

SIMULAÇÃO MONTE-CARLO PARA A GERAÇÃO DE CENÁRIOS EM PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS ESTÁGIOS

Jonathan Justen De La Vega Martínez

Estudante de Mestrado UFSCar - Sorocaba

Rodovia João Leme dos Santos, Km 110, SP-264, Itinga Sorocaba, 18052-780

jhonatank-2@hotmail.com

Prof. Dr. Douglas José Alem Junior

Departamento de Engenharia de Produção da UFSCar - Sorocaba

Rodovia João Leme dos Santos, Km 110, SP-264, Itinga Sorocaba, 18052-780

douglas@ufscar.br

Resumo

Neste artigo é desenvolvido um método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação Monte Carlo (MC) para quantificar e dimensionar a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias implicadas nos problemas de programação estocástica. Tal método constrói a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias com o conhecimento *a priori* de um intervalo que representa as estimativas mínimas e máximas das possíveis realizações de tais variáveis. A distribuição de probabilidade gerada não é mais que um conjunto finito de realizações discretas denominados de cenários, a fim de que o problema de programação estocástica possa ser resolvido até a otimalidade. Para avaliar o desempenho do método, o problema de racionalização energética em sistemas de abastecimento de água foi abordado. Testes computacionais preliminares indicam que o método de simulação Monte Carlo garante convergência à distribuição de probabilidade real com apenas poucos cenários, considerando um nível de significância de 95%.

Palavras chaves: Métodos de Geração de Cenários, Simulação Monte Carlo, Programação Estocástica.

Abstract

This paper has developed a scenario generation method based on sampling by Monte Carlo Simulation to quantify and to measure the probability distribution of the random variables involved in the problems of stochastic programming. Such method develops the probability distribution of the random variables with *a priori* knowledge of a range that represents the minimum and maximum estimates of the possible realization of these variables. The probability distribution which has been generated is not more than a finite set of discrete realizations that are called scenarios, so that the stochastic programming problem may be solved to optimality. The problem of energy rationalization in water supply systems was addressed in order to evaluate the performance of the method. Preliminary computational tests indicate that the method of Monte Carlo simulation ensures convergence to the real probability distribution with only a few scenarios, considering a significance level of 95%.

KEYWORDS. Methods of Generation of Scenarios, Monte Carlo Simulation, Stochastic Programming.

1 Introdução

Os problemas de otimização determinística são formulados sob a suposição de que os parâmetros envolvidos no problema são conhecidos de forma *a priori*. Entretanto, no contexto real, geralmente, diversos parâmetros de um problema podem ser considerados incertos e podem ser então, representados por variáveis aleatórias.

Programação estocástica surge como uma abordagem para formular os problemas de otimização que envolvem incertezas. Quando os parâmetros são incertos, porém, assumindo que estes podem estar entre um conjunto de valores possíveis, o intuito da programação estocástica é buscar uma solução que seja factível para todas ou quase todas as possíveis realizações de tais parâmetros e otimizar a expectativa dos custos em função das decisões e dados incertos (SHAPIRO e PHILPOTT, 2007).

No entanto, nos problemas de otimização sob incertezas, a dispersão dos custos e das infactibilidades são de especial interesse e, geralmente, busca-se além de minimizar seu valor esperado, diminuir sua dispersão. Essa variabilidade ou dispersão é vista como o risco associado às flutuações do custo e infactibilidades. Portanto, medidas de aversão ao risco são incorporadas nos problemas de otimização sob incertezas a fim de tornar a solução menos sensíveis às diferentes realizações da variável aleatória (BIRGE e LOUVEAUX, 1997).

A literatura indica que sob o paradigma de programação estocástica, os modelos mais aplicados e difundidos correspondem aos de dois estágios. Basicamente, a ideia dos problemas de programação estocástica de dois estágios é que as decisões são baseadas unicamente com os dados disponíveis no momento em que essas decisões são feitas e não devem depender de observações futuras. Seja ω uma possível realização da variável aleatória ξ , o clássico problema de programação estocástica de dois estágios com aversão ao risco pode ser formulado como:

$$\min \quad z = c^T x + E_{\xi}[q(\omega)^T y(\omega)] + \lambda E[\Delta(\omega)] + \beta \rho E[\tau(\omega)] \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b \quad (2)$$

$$T(\omega)x + Wy(\omega) + e\tau(\omega) = h(\omega) \quad (3)$$

$$E[q(\omega)^T y(\omega)] - q(\omega)^T y(\omega) = \Delta(\omega) \quad (4)$$

$$x \geq 0, y(\omega) \geq 0 \quad (5)$$

No modelo (1)-(5), as decisões de 1-estágio são representadas pelo vetor x . Os vetores c , b e as matrizes A e W descrevem os parâmetros determinísticos do problema. A matriz W é denominada matriz de recurso, já que está associada às decisões de recurso $y(\omega)$ e por ser fixa (determinística), o programa estocástico é denominado de recurso simples. No 2-estágio, um número de eventos $\omega \in \Omega$ podem ser realizados e, para uma dada realização ω , o vetor $\xi(\omega) = (q(\omega), h(\omega), T(\omega))$ torna-se conhecido e, então, decisões de 2-estágio $y(\omega)$ podem ser tomadas.

Além disso, e é um vetor de dimensão apropriada com todos seus elementos iguais a 1. As variáveis $\Delta(\omega)$ e $\tau(\omega)$ assumem o risco associado à dispersão dos custos e das infactibilidades do problema de 2-estágio, respectivamente. Finalmente, a função objetivo é composta por uma parcela determinística $c^T x$ e três estocásticas expressadas em termos da expectativa matemática dos custos de 2-estágio $q(\omega)^T y(\omega)$, da dispersão desses custos e das infactibilidades sobre todas as realizações ω da variável aleatória ξ .

Os parâmetros λ e β são denominados como fatores de risco e medem o compromisso entre o custo total esperado e o risco referente à variabilidade e infactibilidades, respectivamente. Se o decisor é averso ao risco, deve-se atribuir $\lambda > 0$ e $\beta > 0$, de modo que seja tão

importante minimizar o custo esperado quanto o risco. Finalmente, o parâmetro ρ penaliza as infactibilidades permitidas por falta e excesso.

Em um problema de programação estocástica, sua formulação envolve a suposição em que os dados de 2-estágio $\xi = (q, h, T)$ podem ser modelados como um vetor aleatório com distribuição de probabilidade conhecida. Com isso surge uma questão básica que concerne à forma em que o problema de 2-estágio deve ser resolvido. Portanto, abordagens padrões assumem que o vetor aleatório ξ tem um conjunto finito e discreto de possíveis realizações $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{|\Omega|}$, chamados de cenários, no qual cada um destes tem uma probabilidade $\pi(\omega)$ que reflete a chance a materializar-se (KALL e WALLACE, 1994; BIRGE e LOUVEAUX, 1997; SHAPIRO et al. 2009) Dessa forma, o problema (1)-(5) pode ser reformulado como um problema de programação linear determinística de grande porte como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= c^t x + \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) q(\omega)^T y(\omega) + \lambda \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \Delta(\omega) + \kappa \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \tau(\omega) \\ \text{s.t.} \quad Ax &= b \\ T(\omega)x + Wy(\omega) + e\tau(\omega) &= h(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \\ \sum_{\omega' \in \Omega} \pi(\omega') q(\omega')^T y(\omega') - q(\omega)^T y(\omega) &= \Delta(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \\ x \geq 0, y(\omega) &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Dado que a variável aleatória ξ é considerada discreta, então, o valor esperado no modelo (6) é determinado em função do somatório. A partir do modelo (6) é possível deduzir que a qualidade e a complexidade de um modelo de programação estocástica dependem em grande medida na forma em que são quantificadas as realizações dos cenários e do número destes a serem considerados. Portanto, a construção da distribuição de probabilidade é uma etapa importante para um dado modelo de programação estocástica, pois, questões como estas devem ser consideradas: *qual é o número razoável de cenários a serem considerados para obter uma solução muito próxima à solução ótima do problema original?*

Para ter um melhor entendimento da questão acima, suponha-se que existem n variáveis aleatórias em um dado problema de programação estocástica e cada variável possui três realizações definidas qualitativamente como alto, médio e baixo. Então, o número total de cenários é dado por $\Omega = 3^n$. Esse crescimento exponencial do número de cenários ocasiona a que o modelo de programação estocástica se torne muito difícil de ser resolvido. Além disso, para fazer uma discretização razoável da distribuição de probabilidade da variável aleatória $\xi_i, i = 1, \dots, n$, possivelmente seria necessário considerar mais que três realizações. Mas, isso vai depender de que tão bom ou ruim é o método de geração de cenários usado para construir as distribuições de probabilidade para cada variável aleatória ξ_i (SHAPIRO e PHILPOTT, 2007).

Dessa forma, um método de geração de cenários para um dado modelo de programação estocástica deve fornecer um compromisso entre a eficiência computacional e a qualidade da solução. Por essa razão, os métodos de geração de cenários abordados na literatura tendem a encontrar um equilíbrio entre essas duas medidas. Assim, nesse artigo, é proposto um método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação Monte-Carlo (MC) para quando intervalos que representam estimativas mínimas e máximas das realizações das variáveis aleatórias envolvidas em um dado modelo de programação estocástica são definidos de forma *a priori*.

O seguinte artigo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2 é descrito os indicadores para avaliar o método de geração de cenários e descreve brevemente os métodos existentes na literatura. Em seguida, a Seção 3 é explanado o método de geração de cenários desenvolvido nesse artigo. Na Seção 4, um exemplo ilustrativo é exposto a fim de avaliar

o desempenho do método de geração de cenários proposto. Testes computacionais são apresentados na Seção 5 e, finalmente, as considerações finais são definidas na Seção 6.

2 Método de Geração de Cenários

Na literatura, existem diversos métodos para a geração de cenários (ou árvores de cenários) e segundo Kaut e Wallace (2003), quando são comparados diferentes métodos na geração de cenários, deve-se focar no desempenho prático dos mesmos, e não em suas propriedades teóricas. Isso significa que um método pode aproximar perfeitamente a distribuição da variável aleatória quando o número de cenários tende ao infinito, mas isso não significa que o mesmo método seja bom para gerar uma árvore com apenas poucos cenários. Contrariamente, um método pode não apresentar convergência para a distribuição de probabilidade verdadeira da variável aleatória quando o número de cenários tende ao infinito, no entanto, poderia ter um bom desempenho para problemas práticos. Assim, os mesmos autores, propuseram dois indicadores de desempenho associados à estabilidade e ao erro que os métodos de geração de cenários devem satisfazer de modo a serem utilizáveis para um dado modelo de programação estocástica.

Em Kaut e Wallace (2003), as variáveis aleatórias contínuas são denotadas por $\tilde{\xi}$ e as variáveis aleatórias discretas por $\check{\xi}$. Nesse artigo, a notação $\hat{\xi}$ descreve a distribuição conjunta das variáveis aleatórias geradas a partir da discretização de $\tilde{\xi}$ e $\check{\xi}$, isto é, $\hat{\xi}$ representa a árvore de cenários.

O primeiro indicador de desempenho refere-se à estabilidade interna ou externa do método. A estabilidade interna consiste na geração de K árvores de cenários da mesma dimensão e posterior resolução dos K problemas de programação estocástica resultantes. Seja x_k^* o valor ótimo das variáveis de decisão do problema k , com $k = 1 \dots K$. Se o método de geração de cenários for estável, espera-se obter, aproximadamente, o mesmo valor da função objetivo para os K problemas, isto é:

$$F(x_k^*; \hat{\xi}_k) \approx F(x_l^*; \hat{\xi}_l), \quad \forall k, l = 1 \dots K \quad \text{e} \quad k \neq l \quad (7)$$

A estabilidade externa consiste em obter a solução ótima do problema de programação estocástica com conhecimento completo da distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas (problema original, $\tilde{\xi}$ e $\check{\xi}$), e compará-la às soluções ótimas dos problemas resultantes da discretização de $\tilde{\xi}$ e $\check{\xi}$. Se o modelo for estável, o valor ótimo da função objetivo do problema original é aproximadamente igual à função objetivo dos K problemas aproximados, isto é:

$$F(x^*; \tilde{\xi}) \approx F(x_k^*; \hat{\xi}_k) \quad \text{e} \quad F(x^*; \check{\xi}) \approx F(x_k^*; \hat{\xi}_k) \quad \text{com} \quad k = 1 \dots K \quad (8)$$

em que as equações descrevem a estabilidade externa considerando-se a distribuição das variáveis aleatórias contínuas e discretas, respectivamente.

A segunda propriedade é referente ao erro, definido como a distância entre o valor ótimo da função objetivo do problema estocástico original e as K soluções ótimas dos problemas estocásticos aproximados. O erro é dado por:

$$e(\tilde{\xi}; \hat{\xi}_k) = F(x^*; \tilde{\xi}) - F(x_k^*; \hat{\xi}_k) \quad \text{e} \quad e(\check{\xi}; \hat{\xi}_k) = F(x^*; \check{\xi}) - F(x_k^*; \hat{\xi}_k), \quad \forall k \in K \quad (9)$$

As equações (9) descrevem o erro associado às distribuições de probabilidades das variáveis contínuas e discretas, respectivamente. Dado um método de geração de cenários,

busca-se minimizar esse erro. No melhor dos casos, espera-se que esse erro seja nulo. No entanto, na maioria dos casos esta propriedade é difícil de ser medida. Isso se deve ao fato de que encontrar a solução ótima do problema original pode ser difícil, uma vez que obter tal solução significa resolver o problema de programação estocástica com o conhecimento completo da distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas (KAUT, 2003; 2007). Portanto, é necessário aproximar a solução do problema original. Geralmente, isso é feito com a geração de uma árvore suficientemente grande de tal forma que o problema de programação estocástica associado possa ser resolvido até sua otimalidade. Essa estratégia é usada nesse artigo para avaliar as propriedades de estabilidade externa e de erro.

Dentre os diferentes métodos de geração de cenários, encontraram-se os métodos baseados nas propriedades estatísticas, métodos de simulação por amostragem e modelos econométricos e de séries temporais. Outros métodos de geração de cenários incluem aqueles baseados em redes neurais e clusterização. Alguns métodos ainda utilizam uma combinação de mais de uma técnica, e por este motivo, são chamados de métodos híbridos. Para o leitor interessado em maiores detalhes sobre os métodos de geração de cenários sugere-se ler Dupačová et al. (2000), Hojland et al. (2003), Ross (2007), Mitra e Domenica (2010) e Kaut (Kaut:2011).

3 Método proposto para a Geração de Cenários

Neste artigo, é proposto um método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação de Monte Carlo (MC). Tal método pertence aos métodos de simulação por amostragem. O objetivo principal dessa metodologia é construir a distribuição de probabilidade das realizações finitas discretas das variáveis aleatórias, a partir de uma amostragem realizada nas distribuições de probabilidade contínuas ou discretas de tais variáveis conhecidas *a priori* (SHAPIRO, 2003). Esta é usada em detrimento da distribuição de probabilidade com conhecimento completo das variáveis aleatórias assumidas, o qual pode ocasionar uma redução na complexidade do modelo de programação estocástica resultante.

Além disso, a utilização de métodos de simulação MC permite que as probabilidades das realizações das variáveis aleatórias sejam estimadas a partir do cálculo das frequências relativas e, desta forma, as mesmas não são atribuídas de forma subjetiva.

Lembrando que informações sobre as estimativas mínimas e máximas das realizações das variáveis aleatórias são conhecidas, a amplitude desse intervalo pode ser determinada como a diferença entre as estimativas máxima e mínima. Em seguida, determina-se o número de intervalos menores pertencentes às estimativas. Estes intervalos menores são denominados de classes. Cabe ressaltar que o número de classes é atribuído de acordo com o número de eventos discretos da variável aleatória a gerar, e junto com a amplitude, convertem-se em parâmetros suficientes para calcular o tamanho do passo. Este último é determinado como a fração entre a amplitude e o número de classes totais (número de eventos). O tamanho do passo reflete a distância entre os limites de cada classe. Depois, geram-se números aleatórios, seguindo uma distribuição contínua ou discreta de probabilidade Z , entre as estimativas máximas e mínimas da variável aleatória. Isso é feito em M iterações da simulação. Uma vez finalizadas as M iterações, contabiliza-se a frequência absoluta e relativa de cada classe e um processo de amostragem é realizado para quantificar as possíveis realizações das variáveis aleatórias.

4 Exemplo Ilustrativo

A fim de ilustrar o comportamento do método de geração de cenários proposto nesse artigo, o problema de racionalização energética em sistemas de abastecimento de água (SAAE) abordado no trabalho de Toledo et al. (2006) será analisado. Nesse trabalho um modelo de programação linear determinística é proposto com o intuito de definir as políticas ótimas de ativação de bombas hidráulicas e os níveis de estoques de água em reservatórios, respeitando os níveis mínimos e máximos de água de cada um destes e satisfazendo a demanda por água. Esse problema pode ser abordado porque as políticas das empresas fornecedoras de energia elétrica tarifam de forma diferenciada o custo de consumo da mesma ao longo do dia. Sendo esse custo mais caro nos denominados períodos de ponta ou críticos, 18-21h.

Além disso, a perda de água, θ_{jt} , por vazamento na rede de distribuição é um fator a levar em conta ao momento de fazer o planejamento dos níveis de estoques de água em reservatórios, já que esta é proporcional a esse volume de água estocado. Isto é, quanto maior é o nível de estoque de água em reservatório maior é a perda da mesma por vazamento na rede e, portanto, maior é o consumo de energia elétrica incorrida por essa perda. Para um melhor entendimento do problema em análise sugere-se ver o trabalho de Toledo et al. (2006).

Como foi dito anteriormente, na prática muitos dados não são conhecidos no momento exato da realização do planejamento, uma vez que essas informações estão sujeitas às incertezas, como é o caso da demanda por água em cada reservatório e a perda da mesma no sistema, através do vazamento na rede de distribuição. Nessa seção será apresentado um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso resultante de estender a versão determinística do modelo proposto em Toledo et al. (2006). Convém salientar que somente a demanda por água de cada reservatório, d_{kt}^ω , foi considerada como uma variável aleatória no qual cada cenário ω tem uma probabilidade de ocorrência $\pi(\omega)$.

Considerando a demanda por água como uma variável aleatória, uma ação de recurso poderia ser:

- manter níveis de estoque de água, I_{jt}^ω , apropriados a fim de minimizar o impacto dessas realizações nas decisões de 1-estágio X_{jt} ;
- Por outro lado, se o nível de estoque de água não é suficiente para atenuar o efeito dos eventos aleatórios, então, mais uma decisão de recurso poderia ser definida, e é referente à transferência de água a partir de outros reservatórios, Z_{jlt}^ω .

Além disso, as variáveis de erros e de risco também são definidas como variáveis de 2-estágio e, dessa forma, são expressas em função do cenário ω , $\mu_{jt}^{\omega+}$, $\mu_{jt}^{\omega-}$, Δ_ω^+ e Δ_ω^- .

O modelo de programação estocástica com aversão ao risco é detalhado a seguir: A função objetivo (10) minimiza os custos de 1-estágio (parcela 1), a esperança dos custos de 2-estágio (parcela 2), da dispersão dos custos de 2-estágio (parcela 3) e da dispersão das infactibilidades (parcela 4). Ao passo que, as restrições (11) expressam o balanço de estoque de água em reservatórios. Nesse problema, cada reservatório possui capacidades mínimas e máximas e, portanto, as restrições (12) garantem que estes níveis sejam respeitados. As restrições (13) representam a função usada para determinar o risco associado aos custos de 2-estágio. As restrições (14)-(16) indicam o domínio das variáveis de 2-estágio. Finalmente, as restrições (17) e (18) descrevem, na mesma ordem, o domínio da variável de 1-estágio e os ajustes destas junto com as variáveis que representam o nível de estoque de água em reservatórios no início do horizonte de planejamento.

$$\begin{aligned} \min \quad \psi(x, \xi(\omega)) = & \sum_{t \in T} \sum_{j \in R} c_{jt} x_{jt} + \sum_{t \in T} \sum_{j \in R} \sum_{l \in R_j} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \delta_{jlt} z_{jlt}^{\omega} \\ & + \lambda \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) (\Delta_{\omega}^{+} + \Delta_{\omega}^{-}) \\ & + \beta \rho \sum_{t \in T} \sum_{j \in R} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) (\tau_{jt}^{\omega+} + \tau_{jt}^{\omega-}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a:} \quad & I_{jt}^{\omega} - (1 - \theta_{jt}) I_{j,t-1}^{\omega} - \nu_{jt} x_{jt} - \sum_{l \in P_j} w_{ljt} z_{jlt}^{\omega} \\ & + \sum_{l \in R_j} w_{ljt} z_{jlt}^{\omega} + \sum_{k \in S_j} d_{kt}^{\omega} = \tau_{jt}^{\omega+} - \tau_{jt}^{\omega-} \end{aligned} \quad (11)$$

$$h_j^{\min} \leq I_{jt}^{\omega} \leq h_j^{\max} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T} \sum_{j \in R} \sum_{l \in R_j} \delta_{jlt} z_{jlt}^{\omega} \\ & - \sum_{t \in T} \sum_{j \in R} \sum_{l \in R_j} \sum_{\omega' \in \Omega} \pi(\omega') \delta_{jlt} z_{jlt}^{\omega'} = \Delta_{\omega}^{+} - \Delta_{\omega}^{-} \end{aligned} \quad (13)$$

$$0 \leq z_{jlt}^{\omega} \leq 1 \quad (14)$$

$$\tau_{jlt}^{\omega+} \geq 0, \quad \tau_{jlt}^{\omega-} \geq 0 \quad (15)$$

$$\Delta_{\omega}^{+} \geq 0, \quad \Delta_{\omega}^{-} \geq 0 \quad (16)$$

$$0 \leq x_{jt} \leq 1 \quad (17)$$

$$x_j^0 = 0, \quad I_j^0 = h_j^0 \quad (18)$$

5 Resultados Computacionais

Os experimentos computacionais tiveram o objetivo de identificar se efetivamente o método de geração de cenários proposto fornece distribuições discretas que descrevam boas aproximações da distribuição real dos dados incertos. O método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação MC foi codificado no software MATLAB versão 2012a. Ao passo que, o modelo de programação estocástica foi codificado no Sistema Geral de Modelagem Algébrica (GAMS) e resolvido pelo solver Cplex 11.2. Para a realização dos experimentos computacionais foi usado um PC Intel(R) com processador Core (TM) com 16,0GB de memória RAM sob a plataforma Windows 7.

Para maiores detalhes sobre a instância e os valores dos parâmetros determinísticos, sugere-se ao leitor ver o trabalho desenvolvido por Toledo et al. (2006). No entanto, considerou-se um nível de vazamento de $\theta_{jt} = 10\%$. Em relação aos parâmetros do modelo de programação estocástica, testes preliminares sugerem que os parâmetros de risco assumem os valores $\lambda = 0,05$ e $\beta = 0,3$, ao passo que, o parâmetro de penalização assume o valor $\rho = 100$. Para atribuir as probabilidades de ocorrência de cada cenário foram usadas as distribuições: uniforme, empírica, triangular e lognormal.

5.1 Avaliação do Método de Geração de Cenários

Para avaliar a qualidade do método de geração de cenários, foram utilizados os indicadores propostos por Kaut e Wallace (2003). Esses indicadores correspondem às estabilidades interna e externa, e ao erro. Para analisar tais indicadores, utilizou-se a ferramenta estatística denominada limites de tolerância. Esta é usada com muita frequência no controle

estatístico de processos, a partir da análise dos gráficos de controle. Por sua vez, estes são usados para controlar ou monitorar a média e a variabilidade de um processo ao longo do tempo ou de um conjunto de amostras. Uma explanação detalhada da abordagem a usar para avaliar o método de geração de cenários é descrita no apêndice A. Convém ressaltar que os testes a apresentar correspondem a uma distribuição de probabilidade de 64 cenários gerada a partir do método proposto.

5.2 Avaliação Estabilidade Interna

Além de avaliar a estabilidade do método de geração de cenários, também se pretende avaliar a robustez do mesmo. Ao passo que a estabilidade é medida por um grau aceitável de variabilidade dos dados, a robustez é medida pelo comportamento dessa variabilidade à medida que os limites de tolerância aproximam-se da média. Logo, é necessário determinar limites de tolerância para diferentes valores do parâmetro k , o que significa combinar valores dos parâmetros k e d e manter o tamanho da amostra.

Para um nível de confiança de 95%, o número de amostras a gerar é quatro com um tamanho de 25. Portanto, um total de 100 árvores de cenários foi gerado e, por conseguinte, o mesmo número de soluções do modelo de programação estocástica foi obtido. Com esse tamanho da amostra e com a ajuda da tabela apresentada em Canavos (1998) é possível determinar os distintos valores de k , para valores fixos de γ e d . A Tabela 1 apresenta quatro combinações desses parâmetros com seu respectivo valor de k para o tamanho da amostra considerada.

Tabela 1: Valores de k para quatro combinações dos parâmetros γ e d com uma amostra igual a 25 - Estabilidade Interna

Coeficiente de Confiança (γ)	Alcance da Distribuição (d)	Valor de k
0.75	0.75	1.317
0.95	0.75	1.545
0.75	0.90	1.883
0.95	0.90	2.208

Da Tabela 1, pode-se inferir que para uma porcentagem de γ dos limites de tolerância, espera-se que pelo menos $100d\%$ dos dados estejam dentro dos limites de tolerâncias estabelecidos. Para concluir se o método apresenta estabilidade interna ou não, simplesmente, compara-se esse valor esperado com o valor real. Caso o valor real seja maior ou igual ao esperado, então o método é estável. Caso contrário, o método não apresenta estabilidade.

Na Figura 1 são ilustrados os gráficos de controle para cada distribuição de probabilidade usada e para a instância em análise. A partir da Figura 1, pode-se calcular em cada gráfico de controle a porcentagem real de dados cobertos pelos limites de tolerância. Essas porcentagens são apresentadas na Tabela 2. Observa-se nessa tabela que, independente da distribuição de probabilidade, a porcentagem real dos dados entre os limites de tolerância do gráfico de controle é sempre maior do que a porcentagem esperada. Portanto, conclui-se que o método de geração de cenários apresenta a característica de estabilidade interna.

Por outro lado, independente dos valores de k tabelados, e conseqüentemente, da proximidade dos limites à média, pode-se deduzir que o método não deixa de ser estável. Desse modo, pode-se inferir que o método proposto de geração de cenários pode ser considerado robusto para tal propriedade.

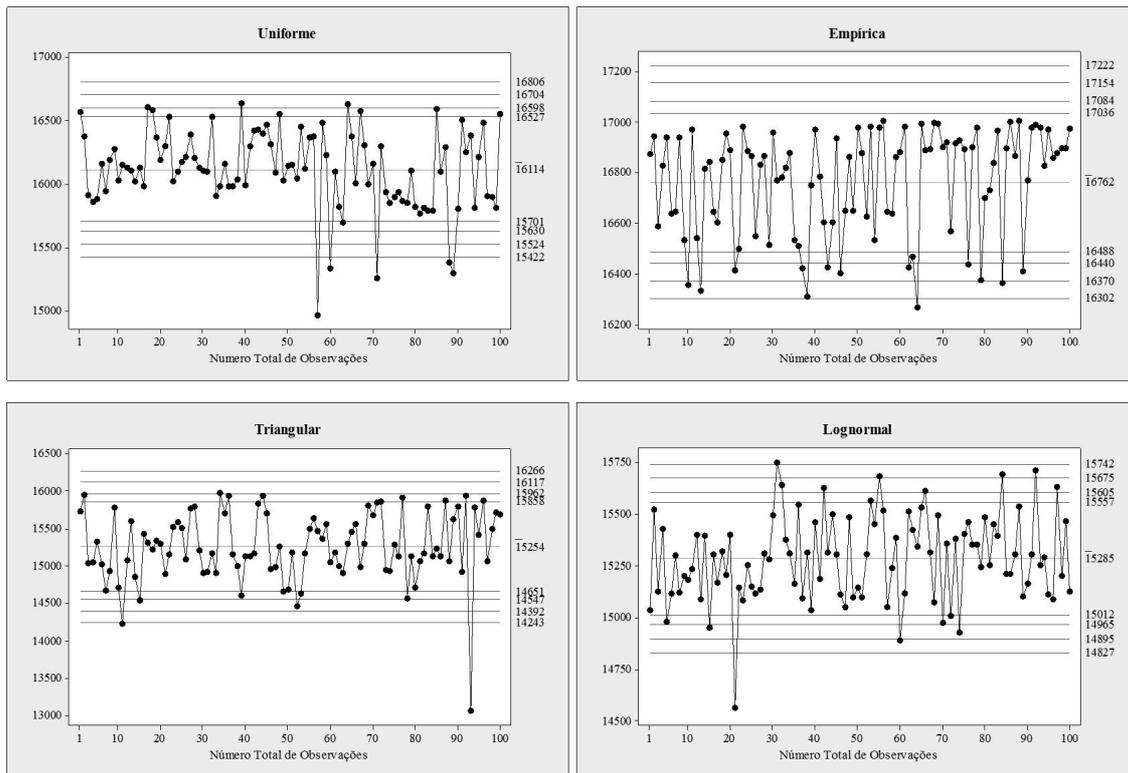


Figura 1: Gráficos de Controle - Estabilidade Interna

Tabela 2: Porcentagem esperada e real dos dados cobertos pelos limites de tolerância para cada uma das distribuições - Estabilidade Interna

Porcentagem Esperada	Porcentagem Real			
	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
75%	85%	86%	87%	84%
75%	93%	88%	98%	88%
90%	95%	96%	99%	95%
90%	95%	99%	99%	99%

5.3 Avaliação Estabilidade Externa e o Erro

Em relação à avaliação da estabilidade externa, o mesmo método de gráficos de controle com limites de tolerância foi usado, com a diferença que neste caso, a média amostral \bar{x} é substituída pela média dos erros relativos \bar{e} . Com isso, os dois indicadores de desempenhos são analisados de forma conjunta no mesmo gráfico de controle. Portanto, os novos limites de tolerância superior e inferior são dados por $\bar{e} \pm ks$, respectivamente, em que s nesse caso representa o desvio padrão dos erros. Desta forma, os novos limites são denominados limites de erros aceitáveis.

Para a determinação desses erros, é necessário calcular a solução ótima do problema original, lembrando que nesta avaliação é necessário adotar uma estratégia para aproximar a solução desse problema. A estratégia adotada neste trabalho consiste em selecionar uma árvore de cenários suficientemente grande de modo a que esta seja uma boa aproximação da distribuição real e suficientemente pequeno para que o problema de programação estocástica possa ser resolvido até sua otimalidade. Para lidar com esse *trade-off*, curvas de estabilidade

foram plotadas a fim de selecionar o tamanho apropriado da árvore. Para plotar essas curvas, a classe sob análise foi resolvida 20 vezes para cada árvore com 8, 27, 64, 125, 216 e 363 cenários e para cada distribuição de probabilidade considerada. Cada ponto destas curvas representa a média do valor ótimo das soluções. Essas curvas podem ser vistas na Figura 2.

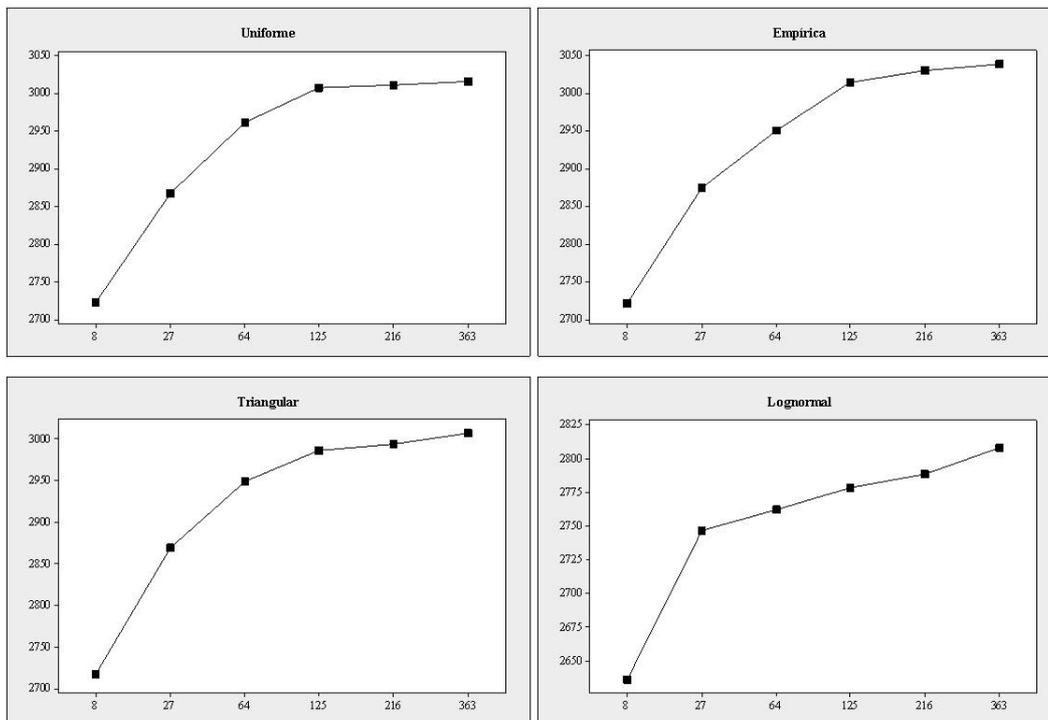


Figura 2: Curvas de Estabilidade para cada uma das distribuições sob análises

A partir das curvas da Figura 2, pode-se inferir que, independente da distribuição de probabilidade, existe uma estabilidade no valor da função objetivo no momento em que o número de cenários é igual ou superior a 125. No entanto, por questões do esforço computacional, esse número de cenários pode ser considerado como a aproximação da distribuição real requerida nessa avaliação.

Na Tabela 3 são apresentados os valores de k para combinações de valores dos parâmetros γ e d para um valor fixo atribuído ao tamanho da amostra. Com esses valores, construíram-se os respectivos gráficos de controle. Estes são ilustrados na Figura 3.

Tabela 3: Valores de k para quatro combinações dos parâmetros γ e d com uma amostra igual a 25 - Estabilidade Externa

Coefficiente de Confiança (γ)	Alcance da Distribuição (d)	Valor de k
0.75	0.75	1.317
0.95	0.75	1.545
0.75	0.90	1.883
0.95	0.90	2.631

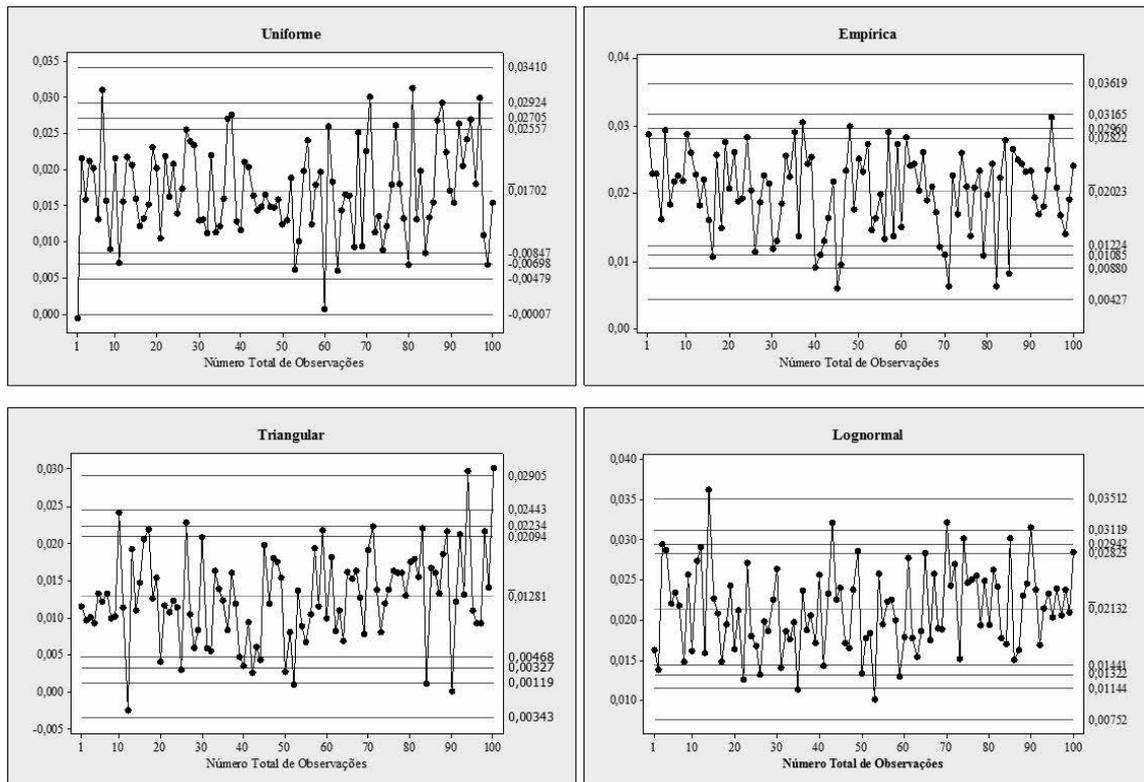


Figura 3: Gráficos de Controle - Estabilidade Externa

Do mesmo modo, a Tabela 4 mostra as porcentagens reais dos dados cobertos pelos limites de tolerância. Observa-se que, independente da distribuição de probabilidade e dos limites de tolerância, o método de geração de cenários também apresenta estabilidade externa.

Entretanto, à medida que os erros aceitáveis estão mais próximos do erro ideal, pode-se inferir que o método não deixa de ser estável. Assim pode-se afirmar, a um nível de 95% de confiança, que o modelo é robusto para o indicador atualmente avaliado.

Por outro lado, observa-se também nessas curvas a existência de certa quantidade de pontos próximos ao erro esperado. Isso significa que existem diversas soluções aproximadamente iguais ao problema original e como a maioria dos pontos se situa entre os limites, pode-se dizer que o método de geração de cenários não gera vieses significativos, exceto quando uma quantidade de pontos não é coberta por nenhum dos limites de tolerância.

Tabela 4: Porcentagem esperada e real dos dados cobertos pelos limites de tolerância para cada uma das distribuições - Estabilidade Externa

Porcentagem Esperada	Porcentagem Real			
	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
75%	82%	77%	79%	82%
75%	90%	91%	90%	91%
90%	94%	96%	95%	96%
90%	99%	100%	98%	99%

6 Considerações Finais

Neste artigo foi desenvolvido um método de simulação Monte Carlo para construir a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias implicadas em um dado problema de programação estocástica. O problema de racionalização energética nos sistemas de abastecimento de água foi abordado a fim de avaliar o desempenho do método de geração de cenários. Os resultados mostraram que o método de geração de cenários satisfaz as propriedades de estabilidade e do erro, independente da distribuição de probabilidade utilizada para a geração dos eventos discretos das variáveis aleatórias envolvidas. Desta forma, o método proposto garante convergência à distribuição de probabilidade real com apenas poucos cenários, considerando um nível de confiança de 95%.

Referências

- [1] Birge, J, e Louveaux, F. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research, 1997.
- [2] Canavos, G. *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos*. McGRAW-HILL, 1998.
- [3] Dupacová, J., Consigli, G. e Wallace, W. (2000) *Scenarios for Multistage Stochastic Programs*. Annals of Operations Research, 1, 25-53.
- [4] Hojland, K., e Kaut, M. e Wallace, W. (2003). *A heuristic Moment-matching Scenario Generation*. Computational Optimization and Applications, 24, 169-185.
- [5] Kall, P e Wallace, S. *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons, 1994.
- [6] Kaut, M. (2011). *Scenario Generation for Stochastic Programming: A Practical Introduction*. Stochastics in Logistics and Transportation.
- [7] Kaut, M. e Wallace, S. (2003). *Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming*. Pacific Journal of Optimization, 1, 1-14.
- [8] Kaut, M. e Wallace, S. (2007). *Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming*. Pacific Journal of Optimization, 3, 257-271.
- [9] Mitra, S. e Domenica, N. (2010). *A review of scenario generation methods*. International Journal of Computing Science and Mathematics. 3, 226-244.
- [10] Ross, O. *Interest Rate Scenario Generation for Stochastic Programming*. Methods, 2007.
- [11] Shapiro, A. *Monte Carlo Sampling Methods*, em Handbooks In Operations Research And Management Science. Elsevier, 10, 353-425, 2003.
- [12] Shapiro, A. e Philpott, A. (2007). *A Tutorial on Stochastic Programming*.
- [13] Shapiro, A., Dentcheva, D, e Nski, A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*, 2009.
- [14] Toledo, F., e Santos, M., e Arenales, M., e Júnior, P. (2009) *Logística de distribuição de água em redes urbanas - Racionalização energética*. Anales del XIII congreso Latino-Iberoamericano de investigacion operativa.

Apêndice A - Método de Avaliação

O procedimento necessário para determinar os limites de tolerância para o gráfico de controle é descrito a seguir. Dada uma amostra de tamanho N , determinam-se os dois primeiros momentos da distribuição de probabilidade da variável aleatória, isto é, a média μ , e a variância σ^2 . Em seguida, encontram-se os limites de tolerância inferior e superior do gráfico de controle, em que o limite inferior e superior são dados por $\mu - k\sigma$, e $\mu + k\sigma$, respectivamente, em que k é um parâmetro que reflete a distância dos limites de tolerância do valor esperado e é determinado usando-se os níveis de significância α e os valores da distribuição normal padrão.

Finalmente, os dados da amostra são inseridos no gráfico de controle e são analisados à luz dos limites de tolerância. Se os dados estão dentro dos limites de controle, então o processo (ou a amostra) é denominado estável para o nível de significância α . Caso contrário, deve-se estabilizar o processo ou a amostra. Observando-se que os limites de tolerância são determinados quando os parâmetros populacionais da distribuição são conhecidos, que não é o caso neste trabalho, estes devem ser estimados usando-se qualquer método de estimação pontual ou de intervalo de confiança. Neste trabalho é usado um método de estimação pontual, no qual a partir de uma amostra representativa da variável aleatória X , a média \bar{x} e a variância s^2 dessa amostra podem ser usadas como estimadores pontuais dos parâmetros populacionais μ e σ^2 .

Portanto, os novos limites de tolerância são dados por $\bar{x} \pm ks$, em que k é uma constante apropriada pertencente à distribuição conjunta de \bar{x} e s^2 . No entanto, isso gera um problema, no sentido em que ambos os parâmetros são variáveis aleatórias, já que variam para cada conjunto de dados amostrados. Assim, não é possível afirmar que para certo nível de confiança α , os dados estejam dentro dos limites $\bar{x} \pm ks$, devido também à variação dos limites de tolerância (CANAVOS,1998). Mas é possível selecionar um valor de k que depois de gerar de forma repetida amostras do mesmo tamanho N , de uma distribuição normal, uma proporção fixa γ desses limites conterá pelo menos $100d\%$ dos valores da distribuição. Canavos (1998) denomina ambos os parâmetros γ e d , como coeficiente de confiança e alcance da distribuição ou quantidade esperada de dados (por estar entre os limites), respectivamente. O mesmo autor apresenta uma tabela para determinar os valores de k para valores fixos de n , γ e d .