de \vec{G} pela remoção do vértice s de \vec{G} . Note que \vec{H} é acíclico desde

que não inserimos um novo arco em \vec{G} . Por hipótese de indução atribuímos uma \vec{R} -coloração $\phi_{\vec{H}}$ para \vec{H} . Agora usamos $\phi_{\vec{H}}$ para definir uma coloração orientada $\phi_{\vec{G}}$ para \vec{G} . Se $\phi(a) = 7$ ou $\phi(b) = 7$, então pelo Lema 3.3 podemos trocar a cor de a ou a cor de b por uma cor de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nós obtemos \vec{G} de \vec{H} retornando os vértices s e os arcos sa e sb , pelo Lema 3.1 podemos atribuir pelo menos uma cor em \vec{QR}_7 para s .

3. $d_G^+(s) = 1$, veja Figura 4 (c).

Suponha que $sa \in A(\vec{G})$. Nós construímos \vec{H} de \vec{G} pela remoção do vértice s de \vec{G} . Note que \vec{H} é acíclico desde que não inserimos um novo arco em \vec{G} . Por hipótese de indução atribuímos uma \vec{R} -coloração $\phi_{\vec{H}}$ para \vec{H} . Agora usamos $\phi_{\vec{H}}$ para definir uma coloração orientada $\phi_{\vec{G}}$ para \vec{G} . Se $\phi(a) = 7$, então pelo Lema 3.3 podemos alterar a cor de a por uma cor em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nós obtemos \vec{G} de \vec{H} retornando o vértice s e o arco sa , pelo Lema 3.1 podemos atribuir pelo menos uma cor em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para s .

□

A demonstração do Teorema 3.4 fornece uma método de tempo linear que admite um algoritmo de tempo linear para colorir um grafo acíclico orientado com $\Delta \leq 3$.

4 Algoritmo para uma \vec{R} -coloração de um grafo orientado acíclico \vec{G} com $\Delta(\vec{G}) = 3$

Nosso procedimento segue diretamente da demonstração do Teorema 3.4.

Agora descrevemos o procedimento $color(\vec{G}_i)$ que gera uma 8-coloração de um grafo orientado acíclico $\vec{G} = (V, A)$ com $\Delta \leq 3$ e $n = |V|$ vértices. Observamos que a execução começa com a chamada $color(\vec{G}_n)$, onde $\vec{G}_n = \vec{G}$.

Procedimento $color(\vec{G}_i)$;

Início

Se $(|V(\vec{G}_i)| > 1)$ **então**

Se existe fonte s_i em \vec{G}_i tal que $(d_{\vec{G}_i}(s_i) = 3)$ **então**

$color(\vec{G}_i \setminus s_i)$;

$\phi(s_i) \leftarrow 7$;

Se existe fonte s_i em \vec{G}_i tal que $(d_{\vec{G}_i}(s_i) = 2)$ **então**

$color(\vec{G}_i \setminus s_i)$;

{Seja $N_{\vec{G}_i}(s_i) = \{a_i, b_i\}$ };

$\phi(s_i) \leftarrow triple(s(i), \phi(a_i), \phi(b_i))$;

Se existe fonte s_i em \vec{G}_i tal que $(d_{\vec{G}_i}(s_i) = 1)$ **então**

$color(\vec{G}_i \setminus s_i)$;

{Seja $N_{\vec{G}_i}(s_i) = \{a_i\}$ };

$\phi(s_i) \leftarrow triple(s(i), \phi(a_i), \phi(a_i))$;

senão $\phi(v) \leftarrow 0$;

Fim;

Dada uma instância \vec{G}_n com n vértices, o algoritmo $color(\vec{G}_n)$ seleciona uma fonte $s \in V(\vec{G}_n)$ e remove esta fonte de \vec{G}_n , este processo se repete até que o grafo tenha apenas um vértice. Em seguida, o algoritmo retorna as fontes na ordem inversa da remoção com uma cor já atribuída. Em cada passo o algoritmo pode ter que verificar todos os vértices

para selecionar uma fonte, ou seja, a complexidade em cada passo é de $O(n)$. Lembramos que o valor de n é decrementado em cada passo e que precisamos de $n - 1$ passos, assim a complexidade do algoritmo é $O(n^2)$.

Na Figura 5 ilustramos a execução passo a passo do procedimento $color(\vec{G}_n)$ onde \vec{G}_n é a orientação do grafo de Petersen exibido na Figura 5(a). Para auxiliar o leitor, listamos as fontes s_n que são removidas em cada passo do algoritmo, que compreendem as Figuras de 5(a) até 5(i). Em (a) o vértice $s_{10} = v_3$. Em (b) o vértice $s_9 = v_{10}$. Em (c) o vértice $s_8 = v_9$. Em (d) o vértice $s_7 = v_8$. Em (e) o vértice $s_6 = v_2$. Em (f) o vértice $s_5 = v_1$. Em (g) o vértice $s_4 = v_7$. Em (h) o vértice $s_3 = v_6$. Em (i) o vértice $s_2 = v_5$. Em (j) temos o grafo \vec{G}_1 . Listamos também as cores que são atribuídas aos vértices, que compreendem as Figuras de 5(k) até 5(t). Em (k) $\phi(v_4) \leftarrow 0$. Em (l) $\phi(v_5) \leftarrow triple(v_5, \phi(v_4), \phi(v_4)) = 3$. Em (m) $\phi(v_6) \leftarrow triple(v_6, \phi(v_5), \phi(v_5)) = 1$. Em (n) $\phi(v_7) \leftarrow triple(v_7, \phi(v_6), \phi(v_6)) = 0$. Em (o) $\phi(v_1) \leftarrow triple(v_1, \phi(v_5), \phi(v_5)) = 1$. Em (p) $\phi(v_2) \leftarrow triple(v_2, \phi(v_1), \phi(v_1)) = 0$. Em (q) $\phi(v_8) \leftarrow triple(v_8, \phi(v_1), \phi(v_7)) = 6$. Em (r) $\phi(v_9) \leftarrow triple(v_9, \phi(v_4), \phi(v_8)) = 5$. Em (s) $\phi(v_{10}) \leftarrow 7$. Em (t) $\phi(v_3) \leftarrow 7$.

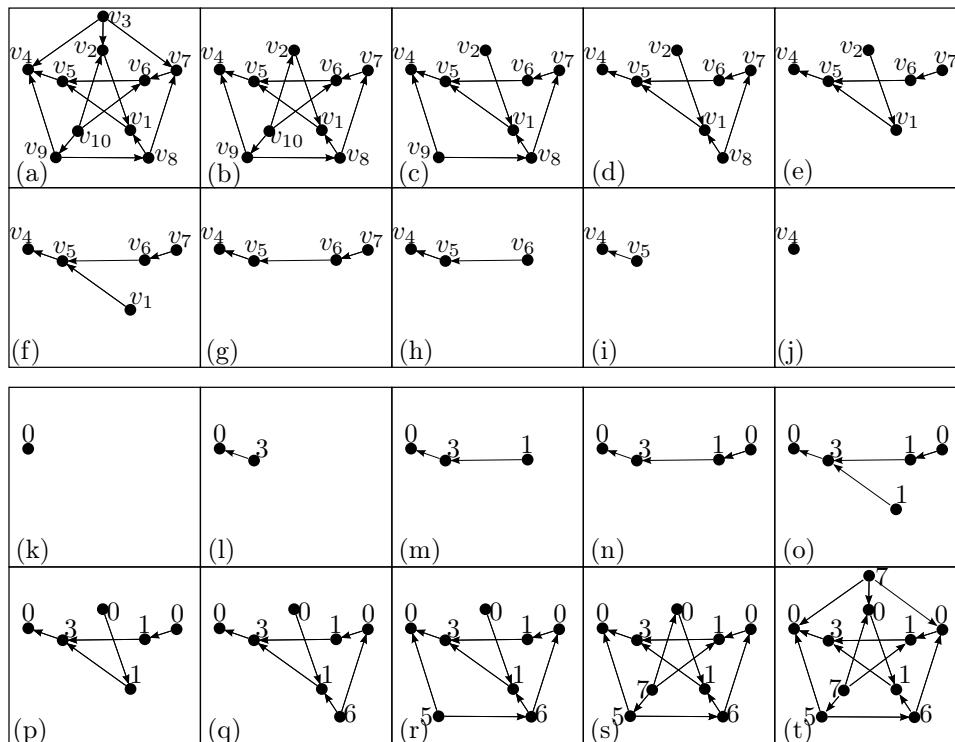


Figura 5: Passos da execução do procedimento $color(\vec{G}_{10})$ onde \vec{G}_{10} é a orientação do grafo de Petersen da Figura (a).

5 Sobre a conjectura de Sopena

Usando um algoritmo de força bruta, verificamos até o momento que $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$, onde \vec{G} é um grafo cúbico com $|V(\vec{G})| \leq 16$. Nosso resultado computacional é uma evidência positiva para suportar a conjectura de Sopena (1997).

Nosso algoritmo gera todas as $i = 2^m$ orientações \vec{G}^i possíveis para um grafo cúbico G , então verifica se existe um homomorfismo de cada \vec{G}^i para um torneio T_7 com 7 vértices. O número de torneios livres de isomorfismo com 7 vértices é igual a 456, veja Harary

e Palmer (1973). Fazemos uso de duas bases de dados disponibilizadas na internet por autores com diversos artigos na área de geração de grafos. Na primeira base de dados Brinkmann et al. (2013), <<http://hog.grinvin.org/Cubic>>, obtemos os grafos cúbicos com número de vértices entre 4 e 24 com cintura 3, o número destes grafos foram também determinados teoricamente por Robinson e Wormald (1983). Na segunda base de dados, <<http://cs.anu.edu.au/bdm/data/digraphs.html>>, obtemos todos os 456 torneios livres de isomorfismo com 7 vértices.

Algoritmo OCN7

Entrada: Um grafo cúbico G com m arestas.

Saída: Uma 7 coloração orientada para toda orientação \vec{G}^i de G , ou um grafo orientado \vec{G}^i com 8 cores.

Início

Para i de 1 até 2^m faça

$flag \leftarrow 0$;

Gerar orientação \vec{G}^i de G ;

Para j de 1 até 456 faça

Se existe homomorfismo de \vec{G}^i para \vec{T}_7^j então

Armazene \vec{T}_7^j ;

$flag \leftarrow j$;

$j \leftarrow 456 + 1$;

Se $flag = 0$ então

Retorne \vec{G}^i ;

Fim;

Apresentamos na Figura 6 dois grafos cúbicos orientados com 8 vértices e com número cromático orientado igual a 7, os números na figura representam uma 7-coloração gerada pelo computador utilizando o algoritmo *OCN7*.

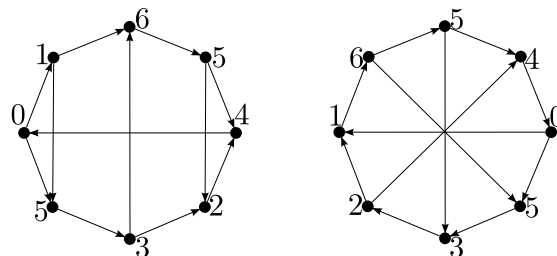


Figura 6: Dois grafos cúbicos orientados com uma 7-coloração gerada pelo algoritmo *OCN7*.

6 Conclusões

Até o momento, usando um algoritmo de força bruta, sabemos que se \vec{G} é um grafo cúbico com $|V(\vec{G})| \leq 16$, então $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$. Nosso resultado computacional é uma evidência positiva para suportar a conjectura de Sopena (1997). Atualmente, com a ajuda do grid computacional do grupo de inteligência artificial do PESC/UFRJ, estamos resolvendo o problema para grafos com 18 vértices, veja <http://grid-ia.cos.ufrj.br:32593/index.php/Main_Page>.

Neste trabalho, demonstramos que existe um grafo orientado \vec{R} com 8 vértices tal que todo grafo orientado acíclico \vec{G} com $\Delta(\vec{G}) \leq 3$ é \vec{R} -colorível. Apresentamos também um algoritmo de tempo polinomial para computar uma 8-coloração para \vec{G} .

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio do CNPq, CAPES e FAPERJ.

Referências

- Bang-Jensen, J., Hell, P., e MacGillivray, G. (1988). The complexity of coloring by semi-complete digraphs. *SIAM J. Disc. Math.*, 1:281–298.
- Brinkmann, G., Goedgebeur, J., Mélot, H., e Coolsaet, K. (2013). House of graphs: a database of interesting graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161:311–314.
- Coelho, H., Faria, L., Gravier, S., e Klein, S. (2013). Oriented coloring in planar, bipartite, bounded degree 3 acyclic oriented graphs. *ENDM. To appear*.
- Courcelle, B. (1994). The monadic second order logic of graphs vi: On several representations of graphs by relational structures. *Discrete Applied Mathematics*, 54:117–149.
- Culus, J. e Demange, M. (2006). Oriented coloring: Complexity and approximation. *SOFSEM*, LNCS 3831:226–236.
- Ganian, R. e Hliněný, P. (2010). New results on the complexity of oriented colouring on restricted digraph classes. *SOFSEM'10, LNCS*, 5901:428–439.
- Harary, F. e Palmer, E. M. (1973). *Graphical Enumeration*. Academic Press, New York.
- Raspaud, A. e Sopena, E. (1994). Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letters*, 51:171–174.
- Robinson, R. W. e Wormald, N. C. (1983). Numbers of cubic graphs. *J. Graph Theory*, 7:463–467.
- Sopena, E. (1997). The chromatic number of oriented graphs. *Journal of Graph Theory*, 25:191–205.
- Sopena, E. (2001). Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, 229:359–369.
- Sopena, E. e Vignal, L. (2001). A note on the oriented chromatic number of graphs with maximum degree three. Technical report, Université Bordeaux I.