

Conhecimento Incerto

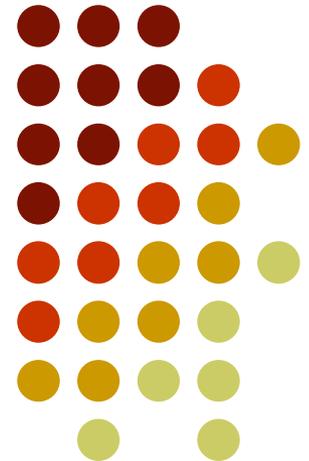
Profa. Josiane M. P. Ferreira

Texto base:

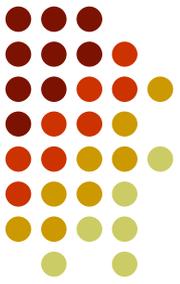
Stuart Russel e Peter Norving - “Inteligência Artificial” - cap 13.

David Poole, Alan Mackworth e Randy Goebel -
“*Computational Intelligence – A logical approach*” - cap 10.

setembro/2007

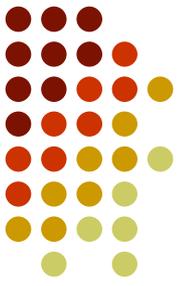


Usando conhecimento incerto



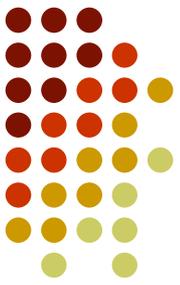
- Agentes **não** tem conhecimento completo sobre o mundo.
- Agentes necessitam fazer decisões baseadas na incerteza deles sobre o mundo.
- Supor como o mundo é não é o bastante.
 - Exemplo: colocar o sinto de segurança.
- Um agente necessita raciocinar sobre esta incerteza.
- Quando um agente faz um ação sobre incerteza ele está apostando => probabilidade.

Probabilidade



- Probabilidade é a medida de crença de um agente em alguma proposição – **probabilidade subjetiva**.
- Exemplo: A probabilidade de um pássaro voar é medida de crença do agente na habilidade de voar de um indivíduo, baseado somente no conhecimento de que o indivíduo é um pássaro.
 - Outros agentes podem ter diferentes probabilidades.
 - Eles podem ter tido diferentes experiências com pássaros ou diferentes conhecimentos sobre este pássaro em particular.
 - A crença de uma agente na habilidade de um pássaro voar é afetada pelo que o agente conhece sobre aquele pássaro.

Probabilidade subjetiva – exemplo



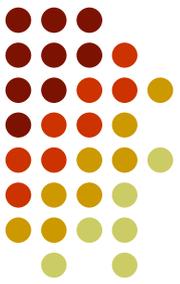
- Três agentes: A , B e C e um dado que foi lançado
- Supõe que A observa que o resultado é “6” e conta a B que o resultado é par, mas C não sabe de nada.
- Neste caso:
 - A tem uma probabilidade = 1 do resultado ser “6”.
 - B tem uma probabilidade = $1/3$ do resultado ser “6”.
 - C tem uma probabilidade = $1/6$ do resultado ser “6”.
- Eles têm diferentes probabilidades porque têm diferentes conhecimentos.

Medidas de crença numéricas



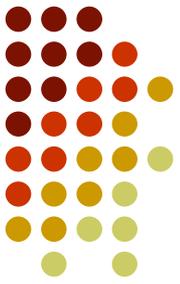
- A crença em uma proposição, f , pode ser medida em termos de um número entre 0 e 1 – esta é a **probabilidade de f** .
 - A probabilidade $f = 0$ significa que acredita-se que f seja definitivamente falsa.
 - A probabilidade $f = 1$ significa que acredita-se que f seja definitivamente verdadeira.
- Usar 0 e 1 é puramente uma convenção.
- f ter uma probabilidade entre 0 e 1 **não** significa que f é verdadeira em algum grau, mas que o agente é ignorante sobre o seu valor verdade.
 - Probabilidade é uma medida da ignorância do agente.

Variáveis randômicas (ou aleatória)



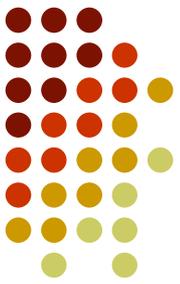
- Uma **variável randômica** é um termo na linguagem que pode assumir uma quantidade de valores diferentes.
- O **domínio** de uma variável X , escrito como $dom(X)$, é o conjunto de valores que X pode assumir.
 - Os elementos do domínio de X são exclusivos e exaustivos.
 - Exemplo: a variável *Cárie* tem como domínio $dom(true, false)$.
 - De acordo com o domínio, uma variável randômica pode ser **booleana**, **discreta** ou **contínua**.

Tipos de variáveis randômicas



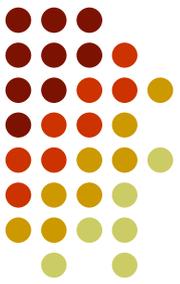
- **Booleanas:** tem o domínio $\langle true, false \rangle$.
 - Normalmente $Cárie = true$ é escrito somente *cárie* e $Cárie = false$ como $\sim cárie$
- **Discretas:** admitem valores de um domínio enumerável.
 - Exemplo: a variável *Tempo* pode ter um domínio como $dom(ensolarado, chuvoso, nevoento, nublado)$
- **Contínuas:** assumem valores a partir dos números reais.
 - O domínio pode ser a linha real inteira ou um intervalo como $[0, 1]$.
 - Exemplo: $X = 4,02$ afirma que a variável randômica X tem o valor exato 4,02.

Variáveis randômicas complexas



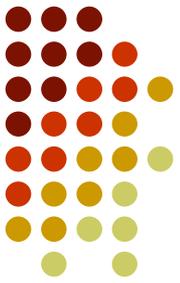
- Sejam X_1, \dots, X_n variáveis randômicas.
- Uma tupla de variáveis randômicas $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ é uma **variável randômica complexa**.
- O domínio da variável randômica complexa é o produto cartesiano dos domínios de seus componentes:
 - $dom(\langle X_1, \dots, X_n \rangle) = dom(X_1) \times \dots \times dom(X_n)$.
 - A tupla sempre é escrita como X_1, \dots, X_n .
- Uma **proposição** é uma fórmula booleana feita das associações de valores a variáveis.

Variáveis randômicas complexas - exemplo



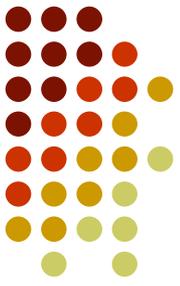
- Suponha um sistema de diagnóstico médico onde existem n possíveis doenças que o paciente pode ter ou não.
- A variável randômica que representa o estado do paciente associa uma das 2^n doenças complexas ao paciente.
 - $EstadoPaciente = \langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle False, False, False \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle True, False, False \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle False, True, False \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle True, True, False \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle False, False, True \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle True, False, True \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle False, True, True \rangle$
 - $\langle Gripe, Resfriado, Pneumonia \rangle = \langle True, True, True \rangle$

Semântica dos mundos possíveis



- Um **mundo possível** é uma associação de exatamente um valor para cada variável randômica.
- Seja Ω o conjunto de todos os mundo possíveis.
- Se $w \in \Omega$ e f é uma fórmula, f é verdadeiro em w (escrito como $w \models f$) é definido como:
 - $w \models X = x$ se w associa o valor x para a variável X .
 - $w \models f \wedge g$ se $w \models f$ e $w \models g$.
 - $w \models f \vee g$ se $w \models f$ ou $w \models g$.
 - $w \models \neg f$ se $w \not\models f$.

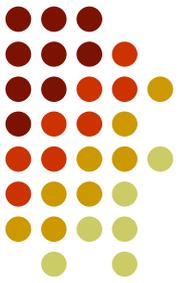
Semântica de probabilidade: caso finito



- Para um número finito de mundos possíveis:
 - Defina uma medida não negativa $\mu(w)$ para cada conjunto de mundos w de forma que a medida dos mundos possíveis some 1.
 - A medida especifica quanto o agente pensa que o mundo w é semelhante ao mundo real.
 - A **probabilidade da proposição f** é definida por:

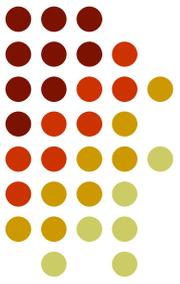
$$P(f) = \sum_{w|f} \mu(w)$$

Axiomas de probabilidade: caso finito



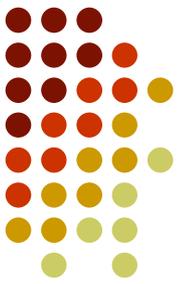
- Quatro axiomas definem o que segue de um conjunto de probabilidades:
 - **Axioma 1:** $P(f) = P(g)$ se $f \leftrightarrow g$ é uma tautologia.
 - Isto é, se f e g são logicamente equivalentes, elas tem a mesma probabilidade.
 - **Axioma 2:** $0 \leq P(f)$ para qualquer fórmula f .
 - **Axioma 3:** $P(\tau) = 1$ se τ é uma tautologia.
 - **Axioma 4:** $P(f \vee g) = P(f) + P(g)$ se $\neg(f \wedge g)$ é uma tautologia.
 - f e g são mutuamente exclusivos.
 - A probabilidade da disjunção pode ser calculada pela soma da probabilidade dos disjuntos.
- Estes axiomas são corretos e completos com respeito à semântica.

Axiomas de probabilidade: caso finito



- Negação de uma proposição:
 - $P(\neg f) = 1 - P(f)$.
- Raciocinando por casos:
 - $P(f) = P(f \wedge g) + P(f \wedge \neg g)$.
- Se v é uma variável randômica com domínio D , então para todas as fórmulas f ,
$$P(f) = \sum_{d \in D} P(f \wedge v = d).$$
- Disjunção para disjuntos não exclusivos:
 - $P(f \vee g) = P(f) + P(g) - P(f \wedge g)$.

Distribuição de probabilidade



- A **distribuição de probabilidade** sobre uma variável randômica X é uma função $dom(X) \rightarrow [0, 1]$
 - É a probabilidade para todos os valores que X pode assumir (domínio).
 - Exemplo: suponha a variável randômica $Tempo$. A distribuição de probabilidade para tempo $P(Tempo)$ é:
 - $P(Tempo=ensolarado) = 0,7$
 - $P(Tempo=nublado) = 0,08$
 - $P(Tempo=chuvoso) = 0,2$
 - $P(Tempo=nevoento) = 0,02$
- Isto também inclui o caso onde temos tuplas de variáveis (distribuição de probabilidade conjunta).
 - Por exemplo: $P(X, Y, Z)$ significa $P(\langle X, Y, Z \rangle)$.

Distribuição de probabilidade Conjunta



- Exemplo: $P(\text{Tempo}, \text{Carie})$

$$P(\text{Tempo}=\text{ensolarado}, \text{carie}) = 0,3$$

$$P(\text{Tempo}=\text{chuvoso}, \text{carie}) = 0,06$$

$$P(\text{Tempo}=\text{nublado}, \text{carie}) = 0,1$$

$$P(\text{Tempo}=\text{nevoento}, \text{carie}) = 0,04$$

$$P(\text{Tempo}=\text{ensolarado}, \sim\text{carie}) = 0,2$$

$$P(\text{Tempo}=\text{chuvoso}, \sim\text{carie}) = 0,04$$

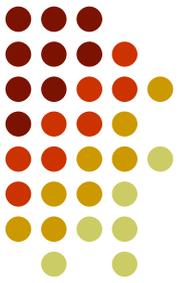
$$P(\text{Tempo}=\text{nublado}, \sim\text{carie}) = 0,2$$

$$P(\text{Tempo}=\text{nevoento}, \sim\text{carie}) = 0,06$$

| Distribuição de Probabilidade Conjunta (Tempo e Cárie) | | | | | |
|--|------------|------------|---------|---------|----------|
| | | Tempo | | | |
| | | Ensolarado | Chuvoso | Nublado | Nevoento |
| Cárie | VERDADEIRO | 0,3 | 0,06 | 0,1 | 0,04 |
| | FALSO | 0,2 | 0,04 | 0,2 | 0,06 |

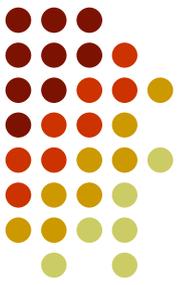
Exercícios:

Calcule as seguintes probabilidades



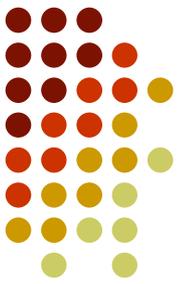
- Sabendo-se que $P(\text{Tempo}, \text{Carie}) =$
 $P(\text{Tempo}=\text{ensolarado}, \text{carie}) = 0,3$ $P(\text{Tempo}=\text{ensolarado}, \sim\text{carie}) = 0,2$
 $P(\text{Tempo}=\text{chuvoso}, \text{carie}) = 0,06$ $P(\text{Tempo}=\text{chuvoso}, \sim\text{carie}) = 0,04$
 $P(\text{Tempo}=\text{nublado}, \text{carie}) = 0,1$ $P(\text{Tempo}=\text{nublado}, \sim\text{carie}) = 0,2$
 $P(\text{Tempo}=\text{nevoento}, \text{carie}) = 0,04$ $P(\text{Tempo}=\text{nevoento}, \sim\text{carie}) = 0,06$
- Calcule:
 - $P(\text{Tempo}=\text{chuvoso})$
 - $P(\text{carie})$
 - $P(\sim\text{carie})$
 - $P(\text{Tempo}=\text{nublado} \wedge \text{carie})$
 - $P(\text{Tempo}=\text{nublado} \vee \text{carie})$

Condicionamento



- **Probabilidade condicional** especifica como revisar crenças baseadas em uma nova informação.
- O agente constrói um modelo de probabilidade levando em consideração toda a informação passada h .
 - Isto lhe dá a **probabilidade a priori** $P(h)$.
- Qualquer outra informação deve ser condicionada sobre h .
- Se a **evidência** e é a informação obtida subsequente a h , a **probabilidade condicional** $P(h|e)$ de h dado e é a **probabilidade posterior** de h .
 - A formula e é a conjunção de todas as observações do agente sobre o mundo.

Condicionamento – exemplo



- Assistente de diagnóstico:
 - Os sintomas do paciente serão as evidências.
 - As distribuições de probabilidade sobre as possíveis doenças são usadas antes do sistema ver ou conhecer qualquer coisa sobre o paciente.
 - Exemplo: $P(\text{meningite}) = 0,02$.
- A distribuição de probabilidade posterior é a probabilidade que o sistema usa depois de ter conseguido alguma evidência.
 - A probabilidade posterior é a medida conhecimento do sistema.
 - Exemplo: $P(\text{meningite} \mid \text{febre}) = 0,12$.
 - Quando surgirem observações de sintomas, ou resultados de exames, o sistema pode mudar a probabilidade posterior para refletir a nova evidência.
 - Exemplo: $P(\text{meningite} \mid \text{febre} \wedge \text{rigidezpescoço}) = 0,8$.

Semântica da probabilidade condicional



- A evidência e descarta os possíveis mundos incompatíveis com e .
- A evidência e induz a uma nova medida, μ_e , sobre os possíveis mundos

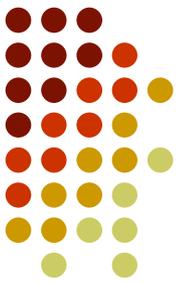
$$\mu_e(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{P(e)} \times \mu(\omega) & \text{if } \omega \models e \\ 0 & \text{if } \omega \not\models e \end{cases}$$

- A probabilidade condicional da fórmula h dado a evidência e é

$$\begin{aligned} P(h|e) &= \sum_{\omega \models h} \mu_e(\omega) \\ &= \frac{P(h \wedge e)}{P(e)} \end{aligned}$$

Exercícios:

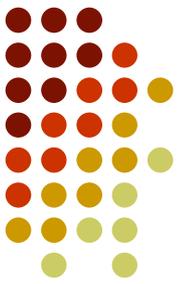
Calcule as seguintes probabilidades



| <i>Pássaro</i> | <i>Inseto</i> | <i>Jovem</i> | Prob |
|----------------|---------------|--------------|-------------|
| T | T | T | 0,0 |
| T | T | F | 0,2 |
| T | F | T | 0,04 |
| T | F | F | 0,01 |
| F | T | T | 0,01 |
| F | T | F | 0,01 |
| F | F | T | 0,23 |
| F | F | F | 0,5 |

- $P(\sim\text{pássaro} \mid \text{inseto})$
- $P(\text{jovem} \mid \text{inseto})$
- $P(\text{jovem} \mid \sim\text{inseto})$

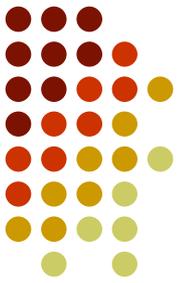
Propriedades da probabilidade condicional



- Regra da cadeia:

$$\begin{aligned} & P(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \\ &= P(f_1) \times P(f_2|f_1) \times P(f_3|f_1 \wedge f_2) \\ &\quad \times \dots \times P(f_n|f_1 \wedge \dots \wedge f_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n P(f_i|f_1 \wedge \dots \wedge f_{i-1}) \end{aligned}$$

Teorema de Bayes



- Nos diz com modificar a crença em h dado que uma evidência e é acumulada.
- Da regra da cadeia e da comutatividade da conjunção ($h \wedge e$ é equivalente a $e \wedge h$) temos:

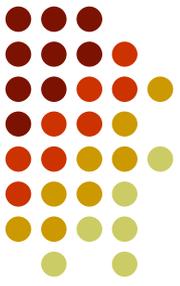
$$\begin{aligned}P(h \wedge e) &= P(h|e) \times P(e) \\ &= P(e|h) \times P(h).\end{aligned}$$

- $P(e) \neq 0$, podemos dividir o lado direito por $P(e)$:

$$P(h|e) = \frac{P(e|h) \times P(h)}{P(e)}.$$

- Este é o **Teorema de Bayes**.

Por que o teorema de Bayes é interessante?



- Sempre que temos conhecimento causal:
 - $P(\text{sintoma} \mid \text{doença})$
 - $P(\text{luz está desligada} \mid \text{estado das chaves e posições das chaves})$
 - $P(\text{alarme} \mid \text{fogo})$
- E queremos raciocinar sobre a evidência:
 - $P(\text{doença} \mid \text{sintoma})$
 - $P(\text{estado das chaves} \mid \text{luz está desligada e posição das chaves})$
 - $P(\text{fogo} \mid \text{alarme})$.