MODELO PARA AGREGAÇÃO DE UM GRUPO DE ESPECIALISTAS BASEADO NA TEORIA DEMPSTER - SHAFER

Lucimário Gois de Oliveira Silva
UFPE
Caixa Postal, 7471, Recife-PE, 50.630-971.
lucio_gois@hotmail.com

Adiel T. de Almeida Filho
UFPE
Caixa Postal, 7471, Recife-PE, 50.630-971.
atalmeidafilho@yahoo.com.br

RESUMO

O presente trabalho se destina à elaboração de um modelo de agregação probabilística de um grupo de especialistas acerca de uma variável contínua. Como o modelo trata do julgamento subjetivo de um grupo de especialistas, será usada a teoria de Dempster-Shafer na fase de julgamento. Após a fase de julgamento, as evidências dos diferentes especialistas serão combinadas via regra de Dempster modificada. Na fase final de processamento, será usado o modelo de programação linear com o objetivo de diminuir a incerteza associada ao modelo.

PALAVARAS CHAVE. Grupo de especialista, Teoria DempsterShafer, Programação Linear.

ABSTRACT

This work is intended to produce a mathematical model of probabilistic aggregation of a group of experts about a continuous variable. As the model deals with the subjective judgment of a group of experts, will be used in the Dempster–Shafer theory in the trial phase. After the trial, the evidence of the various experts will be combined via Dempster modified rule. In the final stages of processing, it will be used the linear programming model with the aim of reducing the uncertainty associated with the model.

KEYWORDS. Group of expert. Dempster Shafer Theory. Linear Programming.

1. Introdução

Antes de qualquer analise probabilística que envolva determinado problema de decisão, deve-se determinar a natureza da incerteza que está presente. Logo, deve-se atentar para dois tipos de incerteza: A incerteza aleatória e a incerteza epistêmica.

A incerteza aleatória emerge quando existe uma simetria no problema ou experimentos podem ser repetidos várias vezes, sob as mesmas condições. No caso da incerteza epistêmica, não existe simetria e o evento acontecerá apenas uma vez.

No primeiro caso, o conceito de probabilidade clássica ou da freqüência relativa se ajusta bem para modelar esses problemas, já no segundo caso, pode-se utilizar o mesmo conceito de probabilidade ou ainda outros construtos teóricos. No caso da incerteza epistêmica, muitas vezes usa-se como recurso para previsão os especialistas, que de alguma forma, seja pela expertise técnica ou pela experiência, detém conhecimento sobre a variável que está sob estudo.

Surge nesse cenário dois conceitos de probabilidade: Probabilidade objetiva ou frequentista e a probabilidade subjetiva. A primeira é utilizada para casos onde a incerteza tem um caráter aleatório já a segunda apresenta um caráter epistêmico.

De acordo com Walley (1991), probabilidade subjetiva é o grau de crença lógico de um individuo ou sistema intencional. Surge então um conceito importante que tem por objetivo traduzir esse grau de crença do individuo ou sistema intencional conhecido como elicitação. De acordo com O' Hagan (2006), o objetivo da elicitação é construir uma distribuição de probabilidade que represente de forma apropriada o conhecimento do especialista. À partir desse objetivo, surge uma importante questão que deve ser levada em consideração: O que seria essa forma apropriada de representação ou como ela é obtida de forma mais apropriada?

Tal questão tem incomodado os especialistas desde os anos 60 quanto a pelo menos dois aspectos importantes: O aspecto psicológico e o quão preciso é o modelo.

Diversos trabalhos apontam para as diferentes dificuldades que os indivíduos podem apresentar em julgamentos sob condição de incerteza. Perterson e Beach (1967) toma como conclusão, à partir de seu trabalho, que os indivíduos tendem a ser bons estimadores em relação à média ou proporções, mas não apresentam a mesma eficiência em relação à variância. Por outro lado, Hogarth's (1975) advoga que o homem pode ser visto um sistema de processamento de informação que apresenta capacidade limitada.

Mas sem duvida alguma, o principal trabalho nessa área vem de Tversky e Kahneman (1974) onde através de experimentos os autores demonstram que os indivíduos podem cometer diversas incongruências no processo de escolhas de loterias tomadas sob condição de incerteza.

Em relação à precisão do modelo, alguns autores, dado os aspectos psicológicos e dificuldade na montagem de um processo de elictação correto, apontam os modelos imprecisos de probabilidade como melhor forma de representar o conhecimento do especialista. Lindlly (1979) aponta que o individuo tem um conjunto de probabilidades coerentes que são distorcidas pelo processo de elicitação, já para O' Hagan (2006), o processo de elicitação é inerentemente impreciso, pois os especialistas apenas podem fazer um número limitado de julgamentos.

Não existe uma vasta literatura que trate de modelos que levem em consideração a essa imprecisão. Uma forma de tratar esse problema é apresentada por Walley (1991) que propõe o uso de um intervalo definido por uma probabilidade inferior e uma probabilidade superior. No campo da elicitação, o modelo desenvolvido por Lins e Souza (2001)evita o uso de julgamentos numéricos, utilizando comparações de intervalos e através do uso de programação linear admite a existência de uma distribuição estocasticamente superior e uma distribuição estocasticamente inferior.

Devido à dificuldade existente no uso dos modelos clássicos de probabilidade, alguns autores abandonaram o uso de modelos probabilístico clássicos para representar a crença dos especialistas fazendo uso de outras teorias como é o caso das teorias fuzzy ou Dempster-shafer (Ver Helton e Oberkampf (2004)).

Além dos problemas psicológicos e de precisão, outro problema de grande porte surge quando o foco de interesse da elicitação é um grupo de especialistas, pois nesse caso além do procedimento de elicitação, deve-se preocupar com o uso do método de agregação escolhido. Clemen e Wincler (1999) dividem os métodos de agregação em dois tipos: Métodos matemáticos e psicológicos. Nos métodos matemáticos, é gerada, através de cada especialista, uma medida acerca da variável em estudo e, em seguida, uma medida única é usada através de um método matemático. No caso dos métodos psicológicos, a mensuração sobre a variável em estudo é feita através da interação entre os especialistas.

Diante do exposto, esse trabalho tem como objetivo apresentar um método de agregação da elicitação de um grupo de especialista que leve em consideração a imprecisão presente no julgamento dos especialistas. Nesse sentido, é usado a teoria de Dempster e Shafer com a possibilidade da existência de discordância entre os corpo de evidência. Logo, o modelo considera a existência de uma massa probabilística que na ausência de informação pode ser alocada a qualquer um dos eventos em estudo o que por sua vez pode acarretar indeterminação na decisão.Dado essa possibilidade de indecisão, o modelo considera um refinamento através do modelo introduzido porLins e Sousa (2001).

2. Teoria Matemática da Evidência

A teoria clássica da probabilidade é de grande utilidade quando a incerteza envolvida no problema é de natureza aleatória, o que não ocorre no caso da incerteza epistêmica e subjetiva. Quando a incerteza possui uma natureza subjetiva e se faz necessário o uso de especialistas, existe dificuldade no uso da probabilidade clássica, pois é necessário que se tenha informações sobre a probabilidade de todos os eventos e, além disso, deve-se respeitar o axioma da aditividade.

Quando se dispõe de pouca informação para se analisar as probabilidades ou quando as informações são ambíguas ou conflitantes, é razoável interpretar a probabilidade como intervalo. De acordo com Sentz (2002), a caracterização da probabilidade como intervalo possui três implicações:

- Não é necessário obter informações precisas de um especialista se isso não é realístico ou possível.
- A probabilidade pode ser assinalada a um grupo de eventos.
- O axioma da aditividade não é imposto.

Uma das teorias desenvolvida para tratar a possibilidade da imprecisão é a teoria Dempster e Shafer (TDS) que é usada nesse trabalho por sua semelhança com a probabilidade.

A TDS é uma teoria matemática da evidência cuja à base é o trabalho de Shafer (1976) que é a extensão do trabalho de Dempster (1967). No caso da teoria clássica, a probabilidade é assinalada a cada evento individual, já no caso da TDS, além de poder ser associada a cada elemento individual, a probabilidade também pode ser assinalada a um grupo de eventos o que se tratando de um processo elicitatório facilita o julgamentos dos especialistas, pois dependendo da dificuldade nos julgamentos, é mais fácil assinalar uma probabilidade a um grupo de eventos do que apenas a eventos individuais. Outra possibilidade permitida nessa teoria é que na ausência de informação ou na presença de ignorância em determinado evento não é necessário atribuir nenhuma probabilidade ao evento.

Existem basicamente três funções presentes na TDS: A assinalaçãode probabilidade, **m**, a função crença, **Bel**, e a função plausibilidade, **Pl**.

A função assinalação de probabilidade possui um conceito parecido com a probabilidade, porém não deve ser confundido. Ela representa o grau de suporte em favor de determinado evento, onde o valor de **m** varia entre 0 e 1.

Considerando a existência de um conjunto discernimento**Θ**, a função **m** é definida matematicamente pelas seguintes expressões:

$$m : 2^{\theta} \rightarrow [0,1] \qquad (1)$$

$$m(\emptyset) = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{A \in \theta} m(A) = 1 \ (3)$$

É através do estabelecimento da função **m** que determina-se o intervalo, onde reside a probabilidade “real”, ou probabilidade no sentido clássico, do evento de interesse, sendo duas funções não aditivas responsáveis por estabelecer esses intervalos. A função crença é interpretada como o somatório das funções **m** dos subconjuntos **B** que apóiam o conjunto de interesse **A**. A função **Bel** é definida como:

$$Bel : 2^{\theta} \rightarrow [0,1] \ (4)$$

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \ (5)$$

A função plausibilidade é interpretada como somatória das funções **m** tal que o conjunto **B** não contradiz o conjunto **A**.

$$Pl : 2^{\theta} \rightarrow [0,1] (6)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \ (7)$$

3.Combinando os Corpos de Evidência

A primeira regra que combina corpos de evidência usando a TDS foi desenvolvida por Dempster (1967) que é uma generalização do teorema de Bayes. A principal característica dessa regra é que o conflito entre os corpos de evidência é normalizado através de uma constante. Dado essa característica, alguns autores passaram a criticar essa regra(Zadeh (1986) e Yager (1987)), pois a mesma apresenta complicações quando existe um grau elevado de discordância entre os corpos de evidência. Considere que **m1** e **m2** representam dois diferentes corpos de evidência, a regra de combinação de Dempster é dada pela seguinte expressão:

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)}{1-k}, quando\ A \neq \emptyset \qquad (8)$$

$$m_{12}(\emptyset) = 0 (9)$$

$$k = \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) m_2(C) \ (10)$$

O trabalho de Zadeh (1986) apresenta tipos de situações em que o método acima pode apresentar resultados contra intuitivos. Considere o seguinte exemplo: Um especialista atribui uma probabilidade de 0,1 ao evento A e 0,9 a um evento B enquanto um segundo especialista atribui 0,1 ao evento A e 0,9 ao evento C. De acordo com a regra de combinação deDempster, ao evento A será atribuído probabilidade 1 enquanto ao evento B e C probabilidade 0.

Na tentativa de contornar esse problema, outras regras foram construídas de forma a não ignorar o conflito entre os corpos de evidência. Uma dessas modificações advém do trabalho de Yager (1987) conhecido como a regra de Yager ou regra modificada de Dempster. Nessa regra é definida a função base de assinalação de probabilidade, **q**, que é definido matematicamente por:

$$q(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C) \ (11)$$

No caso da regra de Dempster, o conflito é desprezado devido à presença da constante de normalização que torna a massa probabilística associada ao conjunto vazio igual a 0. A diferença entre a função **q** e a função **m** da regra de Dempster reside no fato de que no caso da função **q** não é atribuída uma massa probabilística nula ao conjunto vazio, como pode ser visualizado na formula 12.

$$q(\emptyset) \geq 0 \ \ (12)$$

O valor atribuído ao conjunto vazio será igual ao conflito que por sua vez é igual ao valor de **k**. A característica mais importante dessa regra vem do fato que conflito representado por $\boldsymbol{q}(\emptyset)$é repassado para o conjunto universo θ, quando é feita a transformação de **q** para $\mathbf{m}^{\mathbf{y}}$.

$$m^y(\theta) = q(\emptyset) + q(\theta) \qquad (13)$$

Logo, o valor de $\boldsymbol{m^y(\theta)}$ é visto como o grau de ignorância devido ao conflito entre os corpos de evidência. A conversão considerando os demais conjuntos:

$$m^y(A) = q(A) \qquad (14)$$

Deve-se salientar que a função m^y derivada da regra de combinação de Yager não pode ser confundida com a função m_{12} da regra deDempster visualizada na equação 8. A relação entre a função m derivada da regra de combinação de Dempster e a função **q** é dada pelas expressões de 14 a 17:

$$m(\emptyset) = 0 \qquad (15)$$

$$m(\theta) = \frac{q(\theta)}{1-q(\emptyset)} \qquad (16)$$

$$m(A) = \frac{q(A)}{1-q(\emptyset)} \qquad (17)$$

O método desenvolvido por Inagaki(1991) é uma combinação da regra desenvolvida por Dempster (1967) e a regra desenvolvida por Yager (1987), criando uma classe de regras parametrizadas. Essa regra é escrita da seguinte forma:

$$m(C) = q(C) + f(C).q(\emptyset) \qquad (18)$$

$$C \neq \emptyset (19)$$

$$\sum_{C\subseteq\theta, C\neq\emptyset} f(C) = 1 (20)$$

$$f(C) \geq 0 \qquad (21)$$

A função **f** na equação 20 funciona como uma função escalonadora.
A constante **k** é representada por:

$$k = \frac{f(C)}{q(C)} \qquad (22)$$

A regra de combinação de Inagaki é representada pelas seguintes expressões:

$$m^I(C) = [1 + kq(\emptyset)].q(C) \qquad (23)$$

$$m^I(\theta) = [1 + kq(\emptyset)].q(\theta) + [1 + kq(\emptyset) - k]q(\emptyset) \qquad (24)$$

A dificuldade no uso dessa regra reside na determinação da constante k. O autor define a função crença e plausibilidade em função de **k** e analisa seu impacto para o problema diretamente.

À medida que o valor de **k** varia, o valor derivado de $\mathbf{m}^{\mathbf{I}}$ vai sofrendo modificações, podendo inclusive convergir na regra de Dempster ou na regra de Yager. Caso o valor de **k** seja igual a 0, a regra de combinação coincide com a regra de Yager, já no caso do valor de **k** ser igual a $\frac{1}{1-q(\emptyset)}$ a regra de combinação coincide com a regra de Dempster.

Em uma linha diferente, mas também dando ênfase ao conflito entre os corpos de evidência, está o trabalho de Campos et al (2007), onde os autores criam uma variável que representa a medida da incerteza derivada de crenças não assinaladas chamada pelos autores de **Lateo**.

Os autores usam em sua nova regra de combinação a função $\log\left(\frac{1}{1-k}\right)$ que é definido como peso do conflito entre os corpos de evidência. Nesse sentido, se não houver conflito entre as partes, $\log\left(\frac{1}{1-k}\right)$ será igual 0, pois k=0. Assim, quanto maior o valor de $\log\left(\frac{1}{1-k}\right)$, maior é o conflito entre as partes, sendo o conflito máximo quando a função atinge ∞.

A nova regra definida pelos autores é expressa matematicamente pela seguinte expressão:

$$\mathrm{m}_{12}^{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)}{(1-k).(1+log\frac{1}{1-k})}, quando\ A \neq \emptyset \qquad (25)$$

Observe pela formulação acima, que essa nova regra é a regra de Dempster dividida por um novo fator $1 + log\frac{1}{1-k}$. A formulação do **Lateo**, representado pelos autores pela letraΛ, é dado pela seguinte expressão:

$$\Lambda = \frac{m_1(\theta) m_2(\theta)}{1-k} + [1 - \sum_{\substack{A \subset \theta \\ A \neq \emptyset}} m_{12}^C(A)] \qquad (26)$$

As duas fontes de incerteza proveniente dos dois corpos de evidência podem ser observadas na formula 26. A parcela da esquerda representa a incerteza gerada quando não é assinalada uma probabilidade a um determinado evento, já a parcela da direita, que está entre colchetes, representa a incerteza proveniente do conflito entre os corpos de evidência. Os autores definem o Lateo como uma massa probabilística móvel que tem liberdade para se mover através de todos os conjuntos que fazem parte do conjunto universo.

Os modelos aqui discutidos têm como importante característica a capacidade de lidar com a imprecisão gerada pela ausência de julgamentos e a possibilidade de discordância entre os corpos de evidência. Isso fica claro ao se analisar as formulas 13, 24 e 26, pois em cada uma delas é atribuído ao conjunto universo as duas parcelas de incerteza.

4. Modelo de Programação Linear para Probabilidade Imprecisa

O trabalho de Lins e Souza (2001) desenvolve um protocolo de elicitação de probabilidade imprecisas que evita as atribuições de probabilidade aos diferentes eventos do conjunto θ baseando-se no uso de comparações de probabilidade e no uso de programação linear para estabelecer uma distribuição estocasticamente maior e uma distribuição estocasticamente menor a partir desses julgamentos comparativos, sendo um dos objetivos desse método evitar os problemas psicológicos existentes apontado por Tversky e Kahneman (1974), pois nesse método não é necessário ao especialista atribuir probabilidades a eventos. Apesar do método também trabalhar com eventos discretos, será demonstrado o desenvolvimento do método quando o objeto de estudo é uma variável contínua.

A primeira parte do método consiste em se estabelecer um valor máximo, **M**, e um valor mínimo, **m**, para a variável sob estudo de forma que a probabilidade de se obter o valor verdadeiro dentro do intervalo seja igual a 1.

$$\Pr\{(m; M)\} = 1 \qquad (27)$$

Após a definição dos valores **m** e **M**, divide-se o intervalo em 2n subintervalos onde θ é reunião de todos esses intervalos. Os autores argumentam que quanto maior o número de intervalos, maior a precisão do modelo. Deve-se ter cuidado, pois essa premissa é verdadeira do ponto de vista matemático, pois ao se aumentar o número de intervalos, aumenta-se também complexidade psicológica dos julgamentos. O comprimento de cada intervalo é dado por $\boldsymbol{\frac{M-m}{2n}}$. Logo, $\boldsymbol{\theta}$ será formado pelos seguintes elementos:

$$\theta = \left\{\left(m; m + \frac{M-m}{2n}\right); \left(m + \frac{M-m}{2n}; m + 2\frac{M-m}{2n}\right); \left(m + 2\frac{M-m}{2n}; m + 3\frac{M-m}{2n}\right); \dots\dots..; \left(m + (2n-1)\frac{M-m}{2n}; M\right)\right\}$$

Para facilitar a notação, os intervalos serão representado por $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, ...,$\mathbf{I_n}$, onde os índices representam a ordem do intervalo.

O próximo passo consiste no julgamento através de especialistas sobre a relação entre as probabilidades dos intervalos definidos acima.

$$\Pr\{x \in I_q \cup I_{q+1} \cup I_{q+2} \dots \dots . . \cup I_{q+t}\} \text{>ou<} \Pr\{x \in I_s \cup I_{s+1} \cup I_{s+2} \dots \dots . . \cup I_{s+k}\}$$

O modelo considera três possibilidades em relação à resposta do especialista: maior do que, menor do que ou a comparação não pode ser feia.

Para evitar complicações, o modelo é construído de forma que as comparações não sejam feitas com intervalos sobrepostos o que complicaria a analise dos especialistas. Para isso, tem-se que q>s e k>t.

Além das comparações de ordem simples do tipo $P(x \in I_A)$-$P(x \in I_B) < 0$, o especialista pode ser capaz de especificar as constantes a, b e c de forma que $aP(x \in I_A)$-$bP(x \in I_B) <c$. A cada intervalo I_j, é associado uma probabilidade P_j. A questão a ser resolvida é como determinar os valores P_j? O trabalho de Lins e Souza (2001) considera que o conhecimento a priori do especialista é representado por uma família de distribuição contendo uma distribuição estocasticamente maior e uma distribuição estocasticamente menor. Essas distribuições podem ser determinadas a partir do seguinte problema de programação linear:

$$\text{Max}_{P_j}(Min) \sum_{j=1}^{2n} d_j P_j \quad (28)$$

Sujeito a:

$$a_{qt} \sum_{j=q}^{t} P_j - a_{sk} \sum_{j=s}^{k} P_j \leq b_f \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} P_j = 1 \quad (30)$$

Onde t<s, $a_{qt} > 0$ e$a_{sk} > 0$ sendo f =1,2.........., l, onde l representa o número de questões feitas ao especialista.

Os valores $\mathbf{d_j}$na formula 27 são definidos de acordo com o objetivo do especialista. Por exemplo, caso se esteja interessado nas distribuições de maior valor médio e menor valor médio $\mathbf{d_j}$ é definido da seguinte forma:

$$d_j = 2n - j + 1 \quad (31)$$

5. O Modelo

O modelo desenvolvido nesse trabalho consiste basicamente na junção da TDS e no modelo descrito pelo trabalho Lins e Sousa (2001). Na etapa inicial, a cada intervalo é atribuído uma função de assinalação de probabilidade $\mathbf{m_x(I_j)}$ onde x simboliza x-ésimo especialista e j a posição do intervalo que está em julgamento.

Na segunda etapa, segue-se a combinação dos diferentes corpos de evidência. Nesse sentido, a regra de combinação de Dempster normalizada não será utilizada nesse trabalho, pois não leva em consideração o conflito entre os corpos de evidência. Considera-se então o uso de uma das três regras modificadas apresentadas na seção 3.

Após a fase de levantamento das funções $\mathbf{m_x(I_j)}$ para cada especialista, independente do método utilizado, além de uma função $\mathbf{m^C(I_j)}$, que representa a atribuição de probabilidade combinado dos especialistas, tem-se uma função $\mathbf{m^C(\boldsymbol{\theta})}$ que representa assinalação de probabilidade ao conjunto universo. Dada a interpretação de $\mathbf{m^C(\boldsymbol{\theta})}$, sabe-se que a mesma pode transitar para qualquer $\mathbf{m^C(I_j)}$ para j=1,2,......,2n. Logo, para cada intervalo $\mathbf{I_j}$, tem-se o seguinte intervalo para a probabilidade do valor real de $\boldsymbol{\theta}$está no intervalo $\mathbf{I_j}$:

$$\left[m^C(I_j), m^C(I_j) + m^C(\boldsymbol{\theta})\right] \quad (32)$$

Para a tomada de decisão, a definição acima não informa muito principalmente quando o valor de $\mathbf{m^C(\boldsymbol{\theta})}$, é elevado, mas utilizando o modelo de Lins e Sousa (2001), onde pode se feitos julgamentos a acerca dos intervalos, pode-se determinar uma distribuição estocasticamente superior e inferior, que pode ajudar melhor no processo decisório.

Com esse objetivo, redefinimos a variável $\mathbf{P_j} = \mathbf{m^C(I_j)} + \mathbf{y_j}$onde $\mathbf{y_j}$ representa a massa probabilística aleatória móvel que pode ser atribuído a $\mathbf{P_j}$ devido à função $\mathbf{m^C}(\boldsymbol{\theta})$. Logo, o valor de $\mathbf{y_j}$ pertence ao seguinte intervalo $[0, m^C(\boldsymbol{\theta})]$.

Agora, o modelo pode ser reformulado na forma de um problema de programação linear, como na equação 1.

$$\text{Max}_{P_j}(Min)\sum_{j=1}^{2n} d_j P_j \qquad (33)$$

$$\text{Max}_{m_{12}(I_j)+y_j}(Min)\sum_{j=1}^{2n} d_j[m_{12}(I_j) + y_j(I_j)] \qquad (34)$$

O problema acima pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Max(Min)} \quad \sum_{j=1}^{2n} d_j m_{12}(I_j) + \underset{m^C(I_j)+y_j}{\text{Max(Min)}}\sum_{j=1}^{2n} d_j y_j\,(I_j)] \qquad (35)$$

A equação 3 se restringe então à:

$$\sum_{j=1}^{2n}\underset{y_j}{\text{Max(Min)}}\, d_j y_j(I_j) \qquad (36)$$

Quando nenhuma informação é adicionada ao modelo acima, na forma de restrição como na equação 28, a única restrição é devida a função $m^C(\boldsymbol{\theta})$ como descrito na equação 37:

$$\sum_{j=1}^{2n} y_j(I_j) = m^C(\boldsymbol{\theta}), \text{ onde } 0 \le m^C(\boldsymbol{\theta}) \le 1 \qquad (37)$$

Supondo que além da informação disposta pelo par $[\mathbf{m^C(I_j)}, m^C(\boldsymbol{\theta})]$, podemos dispor também de informações em relação aos intervalos I_je I_k na forma de desigualdade como descrito na equação 6 tem-se uma nova equação de restrição:

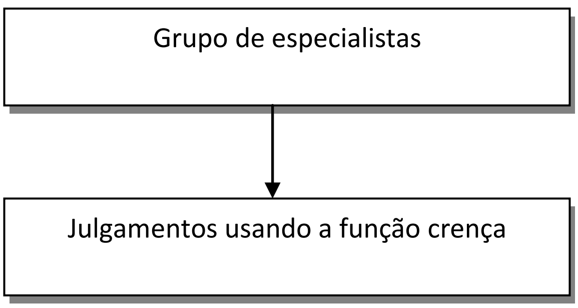
$$\sum_{j=q}^{t} y_j - a_{sk}\sum_{j=s}^{k} y_k \le b_f - [\ a_{qt} m^C \sum_{j=q}^{t}(I_j) - a_{sk}\sum_{j=s}^{k} m^C(I_k)] \qquad (38)$$

Logo, da combinação da TDS modificada com a presença da função $\mathbf{m^C}(\boldsymbol{\theta})$ e do conhecimento em relação à desigualdade entre os intervalos emerge a existência de duas distribuições estocástica a depender da função objetivo.

Dependendo do valor da função $m^C(\boldsymbol{\theta})$**,** o modelo pode seguir dois caminhos. Caso o valor de $m^C(\boldsymbol{\theta})$, seja nulo, o que significaria que os especialistas concordariam perfeitamente em seus julgamentos em relação aos intervalos, o modelo cai exatamente no modelo de probabilidade clássica quando são feitas estimativas pontuais acerca do intervalo. Nesse caso, as duas distribuições coincidem.

Caso o valor da função $m^C(\boldsymbol{\theta})$ seja nulo, o que por sua vez implica em discordância total entre os especialistas, tem-se o caso do modelo desenvolvido por Lins e Sousa (2001). Um valor intermediário cai justamente na abordagem mostrada nesse trabalho.

A figura a seguir mostra o diagrama de bloco do modelo:



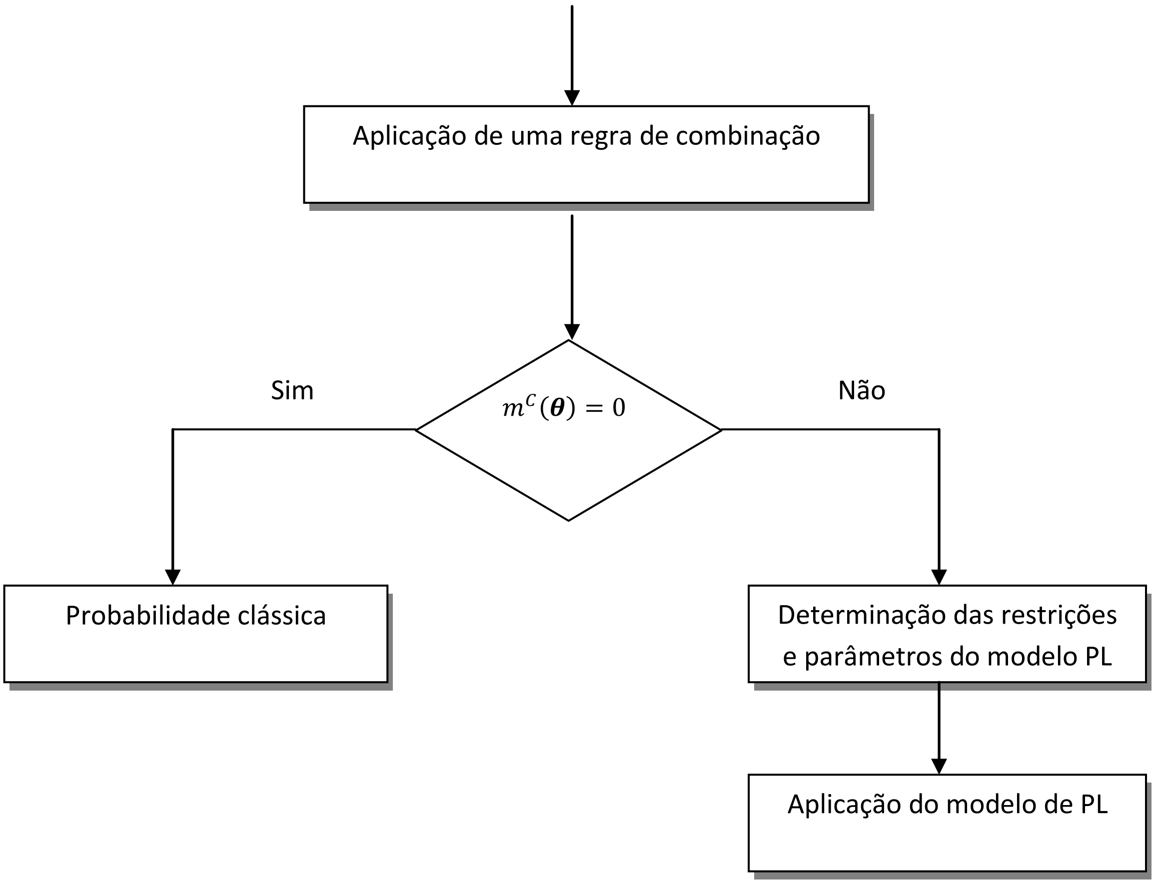


Figura 1- Diagrama esquemático do modelo

6. Conclusão

Nesse artigo foi apresentado um modelo matemático para agregação da elicitação probabilística de um grupo de especialistas acerca de uma variável continua. Com esse objetivo, o modelo foi criado com a junção de outros dois modelos: A teoria Dempster e Shafer e o modelo de programação linear para probabilidade imprecisa desenvolvido por Lins e Sousa (2001).

No entanto, o modelo não utiliza a regra de combinação desenvolvida por Dempster e Shafer, pois a mesma desconsidera a discordância entre os corpos de evidência. Nesse sentido, é apresentada uma revisão da literatura onde são expostos três modelos que levam em consideração uma possível discordância entre os corpos de evidência.

Com o objetivo de diminuir a incerteza gerada em um dos três modelos, utiliza-se então um modelo de programação linear já existente na literatura onde são geradas duas distribuições: uma estocasticamente superior e outra estocasticamente inferior. Tais distribuições são estabelecidas de acordo com a função objetivo.

7. Referências

Campos, F., Neves, A. eSousa F. M. C.(2007) Decision Maker Under Subjective Uncertainty. Symposium on Computational Intelligence in Multicriteria Decision Making.

Clemen, R.T. and Winkler, R.L.(1999). Combining probability distributions from experts in risk analysis. *Risk Analysis*, **19**, 187–203.

Dempster, A. P. (1967). "Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping." The Annals of Statistics **28**: 325-339.

Helton, J.C. eOberkampf, W.L. (2004). Special issue: Alternative representations of epistemic uncertainty. Reliability Engineering and System Safety, **95**, 1–3, 39–72.
Hogarth, R.M. (1975). Cognitive processes and the assessment of subjective probability distributions. *JASA*, **70**, 271–294.
Inagaki, T. (1991). “Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor Schemes ViaDempster-Shafer Theory.” IEEE Transactions on Reliability **40**(2):182-188.
Lindley, D.V. Tversky, A. e Brown, R.V. (1979). On the reconciliation of probability assessments. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, **142**, 146–180.
Lins G.C. N e Sousa F.M.(2001).A protocol for the elicitation of prior distributions. Proceedings of the Second International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIPTA’01, Cornell University, Ithaca, New York,265-272.
Lins G.C. N.(2000). Contribuições a um protocolo de educão do conhecimento a priori. Tese de Mestrado em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Pernambuco.
O’ Hagan, A.; Buck, C. E.; Daneskah, A.; Eiser, J. R.; Garthwait, P. H.; Jenkison, D. J.; Rakow, T.(2006). Uncertain Judgment: Eliciting Expert’s Probabilities. Statistics in practice; Wiley.
Peterson, C.R. and Beach, L.R. (1967). Man as an intuitive statistician. *Psychological Bulletin*, 68, 29–46.
Sentz K. eFerson S.(2002) "Combination of evidence in dempster-shafer theory," Sand Report, Apr, unlimited Release.
Shafer G.(1976)A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press,iSBN: 0-691 -08175- 1.
Tversky, A. and Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, **185**, 1124–1131.
Walley, P. (1991). Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. London: Chapman and Hall.
Yager, R. (1987). On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules.Information Sciences **41**: 93-137.
Zadeh, L. A. (1986). A Simple View of the Dempster-Shafer Theory of Evidence and its Implication for the Rule of Combination. The AI Magazine. **7:** 85-90.