V. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Sistema Sexagesimal (Base 60): Utilizado na subdivisão da hora em 60 minutos, dos minutos em 60 segundos; e do grau dos ângulos em minutos e segundos.
Sistema Duodecimal (Base 12): Originário do número de falanges dos dedos da mão (desconsiderando-se o polegar) e utilizado no sistema imperial de unidades (12 polegadas totalizam 1 pé, 12 onça totalizam 1 libra, etc.), e na contagem de objetos (12 objetos totalizam 1 dúzia, 12 meses totalizam 1 ano, etc.).
Sistema Quinário (Base 5): Usado por algumas tribos africanas, provavelmente baseado na quantidade de dedos da mão.
Sistema Vigesimal (Base 20): Usado por Maias, Astecas e Celtas.
Sistema Binário (Base 2): Usado em computadores.
Sistema Decimal (Base 10): O mais utilizado, originário do número de dedos das mãos.

A. *Representação Numérica*

Qualquer número inteiro x pode ser decomposto em:

$$x = \cdots + x_3 \cdot b^3 + x_2 \cdot b^2 + x_1 \cdot b^1 + x_0 \cdot b^0$$

onde b é a base do sistema de numeração. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 4582_{10} &= 4000 + 500 + 80 + 2 \\ &= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

De maneira geral, qualquer número (inteiro ou fracionário) x pode ser decomposto em:

$$x = \cdots + x_2 \cdot b^2 + x_1 \cdot b^1 + x_0 \cdot b^0 + x_{-1} \cdot b^{-1} + x_{-2} \cdot b^{-2} \ldots$$

Por exemplo:

$$49{,}36_{10} = 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$$

ou

$$716{,}3_8 = 7 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1}.$$

Com isso chega-se a notação posicional hoje utilizada, onde o número x pode ser representado apenas pelos seus coeficientes:

$$x = \ldots\, x_2\, x_1\, x_0\,,x_{-1}\, x_{-2}\, \ldots$$

com a vírgula separando as partes inteira e fracionária.
Responda: o sistema numérico romano também é posicional?

B. *Sistema Binário e Seus Derivados*

Um número binário (*bit*) corresponde a uma situação com duas possibilidades. Por exemplo, supondo a situação de um fio: se existe tensão elétrica no fio, esta condição é representada pelo valor binário "1"; caso contrário, o valor é "0". A escolha acima é apenas uma convenção e poderia ser invertida sem prejuízo à representação, isto é, ausência de tensão representando "1" e presença de tensão representando "0".
Sistemas de numeração para computadores são geralmente baseados no sistema binário (isto é, base 2), mas sistemas base 8 e 16 são também usados (veja Tab. I). Um exemplo de contagem nesses sistemas está colocado na Tab. II. O efeito de mudar de base de um número não altera o seu valor real, apenas a maneira como ele é escrito. As regras básicas de matemática são ainda válidas.

Tabela I

Base	Nome	Unidade
2	Binário	*Bit*
8	Octal	Octeto ou *Byte*
10	Decimal	Digito
16	Hexadecimal	Palavra ou *Word*

Tabela II

Decimal	Binário	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
21	10101	25	15

C. Conversão Binário-Decimal

A conversão de binário para decimal pode ser feita pela decomposição do número binário:

$$\begin{aligned} 1110001_2 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 64 + 32 + 16 + 1 \\ &= 113_{10}. \end{aligned}$$

A técnica colocada acima também vale para números binários fracionários. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 10{,}101_2 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 2 + 0 + 0{,}5 + 0 + 0{,}125 \\ &= 2{,}625_{10}. \end{aligned}$$

Na verdade, o método acima pode ser utilizado para a conversão de qualquer base para a base 10.

D. Conversão Decimal-Binário

A conversão de decimal para binário pode ser feita por subtração, conforme ilustrado abaixo:

$$\begin{aligned} 113_{10} &= 64 + 49 \\ &= 1 \cdot 2^6 + 49 \\ &= 1000000_2 + 49 \end{aligned}$$

onde a escolha de 64 se faz porque ele é a maior potência de 2 que cabe em 113 (isto é, é menor que 113). Continuando a conversão, tomemos apenas 49:

$$\begin{aligned} 49_{10} &= 32 + 17 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 17 \\ &= 100000_2 + 17. \end{aligned}$$

Fazendo a mesma operação, agora com 17 temos:

$$\begin{aligned} 17_{10} &= 16 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^4 + 1 \\ &= 10000_2 + 1. \end{aligned}$$

A última parcela é:

$$\begin{aligned} 1_{10} &= 1 \cdot 2^0 \\ &= 1_2. \end{aligned}$$

Somando os resultados parciais, temos:

$$\begin{aligned} 113_{10} &= 64_{10} + 32_{10} + 16_{10} + 1_{10} \\ &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1000000_2 + 100000_2 + 10000_2 + 1_2 \\ &= 1110001_2. \end{aligned}$$

Este método também funciona para conversão para outras bases. Para isso, basta alterar as parcelas que acima estão como 2^n para valores da base desejada.
Esta mesma conversão pode ser feita utilizando-se a divisão:

$$\begin{aligned} 113 \div 2 &= 56 \qquad \text{com resto} = 1 \\ 56 \div 2 &= 28 \qquad \text{com resto} = 0 \\ 28 \div 2 &= 14 \qquad \text{com resto} = 0 \\ 14 \div 2 &= 7 \qquad \text{com resto} = 0 \\ 7 \div 2 &= 3 \qquad \text{com resto} = 1 \\ 3 \div 2 &= 1 \qquad \text{com resto} = 1 \\ 1 \div 2 &= 0 \qquad \text{com resto} = 1. \end{aligned}$$

Tomando os restos a partir do último, temos que $113_{10} = 1110001_2$.
A conversão decimal-binário de números fracionários é um pouco mais complexa. Como exemplo utilizaremos apenas o método da divisão que, neste caso entretanto, utiliza a operação de multiplicação. Esta técnica deve ser empregada considerando-se apenas a parte fracionária do número decimal, como colocado a seguir:

$$\begin{aligned} 0{,}8125 \times 2 &= 1{,}625 \qquad \text{com excesso} = 1 \\ 0{,}625 \times 2 &= 1{,}25 \qquad \text{com excesso} = 1 \\ 0{,}25 \times 2 &= 0{,}5 \qquad \text{com excesso} = 0 \\ 0{,}5 \times 2 &= 1{,}0 \qquad \text{com excesso} = 1. \end{aligned}$$

Tomando os excessos a partir do primeiro, temos que $0{,}8125_{10} = 0{,}1101_2$.
Como o resultado da parte fracionária deve ser do tipo

$$\sum_{k=1} \frac{1}{2^k}$$

nem todos os números podem ser representados de maneira exata. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
0{,}65 \times 2 &= 1{,}3 && \text{com excesso} = 1\\
0{,}3 \times 2 &= 0{,}6 && \text{com excesso} = 0\\
0{,}6 \times 2 &= 1{,}2 && \text{com excesso} = 1\\
0{,}2 \times 2 &= 0{,}4 && \text{com excesso} = 0\\
0{,}4 \times 2 &= 0{,}8 && \text{com excesso} = 0\\
0{,}8 \times 2 &= 1{,}6 && \text{com excesso} = 1\\
0{,}6 \times 2 &= 1{,}2 && \text{com excesso} = 1\ldots
\end{aligned}$$

e a seqüência de operações começa a se repetir, isto é, mesmo que o número decimal seja exato, a sua representação binária pode resultar em uma dízima periódica.
Este método também funciona para conversão para outras bases. Para isso, basta alterar os divisores ou multiplicadores (acima, tanto divisor como multiplicador tem valor 2) para o valor da base desejada.

E. Conversão Octal-Decimal

A conversão pode ser feita pela decomposição do número octal:

$$\begin{aligned}
6403{,}32_8 &= 6 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2}\\
&= 3072 + 256 + 0 + 3 + 0{,}375 + 0{,}03125\\
&= 3331{,}40625_{10}.
\end{aligned}$$

F. Conversão Decimal-Octal

A conversão de decimal para octal pode ser feita por divisão no caso de valores inteiros, e por multiplicação no caso de valores fracionários, de maneira similar àquela empregada na conversão decimal-binário colocada acima. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
1113 \div 8 &= 139 && \text{com resto} = 1\\
139 \div 8 &= 17 && \text{com resto} = 3\\
17 \div 8 &= 2 && \text{com resto} = 1\\
2 \div 8 &= 0 && \text{com resto} = 2.
\end{aligned}$$

Tomando os restos a partir do último, temos que $1113_{10} = 2131_8$.

$$\begin{aligned}
0{,}8125 \times 8 &= 6{,}5 && \text{com excesso} = 6\\
0{,}5 \times 8 &= 4{,}0 && \text{com excesso} = 4.
\end{aligned}$$

Tomando os excessos a partir do primeiro, temos que $0{,}8125_{10} = 0{,}64_8$.

G. Conversão Hexadecimal-Decimal

A conversão pode ser feita pela decomposição do número hexadecimal:

$$\begin{aligned}
\text{7FA2,C}_{16} &= 7 \cdot 16^3 + 15 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1}\\
&= 28672 + 3840 + 160 + 2 + 0{,}75\\
&= 32674,75_{10}.
\end{aligned}$$

H. Conversão Decimal-Hexadecimal

A conversão de decimal para hexadecimal pode ser feita por divisão no caso de valores inteiros, e por multiplicação no caso de valores fracionários, de maneira similar àquela empregada na conversão decimal-binário colocada acima. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 1119 \div 16 &= 69 \qquad \text{com resto} = 15 \\ 69 \div 16 &= 4 \qquad \text{com resto} = 5 \\ 4 \div 16 &= 0 \qquad \text{com resto} = 4. \end{aligned}$$

Tomando os restos a partir do último, temos que $1119_{10} = 45\mathrm{F}_{16}$.

$$0{,}8125 \times 16 = 13{,}0 \qquad \text{com excesso} = 13.$$

Tomando os excessos a partir do primeiro, temos que $0{,}8125_{10} = 0{,}\mathrm{D}_{16}$.

I. Conversão Binário-Octal-Binário

Na conversão binário-octal, deve-se agrupar os *bits* em grupos de 3 a partir da vírgula decimal, da direita para esquerda para a parte inteira, da esquerda para a direita para a parte fracionária. Em seguida substitui-se cada grupo de *bits* pelo seu equivalente octal. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 1010111100{,}1101_2 &= 001\ 010\ 111\ 100\ ,\ 110\ 100 \\ &= 1274{,}64_8. \end{aligned}$$

Na conversão inversa, octal para binário, deve-se substituir cada número octal pelo seu correspondente binário. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 1572{,}16_8 &= 001\ 101\ 111\ 010\ ,\ 001\ 110 \\ &= 1101111010{,}00111_2. \end{aligned}$$

J. Conversão Binário-Hexadecimal-Binário

Na conversão binário-hexadecimal, deve-se agrupar os *bits* em grupos de 4 a partir da vírgula decimal, da direita para esquerda para a parte inteira, da esquerda para a direita para a parte fracionária. Em seguida substitui-se cada grupo de *bits* pelo seu equivalente hexadecimal. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 1010111100{,}1101_2 &= 0010\ 1011\ 1100\ ,\ 1101 \\ &= 2\mathrm{BC}{,}\mathrm{D}_{16}. \end{aligned}$$

Na conversão inversa, hexadecimal para binário, deve-se substituir cada número hexadecimal pelo seu correspondente binário. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 22\mathrm{F}{,}4_{16} &= 0010\ 0010\ 1111\ ,\ 0100 \\ &= 1000101111{,}01_2. \end{aligned}$$

K. Conversão Octal-Hexadecimal-Octal

Para estas conversões é, em geral, mais simples fazer a conversão para binário e em seguida converter de binário para a base desejada.