

## Uma ferramenta de apoio para professores e estudantes em cursos de Pesquisa Operacional

**Felipe Freitas Fonseca**

Instituto de Informática - Universidade Federal de Goiás  
Alameda Palmeiras, Quadra D, Câmpus Samambaia - Goiânia - GO  
fonsecafel@gmail.com

**Leizer Lima Pinto**

Instituto de Informática - Universidade Federal de Goiás  
Alameda Palmeiras, Quadra D, Câmpus Samambaia - Goiânia - GO  
leizer@inf.ufg.br

### RESUMO

Este trabalho visa contribuir com o desenvolvimento do Laboratório de Programação Linear (LabPL) através do desenvolvimento de um sistema web didático de apoio para professores e estudantes de cursos de Programação Linear (PL) e Pesquisa Operacional (PO). O sistema oferece todas as operações necessárias para a resolução rápida e passo a passo de problemas de PL através dos algoritmos Simplex primal e Simplex dual. A aplicação de uma busca exaustiva ou de uma pós-otimização também pode ser feita rapidamente. Além disso, a correção automática de questões associadas a estes tópicos é oferecida pelo sistema, facilitando a vida do professor e contribuindo com o aprendizado do aluno.

**PALAVRAS CHAVE.** Método Simplex, Pós-otimização, Sistema de apoio.

**Área principal:** EDU.

### ABSTRACT

This work aims to contribute with the development of LabPL (Linear Programming Laboratory), through the development of a didactic web system to support teachers and students from Linear Programming (LP) and Operational Research (OR) courses. The system offers all the operations needed for the quick and step by step resolution of LP problems through the Primal Simplex and Dual Simplex algorithms. The application of post-optimization can also be done quickly. Besides, the automatic correction of problems associated with these topics is also offered by the system, facilitating teacher's life and contributing with student's learning.

**KEYWORDS.** Simplex method, Post-optimization, Support system.

**Main area:** EDU.

## 1. Introdução

Neste trabalho estamos interessados no desenvolvimento de uma ferramenta de apoio para disciplinas de Pesquisa Operacional (PO) e Programação Linear (PL), presentes na grade curricular da graduação e pós-graduação de diversos cursos, como, por exemplo, Computação, Matemática, Economia e Engenharias.

Aplicações da PL são comuns em diversos setores do cotidiano, por exemplo, nas indústrias, nos transportes, na saúde, na educação, na agricultura, nas finanças, na economia, nas administrações públicas (Maculan e Fampa (2006)). Devido a este grande número de setores em que a PL se aplica se torna indispensável, para diversos cursos, o estudo de técnicas desta subárea da Otimização. O primeiro método efetivo para resolver um Problema de PL (PPL) foi o algoritmo Simplex, desenvolvido em 1947 por Dantzig (1951). Apesar de ter complexidade exponencial (ver Klee e Minty (1972)) e existirem algoritmos polinomiais para PL (por exemplo, o método de pontos interiores apresentado por Karmarkar (1984)), o Simplex é bastante utilizado até os dias de hoje. A justificativa para este fato é o bom funcionamento do Simplex na prática.

A ferramenta apresentada neste trabalho é um sistema web didático, denominado de Calculadora LOpt (calculadora para Otimização Linear), que visa apoiar professores e alunos interessados no estudo dos algoritmos Simplex primal e Simplex dual, além da aplicação de pós-otimização. Cada operação realizada é uma decisão do usuário, o que possibilita, por exemplo, avaliar o conhecimento do aluno através do sistema. Uma vez que todos os cálculos são realizados pelo sistema, como a obtenção da inversa e multiplicações matriciais, problemas maiores podem ser cobrados em avaliações ou resolvidos completamente em sala de aula pelo professor. Os dados dos problemas são tratados e exibidos na forma fracionária, que é a notação mais usual nos livros e usada por professores em sala de aula, possibilitando uma verificação imediata das operações realizadas.

Em Pinto e Bornstein (2006) é apresentado um sistema didático para resolução de PPLs através do algoritmo Simplex fases 1 e 2, denominado de SPLINT (SimPLex INTerativo). Assim como o SPLINT, a Calculadora LOpt também funciona diretamente na Internet, facilitando a utilização por parte dos usuários, pois não é necessário baixar nem instalar o programa. No caso do SPLINT, que trabalha com o Simplex tabular, todas as contas necessárias para as decisões como os custos reduzidos e as direções simplex, são automaticamente calculadas e exibidas de um passo para o outro. Isto facilita a vida do usuário com relação às decisões que ele deve tomar em cada iteração, possibilitando o aluno (com boa memória, por exemplo) resolver problemas sem muito conhecimento do método. Na Calculadora LOpt, que trabalha com o Simplex revisado, todas as operações necessárias, tanto para o Simplex primal quanto para o Simplex dual, são disponibilizadas através de botões, de modo que para realizar uma conta, o usuário deve clicar no botão desejado. Ou seja, uma conta só é realizada e exibida se o usuário clicar no botão correspondente. Desta forma, a Calculadora LOpt requer um maior conhecimento do método por parte do usuário para que ele possa resolver um PPL. Para avaliar o aluno, o professor pode verificar a sequência de contas realizadas por ele. Como são vários botões disponíveis juntos, podemos dizer que, se o aluno resolve corretamente o PPL através da Calculadora LOpt, então ele também consegue resolver o PPL em uma avaliação tradicional (papel e caneta). Considerando, obviamente, que o aluno sabe calcular a inversa de uma matriz e realizar a multiplicação matricial. Portanto, exames com questões deste tipo podem ser realizados através da Calculadora LOpt. O tempo gasto com as contas na avaliação tradicional pode ser convertido em questões com problemas maiores e com mais iterações. Além disso, como o sistema oferece uma correção automática, o trabalho do professor na correção das provas é praticamente eliminado. O sistema também contribui com o aprendizado individualmente, uma vez que o aluno pode utilizá-lo quando desejar para, por exemplo, resolver questões cadastradas no banco de dados ou refazer as contas para problemas resolvidos pelo professor em sala de aula.

Este artigo está dividido da seguinte forma: na seção 2, apresentamos o funcionamento geral do sistema; na seção 3, mostramos como resolver questões de PL através do sistema; e, na seção 4, apresentamos nossas conclusões sobre o trabalho. Após as conclusões são apresentadas instruções para que os interessados possam utilizar a Calculadora LOpt.

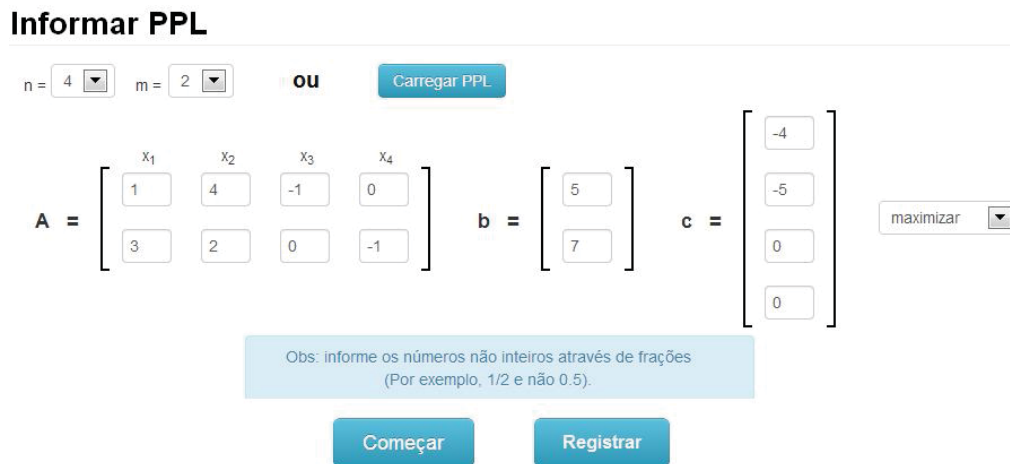
## 2. O sistema

Foram utilizadas diversas ferramentas no desenvolvimento da Calculadora LOpt. Para a criação de uma interface gráfica limpa e clara, optou-se pelo uso da linguagem de marcação HTML 5, juntamente com o *framework* de desenvolvimento *front-end*, Twitter Bootstrap. Visando dar dinamismo às páginas do sistema web, JavaScript, a principal linguagem *client-side* dos navegadores web, também foi empregada. Por fim, com o objetivo de controlar o cadastro e armazenamento de usuários e problemas e garantir a segurança desses dados, foram utilizados a linguagem de programação Java, o banco de dados MongoDB e o *framework* Spring Security.

Dois tipos de usuários são considerados pelo sistema, professor e aluno. O que difere os dois tipos é que os professores podem, além de resolver, cadastrar problemas, enquanto que os alunos estão limitados a resolução de problemas. A estrutura principal da Calculadora LOpt é composta pelas telas: Informar PPL, Calculadora e Resultado, apresentadas com detalhes abaixo.

### 2.1 Informar PPL

Na tela Informar PPL o usuário define o problema a ser resolvido. É nesta tela que os usuários do tipo professor têm a possibilidade de cadastrar problemas. A figura abaixo apresenta esta tela.



**Informar PPL**

n = 4 m = 2 ou Carregar PPL

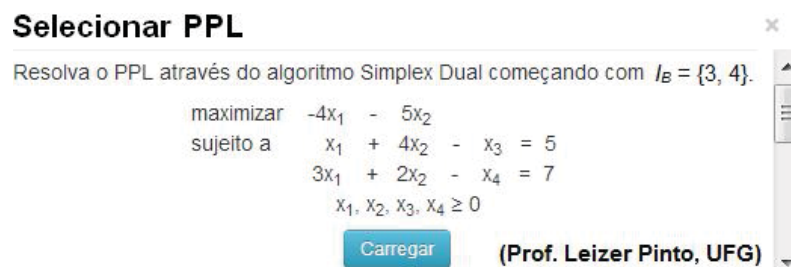
$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{maximizar}$$

Obs: informe os números não inteiros através de frações  
(Por exemplo, 1/2 e não 0.5).

Começar Registrar

Figura 1: Tela para informar o PPL.

Como podemos verificar na parte superior da Figura 1, existem duas formas para o usuário informar o PPL. Uma deles consiste em informar valores para  $n$  (número de variáveis) e  $m$  (número de restrições de igualdade) e, então, digitar os dados do PPL. Na outra forma, clicando no botão Carregar PPL, uma lista de problemas já cadastrados no sistema será exibida (veja Figura 2 abaixo), então, basta o usuário selecionar o problema que deseja considerar.



**Selecionar PPL**

Resolva o PPL através do algoritmo Simplex Dual começando com  $I_B = \{3, 4\}$ .

maximizar  $-4x_1 - 5x_2$   
sujeito a  $x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$   
 $3x_1 + 2x_2 - x_4 = 7$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Carregar (Prof. Leizer Pinto, UFG)

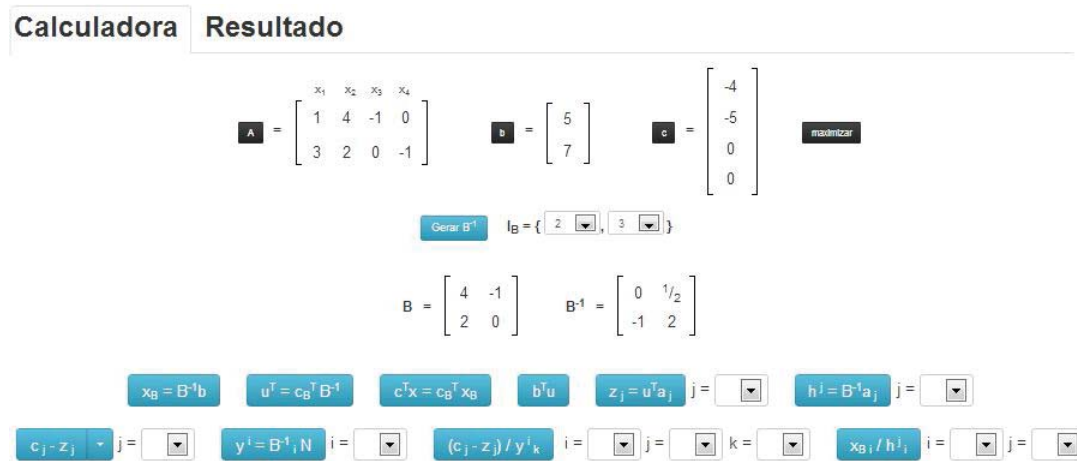
Figura 2: Tela que lista os problemas cadastrados no banco.

No caso de escolher um PPL do banco de problemas da Calculadora LOpt, após a seleção da questão desejada, os dados do problema escolhido são carregados em **A**, **b**, **c** e **objetivo**, como podemos ver na Figura 1.

Na parte inferior da tela Informar PPL, como também podemos ver na Figura 1, temos os botões Começar e Registrar, onde o botão Registrar aparece apenas para os usuários do tipo professor. Clicando nele, uma nova janela é exibida para que este usuário (professor) informe o enunciado, que deve descrever como o PPL deve ser resolvido e o método esperado para a resolução. Com isto, a questão fica cadastrada no banco de problemas do sistema, onde posteriormente todos os usuários vão poder acessá-la para resolvê-la e submeter a resolução para ser corrigida pelo sistema. Por questões de espaço, aqui não mostraremos esta janela de cadastro de questões. Com relação a ela, uma observação importante é que os nomes do professor e de sua instituição ficam registrados junto com a questão cadastrada por ele, como pode ser visto na Figura 2. Isto é feito para que questões mal elaboradas (incorretas ou imprecisas) não descredenciem o sistema, pois não foram elaboradas por ele.

## 2.2 Calculadora

Todos os cálculos são realizados nesta tela, onde os botões são disponibilizados assim que o usuário informa a primeira base através do conjunto de índices base  $I_B$  (ver figura abaixo).



The screenshot shows the 'Calculadora' interface with the following elements:

- Matrix  $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Vector  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$
- Vector  $c = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- A 'maximizar' button.
- A 'Gerar B<sup>-1</sup>' button and a selection box for  $I_B = \{2, 3\}$ .
- Calculated matrices:  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  and  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ .
- Buttons for various calculations:  $x_B = B^{-1}b$ ,  $u^T = c_B^T B^{-1}$ ,  $c^T x = c_B^T x_B$ ,  $b^T u$ ,  $z_j = u^T a_j$ ,  $h^j = B^{-1} a_j$ ,  $c_j - z_j$ ,  $y^i = B^{-1} b_i$ ,  $(c_j - z_j) / y^i$ , and  $x_{B_j} / h^j$ .

Figura 3: Tela para a realização dos cálculos.

Nesta tela o usuário tem a permissão para alterar os dados do PPL que está resolvendo. Porém, caso ele esteja resolvendo alguma questão cadastrada no sistema, alterações poderão desabilitar a correção automática. Como pode ser observado na Figura 3, todos os botões necessários para se aplicar os algoritmos Simplex primal e Simplex dual são disponibilizados na Calculadora LOpt. Além disso, qualquer conta pode ser feita sem seguir as regras (os passos) de qualquer algoritmo, possibilitando, por exemplo, uma busca exaustiva para a resolução de problemas. Na próxima seção mostraremos o uso de alguns destes botões aplicando estes dois algoritmos para resolver PPLs.

## 2.3 Resultado

Além de exibir todos os cálculos realizados na tela Calculadora, na tela Resultado são exibidos todos os PPLs considerados na resolução, juntamente com os PPLs duais correspondentes. Além disso, nesta tela o usuário pode justificar individualmente cada operação realizada, ou apagar qualquer uma delas. A Figura 4 ilustra esta tela do sistema.

Na parte inferior da tela Resultado, caso o usuário esteja resolvendo alguma questão cadastrada no banco de problemas, o botão Submeter será exibido, como mostrado na Figura 4. Após o usuário clicar neste botão, o sistema faz a correção com base no método informado pelo professor no momento em que ele cadastrou o problema no banco de questões da Calculadora LOpt. Na Tabela 4, abaixo, temos algumas das mensagens que o sistema apresenta para os usuários após a submissão de uma resolução.

Calculadora
Resultado

maximizar  $-4x_1 - 5x_2$

sujeito a:  $x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$

$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 7$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

minimizar  $5u_1 + 7u_2$

sujeito a:  $u_1 + 3u_2 \geq -4$

$4u_1 + 2u_2 \geq -5$

$-u_1 \geq 0$

$-u_2 \geq 0$

$I_B = \{3, 4\}$      $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$      $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$

Justifique a operação.

teste de otimalidade para o Simplex dual

Figura 4: Tela de resultados e submissão para correção.

Parabéns, a sua resolução para esta questão está correta.
Mais de um índice foi trocado do $k$ -ésimo para o $(k+1)$ -ésimo $I_B$ .
Nenhuma operação foi feita para a base do $k$ -ésimo $I_B$ .
As operações realizadas não justificam ir do $k$ -ésimo para o $(k+1)$ -ésimo $I_B$ .
A sua última operação não confere com o que é esperado.
O número de operações realizadas excedeu o número máximo permitido.
Sua base inicial é diferente da base indicada no enunciado.
Para esta questão todas as bases deveriam ser calculadas.

Tabela 1: Mensagens da correção de questões.

### 3. Utilização do sistema

Nosso objetivo nesta seção consiste em mostrar como a Calculadora LOpt pode ser utilizada no decorrer de um curso de PO ou PL. Na subseção 3.1 apresentamos uma questão que surge nos cursos antes do estudo do Simplex. Em 3.2, 3.3 e 3.4 mostramos como questões envolvendo os algoritmos Simplex primal, Simplex dual e a técnica de pós-otimização, respectivamente, podem ser tratadas facilmente através do sistema.

#### 3.1 Busca Exaustiva

Aqui, nossa idéia é mostrar que algumas questões mais simples, que surgem nos cursos de PL antes do estudo dos algoritmos Simplex, também podem ser tratadas pela Calculadora LOpt. Para isso considere o PPL:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} && 6x_1 + 4x_2 \\
 &\text{sujeito a:} && 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\
 & && x_1 + x_4 = 4 \\
 & && x_2 + x_5 = 6 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Uma questão possível associada ao problema acima pode ser definida pelo seguinte enunciado: Pelo Teorema Fundamental da PL e pelo fato do PPL acima admitir solução ótima (ele não é inviável e nem ilimitado, pois  $x = [2 \ 2 \ 8 \ 2 \ 4]^T$  é viável, por exemplo, e todas as variáveis são limitadas: para todo  $j$  temos  $0 \leq x_j \leq 18$ , por exemplo), temos que alguma solução básica viável é uma solução ótima para este problema. Então, faça um busca exaustiva para

encontrar uma solução ótima para o PPL. Para cada base, verifique a viabilidade da solução associada, e em caso de ser viável, calcule o valor da função objetivo.

### 3.2 Simplex primal

Para ilustrar como o sistema pode ser útil com relação ao estudo do algoritmo Simplex primal, vamos considerar o caso em que o professor deseja mostrar o fenômeno da ciclagem no Simplex através do clássico exemplo de Beale (1955), apresentado abaixo no formato padrão.

$$\begin{aligned}
 (Be) \quad & \text{minimizar} && -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\
 & \text{sujeito a:} && \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
 & && \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\
 & && x_3 + x_7 = 1 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Como base inicial, o professor toma  $I_B = \{5, 6, 7\}$ , e para atingir o objetivo de verificar a ciclagem, usa como regra de entrada na base a variável não básica com o custo reduzido,  $c_j - z_j$ , mais negativo e para a saída da base a regra do menor índice, de Bland (1977). A Figura 5, abaixo, mostra o PPL (Be) na tela Calculadora com a base inicial indicada e a direção simplex de  $x_1$  calculada.

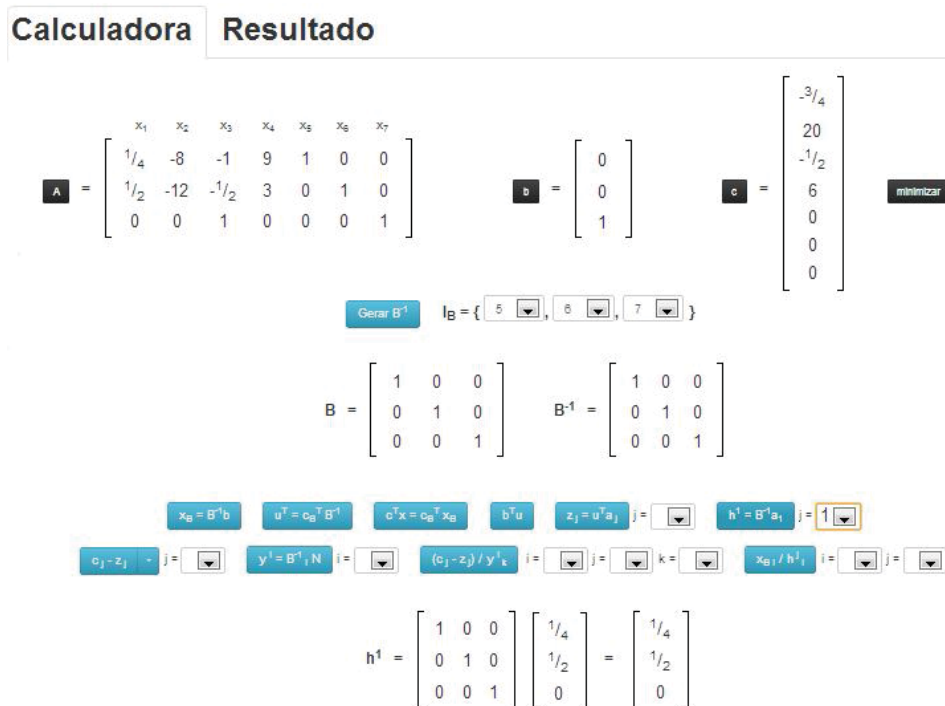


Figura 5: Tela Calculadora para (Be) com  $I_B = \{5, 6, 7\}$  e  $h^1$  calculado.

Pelo fato de termos o custo reduzido mais negativo como a regra de entrada, então o professor calcula o  $c_j - z_j$  para todas as variáveis não básicas, isto é, para  $j = 1, 2, 3, 4$ . Uma vez que  $c_1 - z_1$  é o mais negativo, a direção simplex  $h^1$  é calculada. Dando sequência no algoritmo, após calcular  $h^1$ , o professor utiliza o botão  $x_{B_i} / h^1_i$  para definir a variável que irá sair da base para a entrada de  $x_1$ . Como  $x_B = [x_5 \ x_6 \ x_7]^T = B^{-1}b = b = [0 \ 0 \ 1]^T$  e  $h^1_1, h^1_2 > 0$ , então  $x_5$  e  $x_6$  são candidatos a deixar a base. Pela regra do menor índice,  $x_5$  é quem sai da base. Com isto, a segunda base é dada por  $I_B = \{1, 6, 7\}$ . Seguindo desta maneira, na sétima iteração será identificada a ciclagem, pois teremos chegado à base inicial. Fica a cargo do leitor fazer esta verificação.

### 3.3 Simplex dual

Considere a questão apresentada na Figura 2. A Figura 6 mostra as contas da primeira iteração do algoritmo Simplex dual, onde  $I_B = \{3, 4\}$ . Para facilitar a visualização na tela Calculadora a última operação realizada é a que aparece imediatamente abaixo dos botões. Ou seja, as operações mais antigas vão sendo deslocadas para baixo.

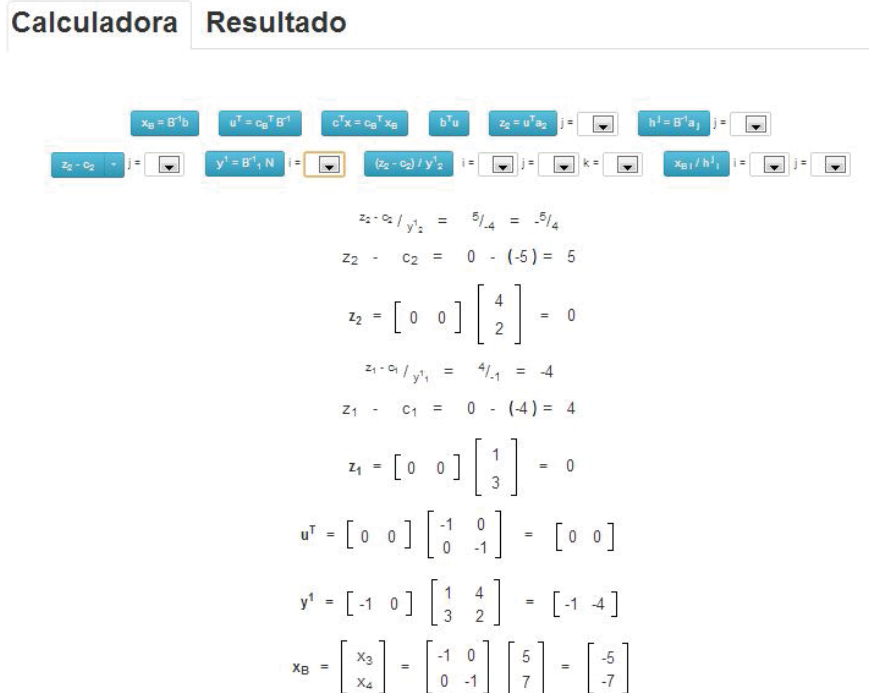


Figura 6: Tela Calculadora para o Simplex dual.

No Simplex dual a primeira conta a ser feita após partir de uma base dual viável, é a de  $x_B$ , para verificar a otimalidade da base atual. Como aqui as duas coordenadas de  $x_B$  são negativas, então devemos escolher uma variável para sair da base. Aleatoriamente, aqui escolhemos a primeira,  $x_3$ , o que justifica o cálculo de  $y^1$ . Como  $y_1^1$  e  $y_2^1$  são negativas, então devemos calcular  $(z_1 - c_1) / y_1^1$  e  $(z_2 - c_2) / y_2^1$  para encontrar quem entra no lugar de  $x_3$  na base. Uma vez que  $(z_2 - c_2) / y_2^1 > (z_1 - c_1) / y_1^1$ , então  $x_2$  é quem deverá entrar.

### 3.4 Pós-otimização

Suponha que tenhamos cadastrado uma questão para o PPL ( $P$ ) abaixo com o seguinte enunciado: Resolva ( $P$ ) pelo Simplex mais adequado partindo da base definida por  $I_B = \{3, 4\}$ . Após a obtenção da solução ótima, considere que o termo independente da segunda restrição,  $b_2$ , sofra uma alteração passando de 12 para 22. Verifique se a solução ótima obtida para ( $P$ ) também é ótima para este novo PPL. Caso não seja, resolva-o aplicando a idéia de pós-otimização.

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{maximizar} \quad 2x_1 + x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\
 & \quad \quad \quad 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Para resolver esta questão, o usuário deve aplicar o algoritmo Simplex primal até atingir a base dada por  $I_B = \{1, 2\}$  ou  $I_B = \{1, 3\}$ , que representam soluções ótimas para ( $P$ ). Em seguida, o usuário deve alterar o vetor  $b$  conforme o enunciado, e aplicar o algoritmo Simplex dual partindo da base ótima obtida para ( $P$ ). Sugerimos ao leitor entrar na Calculadora LOpt para verificar a tela Resultado após ter resolvido esta questão.

#### 4. Conclusão

Neste trabalho apresentamos um sistema web didático e bastante flexível, que serve de apoio para professores e alunos interessados no estudo e resolução de Problemas de PL. Com isso, cursos de PO e PL podem se beneficiar com o uso desta nova ferramenta.

A opção de correção automática oferecida pelo sistema contribui bastante com o professor, pois todo o trabalho mecânico de correção exigido por questões envolvendo os algoritmos Simplex, por exemplo, pode agora ser feito pela Calculadora LOpt, evitando que o professor gaste horas ou dias (dependendo da quantidade de alunos na turma) corrigindo esse tipo de avaliação. Pela Tabela 1, é possível observar que o sistema também contribui com o aprendizado do aluno através de suas mensagens de correção. Como as mensagens são exibidas no momento da submissão, então o aluno pode entender os motivos que o levaram ao erro imediatamente. Em uma avaliação tradicional, o aluno só receberia o *feedback* (correção do professor) dias ou semanas após o exame, tempo suficiente para alunos dos dias de hoje terem esquecido os detalhes da prova.

Entre os trabalhos futuros, destacamos o desenvolvimento de um sistema similar ao apresentado neste trabalho, onde usuários do tipo professor cadastram questões que descrevem problemas de diversos setores do cotidiano que devem ter como resposta modelos matemáticos de Otimização Linear.

#### Instruções de utilização da Calculadora LOpt:

1. Para um correto funcionamento do sistema, recomendamos aos usuários a utilização de navegadores web atualizados. Por exemplo, para os navegadores Mozilla Firefox, Internet Explorer e Google Chrome, versões iguais ou superiores a 19, 10 e 26, respectivamente.
2. Para utilizar o sistema, basta o interessado entrar na página web da Calculadora LOpt, em [www.inf.ufg.br/~leizer/LOpt](http://www.inf.ufg.br/~leizer/LOpt), sendo que no primeiro acesso ele deverá criar a sua conta.

**Agradecimentos.** Aos Professores Bruno Silvestre, Humberto Longo e Marco Menezes, e ao estudante Leonardo Freitas pelas dicas e sugestões.

#### Referências

- Beale, E. M. L.** (1955), *Cycling in the dual simplex algorithm*, Naval Research Logistics Quarterly, 2, 269-275.
- Bland, R. G.** (1977), *New finite pivoting rules for simplex method*, Mathematics of Operations Research, 2, 103-107.
- Dantzig, G. B.**, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, em Activity Analysis of Production and Allocation, (Ed.). T.C. Koopmans, NY, John Wiley, 339-347, 1951.
- Karmarkar, N.** (1984), *A new polynomial time algorithm for linear programming*, Combinatorica, 4, 373-395.
- Klee, V. e Minty, G.** *How good is the simplex algorithm?*, em Inequalities III, (Ed.). O. Sisha, New York, Academic Press, 159-175, 1972.
- Maculan, N. e Fampa M.H.C.**, *Otimização Linear*, Editora UnB, Brasília, 2006.
- Pinto, L.L. e Bornstein, C.T.** (2006), *Um Software Interativo para o Algoritmo Simplex em Programação Linear*, Anais do XXXVIII SBPO, 421-431.