

FORMULAÇÕES DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA ELABORAÇÃO DE FUNDOS DE ÍNDICE: APLICAÇÕES AO IBOVESPA

José Mauricio Brasil Gonçalves

Dep. de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria 156, Bloco D, São Domingos, Niterói – RJ. 22210-240
josemauriciobrasil@gmail.com

Eduardo Uchoa Barboza

Dep. de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria 156, Bloco D, São Domingos, Niterói – RJ. 22210-240
uchoa@producao.uff.br

RESUMO

Índices de bolsas de valores são importantes indicadores do nível de desempenho de um mercado de ações. Alguns fundos de ações buscam reproduzir o desempenho do índice, adotando uma política de investimento de “seguir o índice”. Para tanto, o investidor ou gestor de um fundo pode adquirir todas as ações que integram o índice, nas suas devidas proporções. Contudo, esta estratégia é proibitiva em termos de custos de transação e manutenção, dado que o número de aquisições pode ser elevado e, a cada revisão da composição do índice, compras e vendas de ações terão de ser realizadas. Neste sentido, a programação inteira pode ser utilizada para a seleção de um subconjunto pequeno de ações do índice, que acompanham de perto o desempenho do índice seguido. Os resultados deste trabalho mostram que as formulações de programação inteira empregadas possuem larga aplicabilidade ao seguir o índice Bovespa.

PALAVRAS CHAVE. Fundos de Índice, Carteiras, Ações.

Área principal. Programação Matemática

ABSTRACT

The stock indexes are important indicators of the level of performance of a stock market. Some equity funds seek to replicate the index performance by adopting an investment policy to "follow the index." For this, the investor or a fund manager can acquire all the shares in the index, in their proper proportions. However, this strategy is prohibitive in terms of transaction costs and maintenance, because the number of acquisitions can be high, and for each revision in the index, purchases and sales of shares must be done. In this sense, the integer programming can be used for selection a small subset of index stock, who closely followed the performance of the index. The results of this work show that the integer programming formulations employed have wide applicability to follow the Bovespa index.

KEYWORDS. Index Funds, Portfolios, Stocks.

Main area. Mathematical Programming

1. Introdução

A gestão de fundos envolve o investimento de recursos em ações ou outros instrumentos financeiros negociados nas bolsas de valores. O objetivo do fundo é aumentar, no médio e longo prazo, o capital inicialmente investido. Os recursos do fundo são, usualmente, provenientes de fundos de pensão (por exemplo: Previ, Funcef, Petros, Valia, Fapes), prêmios de seguros, além de aplicações e economias individuais. Basicamente, duas estratégias podem ser seguidas pelo gestor do fundo.

Gestão ativa: neste caso, o gestor possui flexibilidade para escolher e alterar as ações que integram o fundo. Está livre para utilizar, ao longo do processo de seleção, métodos da análise fundamentalista e da análise técnica. A premissa é de que o julgamento e a experiência do gestor do fundo são capazes de selecionar as ações com maior probabilidade de retorno do capital no futuro.

Gestão passiva: aqui o gestor possui menor flexibilidade no processo de seleção e mudança da composição da carteira ao longo do tempo. É esperado que o fundo permaneça fiel a um determinado critério pré-estabelecido. Um critério comum é acompanhar o desempenho de um índice de ações conhecido (por exemplo, o IBOVESPA, IBrX 50, S&P 500, Dow Jones), selecionando e adquirindo algumas ações que integram o índice. Especificamente, o nome desta estratégia é “seguir o índice” (*index tracking*), sendo este o objeto principal deste trabalho.

Formalmente, *index tracking* descreve o processo de tentativa de rastrear (reproduzir) o desempenho de um determinado índice. Um fundo de gestão passiva cujo objetivo é reproduzir o retorno de um índice é conhecido como fundo de índice (Beasley et al, 2003).

As estratégias de gestão ativa e passiva podem ser combinadas na formação de um fundo. Uma parte dos recursos pode estar aplicada de maneira passiva, sendo a outra parcela do capital investida de maneira ativa. Ambas as estratégias possuem vantagens e desvantagens. Os custos incorridos na gestão ativa são superiores, tendo em vista os gastos com a equipe de análise e revisão permanente das ações (um custo fixo considerável), bem como com os custos de transação envolvidos na compra e venda dos valores mobiliários. A gestão passiva, por sua vez, apresenta menor dispêndio na manutenção do fundo (um fundo que mantém seu desempenho fiel ao índice deverá sofrer reduzidas alterações na sua composição). Cumpre ressaltar que ambas as estratégias estão sujeitas a prejuízos (por vezes severos). Conforme destaca Graham (2007), na sua obra seminal sobre investimentos financeiros: o futuro dos preços dos valores mobiliários nunca é previsível. O fato de existir uma gestão ativa, nunca garantirá retornos superiores ao mercado. No caso da gestão passiva, se o índice a ser seguido apresentar redução ao longo do tempo, o valor do fundo administrado será reduzido também.

Cumpre ressaltar que seguir o índice em princípio é algo simples. A composição do índice (quais ações fazem parte, juntamente com suas proporções) é divulgada periodicamente. Dessa forma, bastaria comprar todas essas N ações na proporção da sua composição e ir atualizando a carteira na medida em que a composição for mudando. Mas isso seria de difícil gerenciamento, dado que algumas das ações teriam de ser adquiridas em diminutas proporções (sendo algumas delas sem liquidez) e, os custos de transação seriam altos. Esses custos já seriam suficientes para inviabilizar essa estratégia para um pequeno ou médio investidor. Para investidores de grande porte, um problema complexo ocorre no momento da mudança da composição do índice. No exato instante em que a nova composição do fundo é divulgada, as ações que saem sofrem desvalorização e as que entram se valorizam. Isso ocorre justamente porque é de conhecimento que alguns dos grandes fundos baseados no índice têm a obrigação contratual de vender e comprar esses papéis causando, em alguns casos, prejuízos consideráveis a eles.

Dessa forma, surge a ideia de seguir aproximadamente o índice, comprando um número K relativamente pequeno de ações ($K \ll N$), mas que ainda sejam capazes de representar bem o

índice. A programação inteira mista surge então como uma ferramenta para escolher quais devem ser as ações K compradas e em quais proporções.

Para a geração das carteiras que seguirão o índice Bovespa, serão empregadas quatro formulações de programação inteira. As formulações foram inicialmente apresentadas por Beasley, Meade e Chang (2003), Cornuejols e Tüntüci (2007), Beasley e Canakgoz (2008) e Guastaroba e Speranza (2012). Serão empregadas três instâncias com dados do fechamento semanal de 1998 até 2013. Cumpre ressaltar que, nos trabalhos anteriores sobre fundos de índice, é comum os autores proporem também formulações para um problema relacionado, denominado *enhanced index tracking*, que possui como objetivo “superar” o índice de bolsa seguido. Tal problema não será abordado neste artigo.

O presente trabalho é composto por esta introdução, uma revisão da literatura, que inclui a apresentação das formulações utilizadas, os resultados encontrados ao seguir o índice Ibovespa, bem como as conclusões e recomendações para novos estudos.

2. Revisão da Literatura

As formulações desenvolvidas e apresentadas na literatura de programação inteira diferem em vários aspectos, destacando-se: a medida utilizada para mensurar o erro de rastreamento, inclusão ou não de restrições quanto aos custos de transação, a presença de limites (máximo e mínimo) de ações na carteira, a utilização de medidas de correlação entre o desempenho de uma ação e o desempenho do índice. Para resolução, são utilizadas desde heurísticas até o *branch and cut*.

O erro de rastreamento é a diferença observada entre o desempenho efetivo do índice e o desempenho do fundo elaborado para segui-lo. Em última medida, é o fator de desempenho principal do fundo. Se o fundo acompanha a elevação e a queda do índice seguido, guardando pouca distância do mesmo, considera-se que atingiu seu objetivo. A medição deste erro pode ser realizada de várias formas. Existem formulações que aplicam o ponto de vista da regressão linear, tal como a presente no trabalho de Beasley et al (2008). Um modelo com erro de rastreamento zero significa que o mesmo acompanhou perfeitamente o índice. Nesta linha, Guastaroba et al (2012), afirma que o erro de rastreamento é frequentemente medido pela soma dos desvios quadrados entre estes retornos, sendo, conforme Yamazaki et al (1991) a média dos desvios absolutos uma alternativa que resulta em resultados semelhantes. Entretanto, Ruszczyński et al (1999) apud Guastaroba (2012) lembra que a fronteira eficiente das carteiras de desvio médio absoluto correspondem a carteiras eficientes no sentido da dominância estocástica de segundo grau, independentemente da distribuição da taxa de retorno. Este fato não se aplica às carteiras de média-variância. Muitos dos trabalhos já publicados definem o erro de rastreamento como sendo a variância entre os retornos do índice e do fundo. Conforme Beasley et al (2003), esta abordagem possui severos problemas, tendo em vista que, um fundo com desempenho sempre inferior ao índice, e que mantenha constante esta diferença, terá como resultado variância zero.

A inclusão de limites ao custo de transação busca reduzir o valor consumido do fundo em custos desta natureza, pois estes podem ser consideráveis. Sob o ponto de vista estrito de seguir o índice, esta restrição pode limitar o desempenho do fundo. A interpretação dos autores deste trabalho é a seguinte: dado que um fundo de índice é um fundo de gestão passiva e tem como meta seguir estritamente o índice, as alterações na sua composição são empregadas apenas quando há revisão das ações que compõem o índice. Em específico, o Ibovespa é revisto a cada quatro meses, sendo que das 69 ações que o compõe, a maioria mantém-se no fundo. Assim sendo, para o caso estudado, esta restrição poderia reduzir um acompanhamento mais próximo do índice. De qualquer maneira, será possível observar que três das quatro formulações apresentadas utilizam restrições ao custo de transação.

Outra questão que deve ser levada em consideração é a aquisição de parcelas reduzidas de ações, o que pode ser um problema em termos da operacionalização do fundo. Com o objetivo de seguir

o índice, o fundo gerado poderá sugerir aquisições muito reduzidas de determinadas ações, o que pode ser proibitivo em termos práticos. Dessa forma, é possível incluir nas formulações restrições que limitam valores máximos e mínimos do número de ações. Tais limites são aplicados apenas se o modelo sugerir a inclusão de determinada ação no fundo. Esta questão ficará mais clara na apresentação das formulações.

De forma a tornar as formulações mais próximas do problema enfrentado pelos gestores de fundos de índice, a formulação introduzida por Beasley et al (2003) considera, além da criação de um fundo de índice, a alteração de um fundo já existente. Esta é uma maneira de utilizar um grupo de valores mobiliários que o investidor eventualmente já possui.

A seguir, serão apresentadas quatro formulações de programação inteira, elaboradas para formação de fundos de índice. Tais modelos representam o estado da arte em formulações de programação inteira para o problema de seguir um dado índice. De forma a melhorar a exposição, será padronizada a notação empregada entre estes modelos para representar seus coeficientes, parâmetros e variáveis.

N : Número total de ações (empresas) passíveis de serem incluídas no portfólio (fundo).

K : Número de ações diferentes que o portfólio deve possuir.

ε_i : Compreende a proporção mínima do portfólio que deve ser investido na ação i ($i = 1, \dots, N$), se a ação i for selecionada.

δ_i : Compreende a proporção máxima do portfólio que deve ser investido na ação i ($i = 1, \dots, N$), se a ação i for selecionada.

X_i : Corresponde ao número de unidades da ação i ($i = 1, \dots, N$), no portfólio atual.

T : Dado que foram observados os valores históricos do índice e das ações ao longo dos períodos $0, 1, 2, \dots, T$. O tempo T representa o momento onde o fundo começa a operar ou, o momento quando alteram-se as ações do fundo atual, para a nova composição. Usualmente, o período de observação é chamado *in-sample*, e o período de execução propriamente dito *out-of-sample*.

V_{it} : Representa o valor de uma unidade da ação i ($i = 1, \dots, N$), no tempo t ($t = 1, \dots, T$).

H_i : É o valor total de mercado das ações i ($i = 1, \dots, N$).

I_t : Representa o valor do índice a ser seguido no tempo t ($t = 1, \dots, T$).

R_t : Representa o retorno observado para o índice num período t ($t = 1, \dots, T$). Será empregada a expressão $R_t = \log_e \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right)$, $t = 1, \dots, T$.

C_{cash} : Corresponde a alteração líquida (investimentos e retiradas de caixa) no tempo T .

C : Corresponde ao valor total do portfólio atual $[X_i]$ no tempo T , somado aos investimentos e retiradas de caixa C_{cash} . Dessa forma, $C = \sum_{i=1}^N V_{it} X_i + C_{cash}$.

γ : Representa a proporção máxima do valor total do portfólio (C) que pode ser consumido pelos custos de transação ($0 \leq \gamma \leq 1$).

Variáveis de decisão:

x_i : Número de unidades da ação i que foram selecionadas para compor o fundo de índice.

z_i : 1, se a ação i ($i = 1, \dots, N$) foi escolhida para compor o fundo de índice. O caso contrário.

C_{trans} : Representa o custo total de transação, incorrido na mudança de um portfólio para outro, no tempo T.

r_t : É o retorno do fundo de índice no período t ($t = 1, \dots, T$), calculado pela expressão $r_t = \log_e \left[\frac{[\sum_{i=1}^N V_{it} x_i]}{[\sum_{i=1}^N V_{it-1} x_i]} \right], t = 1, \dots, T$.

A formulação a seguir foi introduzida por Beasley, Meade e Chang (2003). De forma a organizar os resultados mais a frente, este modelo será denominado por Formulação 1.

2.1 Formulação 1

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (1)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq \frac{V_{iT} x_i}{C} \leq \delta_i z_i, \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$C_{trans} \leq \gamma C \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N V_{iT} x_i = C - C_{trans} \quad (4)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

$$z_i \in [0,1], \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

A equação (1) assegura que exatamente K ações (empresas diferentes) comporão o fundo de índice. A equação (2) limita duas questões importantes: se a ação i não estiver no portfólio, então a variável x_i será zero. Por outro lado, caso a ação i esteja no portfólio, estará limitada pelos limites mínimo ε_i e máximo δ_i definidos anteriormente. A equação (3) restringe o custo de transação, a equação (4) assegura a igualdade de valores entre o novo portfólio e o antigo portfólio, já incluindo entradas e saídas de caixa (custos de transação, retiradas e aplicações de caixa). Os autores mensuram o erro de rastreamento utilizando a Equação (7):

$$E = \left[\left[\sum_{t=1}^T |r_t - R_t|^\alpha \right]^{1/\alpha} \right] / T \quad (7)$$

Na expressão acima, α é uma medida de penalização da diferença entre r_t e R_t . Neste trabalho, será utilizado $\alpha = 1$.

A formulação completa fica então:

$$\text{Minimizar } E \quad (8)$$

Sujeito a: (1), (2), (3), (4), (5), (6).

2.2 Formulação 2

A segunda formulação empregada foi proposta por Beasley e Canakgoz (2008). Possui similaridades com a formulação 1, incluindo:

f_i^s : Constante que representa o custo de venda de uma ação i .

f_i^b : Constante que representa o custo de aquisição de uma ação i .

$\hat{\alpha}_i$: estimativa intercepto, quando realizada a regressão dos mínimos quadrados entre os retornos da ação i [r_{it} , $t = 1, \dots, T$] e os retornos do índice [R_{it} , $t = 1, \dots, T$].

$\hat{\beta}_i$: estimativa declividade, quando realizada a regressão dos mínimos quadrados entre os retornos da ação i [r_{it} , $t = 1, \dots, T$] e os retornos do índice [R_{it} , $t = 1, \dots, T$].

G_i : Variável que representa o custo de transação incorrido na compra ou venda da ação i ($i = 1, \dots, N$).

As restrições da Formulação 2 são representadas por (1), (2), (3), (4), (5), (6) e

$$G_i \geq f_i^s (X_i - x_i) V_{iT} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

$$G_i \geq f_i^b (x_i - X_i) V_{iT} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

$$G_i \geq 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (11)$$

As equações (9) e (10) limitam os custos de transação por ação i (custo da venda e custo da aquisição). A restrição (11) força a não negatividade do custo de transação G_i .

A função objetivo utiliza a regressão linear. Para tanto, introduz-se (12) e (13):

$$w_i = x_i V_{iT} / (C - \gamma C) \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i r_{it} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

A equação (12) representa a proporção do fundo investida na ação i no tempo T . Por sua vez, a equação (13) é uma aproximação linear dos retornos do fundo de índice. Conforme Ross et al (2010), a soma dos retornos ponderados por sua participação no fundo é uma convenção bastante utilizada em finanças.

Uma vez realizada a regressão entre os retornos do índice e os retornos observados pelo fundo de índice, as estimativas dos mínimos quadrados α (intercepto) e β (declividade) da reta de regressão são assim apresentadas:

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^N w_i \hat{\alpha}_i \quad (14)$$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^N w_i \hat{\beta}_i \quad (15)$$

O objetivo a ser perseguido é escolher K ações (e suas respectivas quantidades x_i), de forma a atingir $\hat{\alpha} = 0$ e $\hat{\beta} = 1$. A função objetivo é exposta abaixo:

$$\text{Minimizar } |\hat{\alpha} - 0| + |\hat{\beta} - 1| \quad (16)$$

Propõem-se também a inclusão de pesos para priorizar o atingimento de $\hat{\alpha} = 0$ ou $\hat{\beta} = 1$. O presente trabalho não utilizará estas ponderações. Por sua vez, utilizará apenas a minimização do intercepto α na função objetivo.

De forma a linearizar a função objetivo (a presença do módulo a torna não linear), serão introduzidas as variáveis D e E .

$$D \geq \hat{\alpha} \quad (17)$$

$$D \geq -\hat{\alpha} \quad (18)$$

$$E \geq \hat{\beta} - 1 \quad (19)$$

$$E \geq -(\hat{\beta} - 1) \quad (20)$$

$$D, E \geq 0 \quad (21)$$

A seguir, expõe-se a formulação 2 na sua forma completa:

$$\text{Minimizar } D \quad (22)$$

Sujeito a: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11), (12), (14), (15), (17), (18), (19), (20), (21).

Uma terceira maneira de formular o problema do fundo de índice pode ser observada no trabalho de Cornuejols e Tüntüçü (2007). Os autores apresentam um modelo de programação inteira que agrupa as ações em função de suas similaridades (o coeficiente de correlação é utilizado para realizar o agrupamento). Definem-se os seguintes parâmetros e variáveis do modelo, em adição aos já apresentados anteriormente:

ρ_{ji} : Parâmetro que representa a similaridade entre a ação j e a ação i

s_{ji} : Variável de decisão que indica qual ação i representará a ação j no fundo de índice.

2.3 Formulação 3

$$\text{maximizar } \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \rho_{ji} s_{ji} \quad (23)$$

Sujeito a: (1) (2), (3), (4), (5), (6) e:

$$\sum_{i=1}^N s_{ji} = 1 \quad \forall \quad j = 1, \dots, N \quad (24)$$

$$s_{ji} \leq z_i \quad \forall \quad j = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, N \quad (25)$$

$$s_{ji} \in [0,1], \quad \forall \quad j = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, N \quad (26)$$

A função objetivo (23) busca incluir no fundo as ações com maiores similaridades entre si. A restrição (24) assegura que uma e somente uma ação i representará a ação j no fundo de índice. A

restrição (25) assegura que a ação i só representa uma ação j se a ação i foi selecionada para compor o fundo.

Após o modelo ser aplicado e um grupo de K ações ser selecionado, o peso (participação) de cada uma das K ações no fundo de índice é calculado da seguinte forma:

$$w_i = \sum_{j=1}^N H_j s_{ji} \quad (27)$$

Dessa forma, w_i representa o valor total das ações representadas pela ação i . O percentual que deve ser investido na ação i é, assim, proporcional ao peso de i .

2.4 Formulação 4

A última formulação empregada foi publicada originalmente por Guastaroba e Speranza (2012). Utiliza como premissa seguir o índice, minimizando os desvios entre o fundo e o índice a ser acompanhado, período a período.

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^T (d_t + u_t) \quad (28)$$

Sujeito a: (1), (2), (3), (4), (5), (6) e

$$b_j + s_j \leq \delta_j C w_j \quad \forall \quad j = 1, \dots, N \quad (29)$$

$$d_t \geq 0 \quad \forall \quad t = 1, \dots, T \quad (30)$$

$$u_t \geq 0 \quad \forall \quad t = 1, \dots, T \quad (31)$$

$$b_j \geq 0 \quad \forall \quad j = 1, \dots, N \quad (32)$$

$$s_j \geq 0 \quad \forall \quad j = 1, \dots, N \quad (33)$$

As variáveis d_t e u_t são não negativas, utilizadas para linearizar uma função módulo (não linear). Esta mesma estratégia já foi utilizada na Formulação 2 (Beasley et al, 2003). A restrição (29) emprega as variáveis b_j e s_j , não negativas, de forma a lidar com os custos de transação (proporcionais) para cada ação i .

De forma a estabelecer uma base de comparação, serão também empregados dois modelos de hipótese nula. O primeiro utilizará na composição da carteira as K ações mais negociadas, na proporção $1/K$. O segundo será composto por K papéis aleatórios, utilizando também a proporção $1/K$. As ações que integram este último modelo foram geradas a partir da fórmula "AleatórioEntre", do Excel. Foi atribuído um número para cada papel, sendo realizados K sorteios até a totalização da carteira.

3. Aplicação dos modelos e resultados encontrados

As quatro formulações apresentadas acima, bem como os dois modelos de hipótese nula, foram empregados para a geração de fundos de índice que seguirão o Ibovespa. Este índice é o principal indicador de desempenho médio do mercado de ações brasileiro. No tocante a sua representatividade, as ações que compõem o Ibovespa representam mais de 80% do volume de negócios da bolsa de valores de São Paulo (mercado à vista). A tabela 1 relaciona a composição do índice Bovespa no primeiro quadrimestre de 2013.

| n° | Código | Ação | Participação no índice (%) | n° | Código | Ação | Participação no índice (%) |
|----|--------|-------------------|----------------------------|----|--------|-------------------|----------------------------|
| 1 | PETR4 | Petrobras PN | 9,514 | 36 | SUZB5 | Suzano papel | 0,919 |
| 2 | VALE5 | Vale PN | 8,135 | 37 | RSID3 | Rossi Residencial | 0,909 |
| 3 | ITUB4 | Itaú Unibanco | 4,743 | 38 | KLBN4 | Klabin S/A | 0,884 |
| 4 | BBDC4 | Bradesco | 3,582 | 39 | JBSS3 | JBS | 0,878 |
| 5 | BVMF3 | BMF Bovespa | 3,394 | 40 | EMBR3 | Embraer | 0,873 |
| 6 | BBAS3 | Brasil | 3,273 | 41 | PCAR4 | P Açucar-CBD | 0,866 |
| 7 | PETR3 | Petrobras ON | 2,702 | 42 | CTIP3 | Cetip | 0,853 |
| 8 | ITSA4 | Itausa | 2,652 | 43 | UGPA3 | Ultrapar | 0,853 |
| 9 | VALE3 | Vale ON | 2,65 | 44 | CRUZ3 | Souza cruz | 0,816 |
| 10 | PDGR3 | PDG Realt | 2,49 | 45 | GOLL4 | Gol | 0,789 |
| 11 | OGXP3 | OGX Petróleo | 2,482 | 46 | ENBR3 | Energias BR | 0,765 |
| 12 | GGBR4 | Gerdau | 2,335 | 47 | FIBR3 | Fibria | 0,754 |
| 13 | CIEL3 | Cielo | 1,982 | 48 | RENT3 | Localiza | 0,73 |
| 14 | CMIG4 | Cemig | 1,854 | 49 | MMXM3 | MMX Mineração | 0,722 |
| 15 | BRFS3 | BRF Foods | 1,744 | 50 | CESP6 | CESP | 0,669 |
| 16 | USIM5 | Usiminas PN | 1,737 | 51 | DASA3 | Dasa | 0,663 |
| 17 | CCRO3 | CCR S/A | 1,684 | 52 | DTEX3 | Duratex | 0,645 |
| 18 | AMBV4 | Ambev | 1,648 | 53 | BRAP4 | Bradespar | 0,638 |
| 19 | CYRE3 | Cyrela Realt | 1,623 | 54 | CPLE6 | Copel | 0,633 |
| 20 | HYPE3 | Hypermarcas | 1,564 | 55 | ELET6 | Eletrobrás PN | 0,597 |
| 21 | TIMP3 | Tim Part S/A | 1,435 | 56 | GOAU4 | Gerdau Met | 0,591 |
| 22 | GFS3 | Gafisa | 1,433 | 57 | SBSP3 | Sabesp | 0,561 |
| 23 | MRVE3 | MRV | 1,43 | 58 | MRFG3 | Marfrig | 0,551 |
| 24 | CSNA3 | Sid Nacional | 1,185 | 59 | LLXL3 | LLX Log | 0,538 |
| 25 | BRML3 | BR Malls Part | 1,171 | 60 | CPFE3 | CPFL Energia | 0,535 |
| 26 | VIVT4 | Telefônica Brasil | 1,169 | 61 | BISA3 | Brookfield | 0,497 |
| 27 | SANB11 | Santander BR | 1,133 | 62 | ELET3 | Eletrobrás ON | 0,493 |
| 28 | HGT3 | Cia Hering | 1,102 | 63 | LIGT3 | Light S/A | 0,464 |
| 29 | LREN3 | Lojas Renner | 1,032 | 64 | ELPL4 | Eletropaulo | 0,376 |
| 30 | OIBR4 | Oi PN | 0,982 | 65 | BTOW3 | B2W Varejo | 0,312 |
| 31 | NATU3 | Natura | 0,968 | 66 | VAGR3 | V-Agro | 0,285 |
| 32 | BRKM5 | Braskem | 0,955 | 67 | TRPL4 | Tran Paulist | 0,281 |
| 33 | ALLL3 | ALL Amer Lat | 0,952 | 68 | USIM3 | Usiminas ON | 0,229 |
| 34 | CSAN3 | Cosan | 0,95 | 69 | OIBR3 | Oi ON | 0,215 |
| 35 | LAME4 | Lojas Americanas | 0,931 | | TOTAL | | 100 |

Tabela 1: composição do índice Bovespa no primeiro quadrimestre de 2013

Para a geração das instâncias, foi utilizada a série histórica com os valores de fechamento semanal das ações que compõem o índice Bovespa no primeiro semestre de 2013. A série é iniciada em 01/01/1998, e possui como última cotação a data de 19/04/2013. Está ajustada, sendo descontados os dividendos, inflação, desdobramentos de ações e fusões de empresas. Os dados foram obtidos através de consultas ao sistema Economática (referência sobre informações e dados financeiros). Para resolução das formulações de programação inteira, empregou-se o CPLEX 12.1.

Foram gerados três grupos de instâncias, dividindo a série histórica nos seguintes períodos: 1998 a 2001, 2002 a 2005 e 2006 a 2009. Os seis modelos apresentados anteriormente foram aplicados nestes três intervalos de anos. O desempenho de cada modelo foi avaliado nos seis, doze, vinte e quatro e quarenta e oito meses seguintes. A avaliação foi realizada a partir do quociente entre o retorno do fundo de índice e o retorno (valorização ou desvalorização do Ibovespa). Um número

próximo da unidade informa que o fundo estava próximo do Ibovespa na data de medição. Um número distante de 1, significa que o fundo gerado não acompanhou o desempenho do índice. Em todas as instâncias e modelos, utilizou-se $K = 8$ (número de ações diferentes no fundo de índice, conforme definido anteriormente). O tempo de análise (T) empregado foi igual a 52.

As tabelas 2, 3 e 4 retratam o desempenho dos fundos de índice gerados neste trabalho. A formulação empregada consta na primeira coluna. Na tabela 4, a última coluna está limitada em 40 meses, uma vez que os dados para o ano de 2013 finalizam-se em abril.

| Modelo | + 6 meses | + 12 meses | + 24 meses | + 48 meses |
|--|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Formulação 1 (Beasley 2002) | 1,1856 | 1,1741 | 1,1260 | 1,2905 |
| Formulação 2 (Beasley 2008) | 1,0995 | 1,1070 | 1,0145 | 1,2891 |
| Formulação 3 (Cornuejols e Tuntucu) | 0,9878 | 0,8285 | 0,6862 | 1,0071 |
| Formulação 4 (Guastaroba e Speranza) | 1,2395 | 1,2363 | 1,0708 | 0,8715 |
| Modelo de hipótese nula 1 (K ações com maior peso no Ibovespa) | 1,2830 | 1,4146 | 1,3196 | 1,8068 |
| Modelo de hipótese nula 2 (composição aleatória) | 1,1552 | 1,0483 | 0,8377 | 0,6232 |

Tabela 2: Desempenho dos fundos em datas posteriores ao ano de 2001

| Modelo | + 6 meses | + 12 meses | + 24 meses | + 48 meses |
|--|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Formulação 1 (Beasley 2002) | 1,0196 | 1,0094 | 1,1165 | 1,0949 |
| Formulação 2 (Beasley 2008) | 0,9140 | 0,9915 | 0,8102 | 0,9203 |
| Formulação 3 (Cornuejols e Tuntucu) | 1,0638 | 1,0869 | 1,2801 | 1,1656 |
| Formulação 4 (Guastaroba e Speranza) | 1,0983 | 1,1860 | 1,0108 | 1,0307 |
| Modelo de hipótese nula 1 (K ações com maior peso no Ibovespa) | 1,0313 | 1,0570 | 1,1940 | 1,0980 |
| Modelo de hipótese nula 2 (composição aleatória) | 0,9747 | 0,9408 | 0,7751 | 0,9102 |

Tabela 3: Desempenho dos fundos em datas posteriores ao ano de 2005

| Modelo | + 6 meses | + 12 meses | + 24 meses | + 40 meses |
|--|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Formulação 1 (Beasley 2002) | 0,9890 | 1,0103 | 1,0668 | 1,3181 |
| Formulação 2 (Beasley 2008) | 0,9898 | 1,1152 | 1,0773 | 0,9924 |
| Formulação 3 (Cornuejols e Tuntucu) | 0,9866 | 0,9457 | 1,0128 | 0,8069 |
| Formulação 4 (Guastaroba e Speranza) | 0,9897 | 0,9979 | 0,9694 | 0,8654 |
| Modelo de hipótese nula 1 (K ações com maior peso no Ibovespa) | 0,9881 | 0,9969 | 1,0166 | 1,0283 |
| Modelo de hipótese nula 2 (composição aleatória) | 1,0213 | 1,1140 | 1,4123 | 1,8392 |

Tabela 4: Desempenho dos fundos em datas posteriores ao ano de 2009

Com base nas tabelas de resultados, é possível observar que as formulações de programação inteira mantiveram uma distância próxima do índice Bovespa, na maioria das observações. Em cada um dos intervalos de tempo considerados, uma formulação se destacou, no sentido de seguir de forma mais fiel o índice.

Os resultados da primeira instância denotam que a formulação 3 foi a que acompanhou de forma mais próxima o índice. A exceção foi a medição efetuada nos 24 meses. Contudo, o fundo se recuperou na última verificação, e quatro anos após sua formação, atingiu quase completamente o desempenho do Ibovespa. A carteira gerada está exposta na primeira e segunda coluna da tabela 5. Cumpre ressaltar que o modelo de hipótese nula 2 conseguiu atingir, nesta instância, desempenho superior ao de algumas das formulações de programação inteira.

No segundo intervalo de tempo (tabela 3), a formulação 1 manteve-se mais próxima do índice. A formulação 4 esteve também muito próxima do Ibovespa superando a formulação 1 em duas das avaliações (seu desvio médio em relação ao índice foi de 6%, semelhante a formulação 1). Contudo, o fundo gerado a partir da formulação 4 obteve resultados superiores ao índice em todas as observações. Sua composição pode ser observada na terceira e quarta coluna da tabela 5.

No terceiro intervalo de tempo, a formulação 1 manteve-se muito próxima do Ibovespa ao longo das três primeiras observações. Na análise com o período mais distante (quatro anos), esta superou o índice em 31%. Destacam-se ainda as formulações 2, 3 e 4 nos primeiros três períodos de observação. O modelo de hipótese nula 2 também teve bom desempenho, mantendo-se próximo do índice nos dois primeiros períodos e, superando muito o desempenho no último período. Contudo, o desempenho positivo deste último modelo não foi observado em outras replicações. Por exemplo, foram gerados dez testes, sendo o melhor resultado àquele representado na tabela 4. Entretanto, a média dos desvios entre o resultado de cada replicação e uma carteira que segue perfeitamente o índice foi igual a 0,27 na última observação, evidenciando o fato de que resultados obtidos por uma carteira aleatória podem sofrer elevadas variações. A composição do fundo, ao ser empregada a formulação 1, pode ser observada nas duas últimas colunas da tabela 5.

| Composição do fundo de índice. Análise de 2002 a 2005. | | Composição do fundo de índice. Análise de 2006 a 2009. | | Composição do fundo de índice. Análise de 2010 a 2013. | |
|---|----------------------------------|---|----------------------------------|---|----------------------------------|
| Código | Percentual do fundo de índice | Código | Percentual do fundo de índice | Código | Percentual do fundo de índice |
| LREN3 | 39,72% | ITSA4 | 20,71% | PETR4 | 28,09% |
| CPL6 | 33,12% | SBSP3 | 20,20% | VALE3 | 16,43% |
| ITUB4 | 13,85% | ELET6 | 17,96% | ITUB4 | 15,43% |
| BBAS3 | 5,11% | CSNA3 | 16,05% | SBSP3 | 12,15% |
| VIVT4 | 4,02% | TIMP3 | 9,99% | BBAS3 | 9,34% |
| BRFS3 | 2,95% | VIVT4 | 8,73% | CCRO3 | 8,12% |
| EMBR3 | 0,86% | OIBR4 | 5,69% | GOLL4 | 6,14% |
| USIM3 | 0,37% | HGTX3 | 0,67% | RSID3 | 4,31% |

Tabela 5: composição dos fundos de índices que atingiram melhores resultados nas instâncias analisadas

4. Considerações finais

Este trabalho apresentou os principais modelos de programação inteira, desenvolvidos para criação e revisão de fundos de índices. A utilização destes modelos possibilitou a criação de fundos que acompanharam de perto o índice Bovespa numa série histórica de quinze anos. Como propostas para futuros trabalhos na área, seria importante investigar o desempenho dos fundos desta natureza que atualmente são oferecidos aos investidores, comparando com os resultados aqui apresentados. Cumpre ressaltar que a oferta de fundos de índices tem se elevado ano após ano, movimento reforçado no Brasil com o advento da negociação de cotas de fundos de índices na Bovespa (o investidor pode adquirir uma cota de um fundo de índice, como se fosse uma ação). Dessa forma, o mercado de fundos de índice tende a crescer bastante nos próximos anos e, ferramentas e técnicas de elaboração e acompanhamento destes fundos serão cada vez mais necessárias.

Referências

- Canakgoz, N. A. e Beasley, J. E.** (2008), Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation, *European Journal of Operational Research*, 196, 384-399.
- Beasley, J. E., Meade, N., Chang T. J.** (2003), An evolutionary heuristic for the index tracking problem, *European Journal of Operational Research*, 148, 621–643.
- Guastaroba, G. e Speranza, M. G.** (2012), Kernel Search: An application to the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, 217, 54–68.
- Ross, S. A., Westerfield, R. W., Jaffe, J. F.**, *Administração Financeira*, Atlas, São Paulo, 2010.
- Graham, B.**, *O investidor inteligente*, Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 2007.
- Cornuejols, G., Tütüncü, R.**, *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- Wolsey, L.**, *Integer Programming*, New York, Wiley, 1998.
- Ogryczak, W., Ruszczyński, A.** (1999), From stochastic dominance to mean-risk model: Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, 116, 33–50.
- Konno, H., Yamazaki, H.** (1991), Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. *Management Science*, 37, 519–531.
- Elton, E. E., Gruber, M. J., Brown, S. J., Goetzmann, W. N.**, *Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos*, Elsevier, Rio de Janeiro, 2012.